copie (8)

CENTRE DE RECHERCHE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

RAPPORT FINAL

"ETUDE PORTANT SUR L'OPTIMISATION
DU NOMBRE D'ASSIGNATION DE FREQUENCES"

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

LKC
TK
6553
.D4
1983

copie (8)

Industry Canada
Library - Queen

MAY 29 2013

Industrie Canada
Bibliothèque - Queen

RAPPORT FINAL

"ETUDE PORTANT SUR L'OPTIMISATION DU NOMBRE D'ASSIGNATION DE FREQUENCES"

PAR

M.DELFOUR (Chercheur principal)
F.DUBEAU et I.ROSENBERG

Centre de recherche de mathématiques appliquées
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ.A
Montréal, Québec, H3C 3J7

A L'INTENTION DU

MINISTERE DES COMMUNICATIONS, OTTAWA, ONTARIO, CANADA

EN VERTU DU:

CONTRAT OSU82-00281 (no. de série)

DU MINISTERE DES APPROVISIONNEMENTS ET SERVICES DU CANADA

PERIODE:

1er AVRIL 1982 au 31 MARS 1983

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

CHAPITRE 2. LES REGLES DE NON INTERFERENCE ET LES STRATEGIES D'ASSIGNATION LINEAIRES (M.Delfour)

1. Préliminaires
2. Elaboration des règles régissant la désensibilisation, l'adjacence et l'intermodulation
   - 2.1 Adjacence et désensibilisation
   - 2.2 Intermodulation R_X
   - 2.3 Intermodulation T_X
3. Relations entre les différentes règles de non interférence
   - 3.1 Intermodulation R_X et désensibilisation
   - 3.2 Intermodulation T_X et désensibilisation
   - 3.3 Intersection des courbes D_δ^D et D_δ^R
   - 3.4 Intersection des courbes D_δ^R et D_δ^T
   - 3.5 Intermodulation R_X et intermodulation T_X forte
   - 3.6 Intermodulation R_X et désensibilisation combinée avec intermodulation T_X forte
   - 3.7 Résumé des points d'intersection
4. Ensembles de conditions de non intefférence
   - 4.1 Conditions de non interférence
     - 4.1.1 Effet des conditions de désensibilisation sur les conditions de non interférence par intermodulation
     - 4.1.2 Ensemble de conditions suffisantes faibles
     - 4.1.3 Ensemble de conditions suffisantes fortes
   - 4.2 Conditions de non interférence pour le VHF
     - 4.2.1 Conditions de désensibilisation et d'adjacence
     - 4.2.2 Conditions suffisantes faibles
   - 4.3 Algorithme pour la vérification de la condition de non interférence par intermodulation R_X
5. Stratégies linéaires d'assignation horizontale
   - 5.1 Assignation uniforme dans un rectangle
     - 5.1.1 Transformation du spectre
     - 5.1.2 Définition d'une stratégie d'assignation
     - 5.1.3 Expression des conditions de non interférence
     - 5.1.4 Stratégies linéaires dans un rectangle

5.2 Rappels sur les stratégies linéaires dans un carré
5.2.1 Caractérisation et propriétés
5.2.2 Conditions de non interférence
5.2.3 Calcul des distances e_k
5.2.4 Stratégies linéaires non uniformes dans un losange ou un parallélogramme

5.3 Stratégies linéaires dans un rectangle
5.3.1 Caractérisation et propriétés
5.3.2 Conditions de non interférence
5.3.3 Calcul des distances e_k
5.3.4 Stratégies non uniformes dans un parallélogramme

6. Stratégies linéaires d'assignation vectorielle (horizontale et verticale)

6.1 Assignation uniforme dans un parallélépipède rectangle

6.2 Expression des conditions de non interférence

6.3 Stratégies linéaires dans un parallélépipède rectangle

6.4 Simplification des conditions de non interférence

6.5 Calcul des distances e_k et e_k^+
6.5.1 Recherche des coordonnées des stations de fréquence k
6.5.2 Calcul des e_k
6.5.3 Calcul des e_k^+ .

7. Révision des conclusions du rapport 1981-82 découlant de la formulation du paragraphe 4.2

7.1 Comparaison des conditions de non interférence de 1981-82 avec celles de 1982-83

7.2 Assignation dans un carré de 100km de côté

7.3 Relaxation de la position géométrique de l'antenne

7.4 Compression maximale de la ville pour les stratégies horizontales

7.5 Compression maximale de la ville pour les stratégies vectorielles

7.6 Relaxation des contraintes spectrales pour les assignations non uniformes

Annexe 1. Programme pour les stratégies linéaires d'assignation horizontale dans un rectangle (par M.Lapointe)

Annexe 2. Programme pour la génération des grilles et des distances e_m et d_m pour le cas du rectangle (par M.Lapointe)

Annexe 3. Programme pour les stratégies linéaires d'assignation vectorielle dans un parallélépipède rectangle (par M.Lapointe)

Annexe 4. Programme pour la génération des grilles et des distances e_m^+ et d_m dans le cas du parallélépipède rectangle (par M.Lapointe)

Annexe 5. Stratégies linéaires pour les cas $(N_1=N_2,N_3)=(32,1),(23,2),(19,3)$ et $(16,4)$ en fonction de P_{MIN} pour une ville carrée de côté A=100 km

Annexe 6. Compression de la ville pour les cas $(N_1=N_2,N_3)=(32,1),(23,2),(19,3)$ et $(16,4)$ correspondant aux différents P_{MIN}

Annexe 7. Exemples de stratégies vectorielles et de compression pour les cas $N_1=N_2=4,5$ et 9

CHAPITRE 3. ANALYSE PRELIMINAIRE DE QUELQUES CONFIGURATIONS D'ASSIGNATION NON UNIFORME (F. Dubeau)

1. Le problème modèle
2. Les contraintes et leurs conséquences
3. Etirement et compression du spectre d'une assignation
   3.1 Quelques définitions
   3.2 Effet des E's et C's sur les distances d_m
   3.3 Applications
4. Le problème à deux régions
5. Le problème à trois régions
6. Autres configurations
7. Vers un problème de commis-voyageur avec contraintes non-linéaires
8. Conclusions

CHAPITRE 4. DISTRIBUTION DES FREQUENCES DE RADIO A PARTIR D'UNE ASSIGNATION PARTIELLE (I. Rosenberg)

1. Introduction
2. Désensibilisation
3. Intermodulation
4. Méthodes proposées
5. Exemple

Annexe

Figures

CHAPITRE 5. CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

1. Conclusions
2. Recommandations

REFERENCES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Cette année encore le problème de l'assignation d'un spectre d'environ 1000 fréquences aux mobiles terrestres dans une ville carrée de côté à peu près égal à 100km a connu des développements extrêmement importants.

Le plus gros du travail (Chapitre 2) a porté sur (a) l'étude des conditions de non interférence par les mécanismes d'adjacence, de désensibilisation et d'intermodulation de récepteur (R_X) et de l'émetteur (T_X) et (b) le développement des stratégies d'assignation linéaires horizontales ou vectorielles (horizontales et verticales) dans une ville rectangulaire. Le cas vectoriel correspond à l'assignation de plusieurs fréquences sur un même mât.

Ces travaux ont été complémentés par deux études prospectives pour défricher le terrain et permettre d'orienter les projets futurs. F.Dubeau a exploré (Chapitre 3) les méthodes d'assignation dans une ville de configuration non uniforme où l'on doit assigner environ la moitié des fréquences dans un centre-ville de dimensions données. On sait, par les études de 1980-81 et 1981-82, que la difficulté principale réside dans l'assignation des fréquences à la région ou anneau intermédiaire entre le centre-ville et la banlieue. Les approches suggérées font appel à des méthodes d'étirement et de compression du spectre. I.Rosenberg (Chapitre 4) a fait une étude exploratoire de l'assignation des fréquences restantes d'un spectre dans une ville où une partie de ce spectre a déjà été assignée. On connait les fréquences assignées et leur position; on sait aussi qu'elles respectent toutes les conditions de non interférence.

L'introduction en 1981-82 des stratégies d'assignation linéaires par M.Delfour a été un des éléments principaux dans l'étude systématique des stratégies d'assignations qui respectent les conditions de non interférence et plus particulièrement celles provenant de l'intermodulation R_X. En effet une stratégie d'assignation linéaire horizontale est complètement caractérisée par deux entiers. Sa principale propriété est que la différence en fréquence entre deux stations est seulement fonction de la distance géométrique entre ces deux stations et non des positions géographiques absolues de ces stations. Le calcul des distances intervenant dans la vérification des conditions de non interférence en un point donné est alors indépendant de la position de ce point. Ceci simplifie considérablement les calculs et permet de faire des calculs d'optimisation en un temps raisonnable par ordinateur.

Le recours aux stratégies d'assignation linéaires réduit considérablement le nombre des stratégies admissibles. Cependant les résultats montrent que cette classe de stratégies est assez riche pour les fins de cette étude et le niveau des conditions de non interférence considéré. Par exemple ce genre d'étude permet de conclure que l'interférence la plus limitatrice n'est ni l'adjacence, la désensibilisation ou l'intermodulation T_X mais plutôt l'intermodulation R_X.

Cette année la théorie sous-jacente aux stratégies linéaires a été complétée et généralisée au cas d'une ville rectangulaire. Le calcul des distances a été amélioré réduisant dans certains cas le temps de calcul par un facteur de plus de 10! Ces améliorations techniques se sont avérées nécessaires avant de passer aux stratégies d'assignation vectorielles où le temps de calcul est plus important.

Les stratégies d'assignation vectorielles développées cette année servent à assigner au centre de chaque petit carré d'une grille non plus une fréquence mais un vecteur de fréquences (verticalement). En d'autres termes on assigne au centre de chaque petit carré plusieurs fréquences sur un même mât vertical en faisant l'hypothèse qu'elles n'interfèrent pas entre elles. Ce type d'assignation est avantageux de plusieurs façons. Dans une ville carrée de 100 km de côté, elles permettent au mât ou à l'antenne de se déplacer dans un rayon plus grand autour de sa position nominale. D'autre part, lorsque l'on veut comprimer au maximum une assignation, elles permettent de comprimer de 12 à 14% plus que pour les stratégies d'assignation horizontales. Cette construction a été utilisée l'année dernière pour pouvoir assigner le spectre jusqu'à 9 fois dans une ville carrée de 100 km de côté. Pour $P_{MIN} = -132$ et des conditions de non interférence bien moins avantageuses nous avons pu faire légèrement mieux en assignant 4 fréquences à chacun des 256 mâts.

Le lecteur trouvera une révision systématique des conclusions du rapport 1981-82 au paragraphe 7 du Chapitre 2.

Il semble bien que l'on commence seulement à exploiter le potentiel considérable des stratégies linéaires. Il en existe plusieurs autres types. Il y a en outre de nombreuses façons de les exploiter comme le suggère par exemple F.Dubeau au Chapitre 3.

CHAPITRE 2

LES REGLES DE NON INTERFERENCE ET LES STRATEGIES D'ASSIGNATION LINEAIRES

(M. Delfour)

1. PRELIMINAIRES

Ce chapitre est entièrement consacré aux mécanismes de non interférence (paragraphes 2,3 et 4) et aux stratégies d'assignation horizontale linéaires dans un rectangle (paragraphe 5) ou vectorielles (horizontale et verticale) dans un parallélépipède rectangle (paragraphe 6). Le paragraphe 7 contient une revision des conclusions du rapport 1981-82 à la lumière de la nouvelle formulation des règles de non interférence et du développement des nouvelles stratégies linéaires vectorielles.

Les mécanismes d'interférence retenus pour cette étude sont l'adjacence, la désensibilisation et les intermodulations R_X (du récepteur) et T_X (de l'émetteur). En 1981-82 seul le mécanisme d'intermodulation R_X avait été retenu avec des "chiffres optimistes"; la condition de désensibilisation simplifiée n'avait pas vraiment d'effet sur les mécanismes d'assignation et, au lieu de considérer l'adjacence comme une contrainte sur la distance entre stations de fréquences adjacentes, le critère retenu avait été de maximiser le minimum de cette distance par rapport à tous les couples de stations auxquelles étaient assignées des fréquences adjacentes.

La description des mécanismes d'interférence est donnée au paragraphe 2 en fonction notamment du niveau maximum d'interférence permis P_{MIN}. Les différents calculs ont été faits sur une calculatrice HP-97 et les programmes nécessaires ont été gardés sur de petites cartes magnétiques portant un numéro encerclé (n) . Pour le calcul, les 10 chiffres donnés par la calculatrice ont été gardés dans le texte au cas où l'on voudrait refaire des, ou faire d'autres, calculs. Ces 10 chiffres ne sont pas une indication de la précision des calculs de non interférence qui sont basés sur des données avec au plus 3 chiffres significatifs. Cependant

la précision de la HP-97 est telle qu'il a fallu, par exemple, trouver les intersections des trois courbes décrivant la fonction $OCR_D(\delta)$ donnée par (2.12) avec 10 chiffres significatifs pour éliminer des phénomènes artificiels plus tard dans les calculs.

Comme les conditions de non interférence par les différents mécanismes ne sont pas indépendants les unes des autres, le paragraphe 3 les compare systématiquement en fonction de l'écart en fréquence δ afin de simplifier les règles de non interférence.

Au paragraphe 4 on fait le résumé des différents ensembles de conditions suffisantes de non interférence. Les résultats sont explicités pour la bande VHF. Un algorithme est donné pour la vérification de la condition de non interférence par intermodulation R_X.

Au paragraphe 5, les résultats obtenus en 1981-82 pour les stratégies linéaires dans un carré ont été complétés et généralisés au cas du rectangle. Le calcul des conditions de non interférence a été adapté aux nouvelles règles du paragraphe 4. Le calcul des distances e_k a été amélioré. Le cas de stratégies linéaires dans un parallélogramme est aussi considéré par rotation de l'axe i_2 par rapport à l'axe i_1 et par des changements d'échelle le long des axes i_1 et i_2.

Au paragraphe 6 on introduit les nouvelles stratégies d'assignations vectorielle dans un parallélépipède rectangle. On n'assigne plus simplement une fréquence au centre de chaque petit carré mais un vecteur de fréquence (verticalement). En d'autres termes on assigne au centre de chaque petit carré plusieurs fréquences sur un même mât vertical en faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas d'interférence entre elles. On verra au

paragraphe 7.5 que ce nouveau type de stratégies permettra de comprimer une ville carrée 12 à 14% plus que pour les stratégies linéaires horizontales, soit de 39 km 221 à 33 km 645 pour 1024 fréquences et $P_{MIN} = -132$. Ces nouvelles stratégies sont caractérisées par trois entiers. On leur adapte les conditions de non interférence et l'on développe de nouveaux algorithmes pour le calcul des distances e_k et e_k^+. Comme pour le cas du rectangle, on étudie aussi les stratégies linéaires dans un parallélépipède arbitraire obtenu par rotation de l'axe i_2 par rapport à l'axe i_1 et par des changements d'échelle le long des axes i_1 et i_2.

Enfin le paragraphe 7 présente les résultats pour l'assignation de fréquences dans une ville carrée. On étudie particulièrement le cas d'une ville de 100 km de côté avec antennes fixes ou mobiles dans un certain rayon r autour du centre de chaque petit carré. Les stratégies vectorielles permettent de déplacer l'antenne plus que les stratégies horizontales. On comprime ensuite la ville dans les cas des stratégies linéaires horizontales ou vectorielles et on détermine la longueur minimum A* du côté en fonction de $N_1 = N_2$ et P_{MIN}. Ici aussi les stratégies vectorielles permettent de faire mieux et comprimer de 12 à 14% plus. On se souvient qu'en 1981-82 les k-assignations permettaient de comprimer la ville encore par un facteur 1/k lorsque la seule condition de non interférence provenait de l'intermodulation R_X et que l'on assignait que les fréquences multiples de l'entier k. Pour $P_{MIN} = -132$, on retrouve ce phénomène avec les nouvelles conditions de non interférence. Cependant le résultats se dégrade pour $P_{MIN} = -140$ ou -148 en raison de l'influence plus marquée des conditions de non interférence par désensibilisation

et intermodulation T_X. Pour les géométries variables on ne présente, faute de temps, que l'exemple d'une ville rectangulaire.

Les programmes principaux développés par Michel Lapointe se trouvent dans les Annexes 1 à 4. Le détail et les grilles des exemples discutés au paragraphe 7 sont donnés aux Annexes 5 à 7.

2. ELABORATION DES REGLES REGISSANT LA DESENSIBILISATION, L'ADJACENCE ET L'INTERMODULATION

Ce paragraphe est basé sur le rapport de G. De Couvreur [1] intitulé "Selection of optimum culling limits for land-mobile EMC calculations". Les mécanismes d'interférence que nous allons examiner sont ceux de l'adjacence, de la désensibilisation et de l'intermodulation créée par le récepteur ou le transmetteur.

Pour toutes les catégories d'interférence, le niveau maximum d'interférence permis est

(1) $P_{MIN,MAX} = P_{MIN} - 6$ dBW,

où P_{MIN} est le niveau minimum requis du signal reçu. Cette dernière quantité dépend des caractéristiques du bruit ambiant pour le récepteur. Pour la bande VHF, nous pourrons prendre les chiffres suivants:

$P_{MIN} = -148$ dBW niveau de bruit faible

$P_{MIN} = -140$ dBW niveau de bruit moyen

$P_{MIN} = -132$ dBW niveau de bruit élevé .

Dans chaque cas, les niveaux d'interférence calculés seront comparés au niveau maximum d'interférence permis:

$P_{IN} > P_{MIN} - 6$ dBW (niveau inacceptable)

(2) $P_{IN} \leq P_{MIN} - 6$ dBW (niveau acceptable)

2.1 *Adjacence et désensibilisation*

Pour l'interférence du type adjacence ou désensibilisation, le niveau d'interférence est donné par la formule suivante:

(3) $P_{IN} = ERP - P_L - OCR$

où ERP est la puissance d'émission effective, P_L est la perte de puissance le long du parcours et OCR est la réduction de puissance en fonction de

l'écart de fréquence $\delta = \delta f$ par rapport à la position de la fréquence d'émission. Ces quantités exprimées en dBW deviennent

(4) $\quad ERP = 23 \text{ dBW} \quad (200 \text{ Watts})$

(5) $\quad P_L = 28{,}2 + 20 \log F_{MHZ} + 20 \log D_{km}.$

Pour la bande VHF les fréquences d'émission (channel) sont distantes de $\Delta f = 30$ kHz l'une de l'autre et l'on peut prendre

(6) $\quad F = 160 \text{ MHz}.$

La condition de non interférence (2) s'exprime alors par l'inégalité

(7) $\quad 20 \log D \geq -20 \log F + ERP - P_{MIN} - 22{,}2 - OCR$

où la quantité OCR s'exprime comme suit.

Adjacence.

(8) $$OCR_A(\Delta f) = \begin{cases} 15 \text{ dBW} & \text{si} \quad \Delta f = 15 \text{ kHz} \\ 74 \text{ dBW} & \text{si} \quad \Delta f \geq 30 \text{ kHz} . \end{cases}$$

La bande VHF correspond à $\Delta f = 30$ kHz. En définissant la distance $D^A_{\Delta f}$

(9) $\quad 20 \log D^A_{\Delta f} = -20 \log F + ERP - P_{MIN} - 22{,}2 - OCR_A(\Delta f),$

la condition (7) devient

(10) $\quad D \geq D^A_{\Delta f} .$

Pour la bande VHF ($F = 160$ MHz et $\Delta f = 0{,}03$ MHz) avec $ERP = 23$, la distance $D^A_{\Delta f}$ devient

(11) $$D^A_{\Delta f} = \begin{cases} 5{,}443\ 522\ 408 , & P_{MIN} = -132 \\ 13{,}673\ 510\ 08 , & P_{MIN} = -140 \\ 34{,}346\ 304\ 43 , & P_{MIN} = -148 \end{cases} .$$

Désensibilisation. Ici OCR_D est fonction de l'écart δ de fréquence

$$(12)\qquad OCR_D(\delta) = \begin{cases} 451 + 221\log\delta, & 0{,}0125 \le \delta < 0{,}02 \quad (0{,}019\ 843\ 789) \\ 85{,}5 + 6{,}3\log\delta, & 0{,}02 \le \delta < 0{,}4 \quad (0{,}399\ 488\ 019) \\ 96{,}1 + 32{,}9\log\delta, & 0{,}4 \le \delta \le 10 \end{cases}$$

où δ est l'écart de fréquence exprimé en MHz (les chiffres entre parenthèses sont les points d'intersection plus exacts des courbes). En définissant les distances D_δ^D

which curves?

$$(13)\qquad \begin{cases} 20\log D_\delta^D = -20\log F + ERP - P_{MIN} - 22{,}2 - OCR_D(\delta), \\ 0{,}0125 \le \delta \le 10, \end{cases}$$

la condition (7) devient

$$(14)\qquad D \ge D_\delta^D, \qquad 0{,}0125 \le \delta \le 10.$$

Pour F = 160 MHz, ERP = 23, la distance D_δ^D en fonction de P_{MIN} devient

(i) $P_{MIN} = -132.$

$$(15a)\qquad D_\delta^D = \begin{cases} 7{,}689\ 179\ 688\times10^{-19} & /\delta^{11{,}05}, & 0{,}0125 \le \delta < 0{,}02 \\ 1{,}448\ 371\ 648 & /\delta^{0{,}315}, & 0{,}02 \le \delta < 0{,}4 \\ 0{,}427\ 444\ 777 & /\delta^{1{,}645}, & 0{,}4 \le \delta \le 10 \end{cases}$$

(221/20) (6.3/20) (32.9/20)

(ii) $P_{MIN} = -140$

$$(15b)\qquad D_\delta^D = \begin{cases} 1{,}931\ 434\ 613\times10^{-18} & /\delta^{11{,}05}, & 0{,}0125 \le \delta < 0{,}02 \\ 3{,}638\ 145\ 091 & /\delta^{0{,}315}, & 0{,}02 \le \delta < 0{,}4 \\ 1{,}073\ 692\ 736 & /\delta^{1{,}645}, & 0{,}4 \le \delta \le 10 \end{cases}$$

(iii) $P_{MIN} = -148$

$$(15c)\qquad D_\delta^D = \begin{cases} 4{,}851\ 544\ 397\times10^{-18} & /\delta^{11{,}05}, & 0{,}0125 \le \delta < 0{,}02 \\ 9{,}138\ 607\ 291 & /\delta^{0{,}315}, & 0{,}02 \le \delta < 0{,}4 \\ 2{,}696\ 994\ 216 & /\delta^{1{,}645}, & 0{,}4 \le \delta < 10. \end{cases}$$

Remarque. Pour la bande VHF où l'écart f entre deux canaux adjacents est $\Delta f = 0{,}03$ MHz et indépendamment de P_{MIN}, F et ERP

(16) $$D^A_{\Delta f} * 1{,}2454\ D^D_{0,03} \Rightarrow D^A_{\Delta f} > D^D_{0,03}\ .$$

Si F = 160 MHz et ERP = 23, alors

(17) $$D^D_{0,03} = \begin{cases} 4{,}371\ 060, & P_{MIN} = -132 \\ 10{,}979\ 607, & P_{MIN} = -140 \\ 27{,}579\ 527, & P_{MIN} = -148 \end{cases}\ .$$

Pour le VHF ($\Delta f = 0{,}03$) la condition d'adjacence est plus forte que celle de désensibilisation au point $\delta = 0{,}03$.

2.2 *Intermodulation* R_X

Le phénomène d'intermodulation R_X est produit par la combinaison des signaux de deux stations émettrices T_1 et T_2 de fréquences f_1 et f_2 dans le récepteur d'une troisième station R_0 de fréquence f_0. Par non-linéarité les fréquences f_1 et f_2 se combinent pour produire une fréquence égale ou presqu'égale à

$$f_0 = 2f_1 - f_2$$

correspondant à la fréquence nominale du récepteur R_0 d'une troisième station O. Le phénomène est illustré par le schéma ci-dessous.

Dans ce cas

(18) $$P_{IN} = 2P_{IN,1} + P_{IN,2} - (60 \log \Delta F_R - 10)$$

où ΔF_R est exprimé en MHz

(19) $$\Delta F_R = \frac{|f_1 - f_0| + |f_2 \mp f_0|}{2}$$

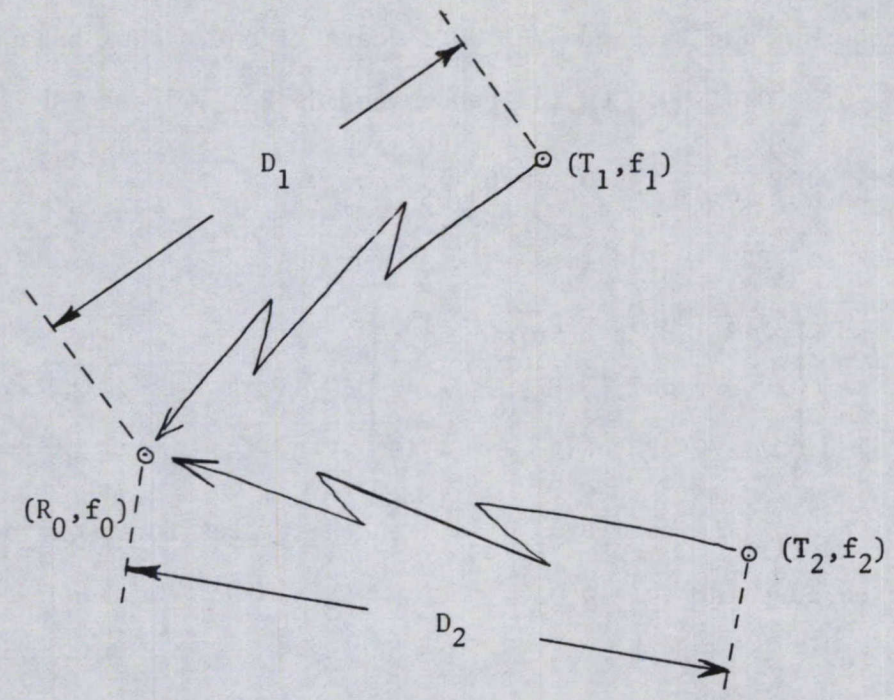


Figure 1. Intermodulation R_X

et pour i = 1 et 2

(20) $P_{IN,i} = ERP_i - P_{L,i}$

(21) $P_{L,i} = 28,2 + 20 \log F + 20 \log D_i$.

Comme il est facile de voir que

(22) $f_2 - f_1 = f_1 - f_0$,

on posera

(23) $\delta = |f_2 - f_1| \quad (= |f_1 - f_0|)$.

Avec cette définition la quantité ΔF_R dans (19) devient

(24) $\Delta F_R = 1,5\ \delta$.

On définit la distance D^R par l'équation

(25) $60 \log D^R = 2ERP_1 + ERP_2 - 60 \log F - P_{MIN} - 68,60 - 60 \log (1,5)$.

$40 \log D_1 + 20 \log D_2 + 60 \log \delta$

$20 \log D_1^2 + 20 \log D_2 + 20 \log \delta^3$

Avec cette définition la condition de non interférence (2)

(26) $20 \log (D_1^2 D_2 \delta^3) \geq 2ERP_1 + ERP_2 - 60 \log F - P_{MIN} - 68{,}60 - 60 \log (1{,}5)$

devient

(27) $D_1^{2/3} D_2^{1/3} \delta \geq D^R$.

Pour le VHF avec $F = 160$ MHz et $ERP_1 = ERP_2 = 23$

(28) $$D^R = \begin{cases} 0{,}670\ 587\ 453, & P_{MIN} = -132 \\ 0{,}911\ 567\ 340, & P_{MIN} = -140 \\ 1{,}239\ 144\ 889, & P_{MIN} = -148 \end{cases}.$$

La condition (27) fait intervenir les deux distances D_1 et D_2 et ne donne pas de borne inférieure sur celles-ci. Il est possible de remplacer la condition (27) par la condition plus forte

(29) $D_1 \geq D_\delta^R, \quad D_2 \geq D_{2\delta}^R$

où pour chaque écart de fréquences δ la distance D_δ^R (et à fortiori $D_{2\delta}^R$) est définie par

(30) $D_\delta^R = 2^{1/3} D^R/\delta = 1{,}259\ 9211\ D^R/\delta.$

On vérifiera facilement que (29) entraîne (27). On dira que la condition (29) est la <u>condition forte de non interférence par intermodulation</u> R_X.

On vérifiera facilement le tableau suivant

(31) $$2^{1/3} D^R = \begin{cases} 0{,}844\ 887\ 248, & P_{MIN} = -132 \\ 1{,}148\ 502\ 880, & P_{MIN} = -140 \\ 1{,}561\ 224\ 730, & P_{MIN} = -148 \end{cases}$$

et

(32) $$2^{1/3} D^R/0{,}03 = \begin{cases} 28{,}162\ 908\ 26, & P_{MIN} = -132 \\ 38{,}283\ 429\ 33, & P_{MIN} = -140 \\ 52{,}040\ 824\ 33, & P_{MIN} = -148 \end{cases}.$$

2.3 *Intermodulation* T_X ✓

Le phénomène d'intermodulation T_X se produit lorsque la fréquence f_2 de l'émetteur T_2 de la station 2 est reçue par le récepteur R_1 de la station 1 et qu'elle se combine avec la fréquence f_1 de l'émetteur T_1 pour produire une fréquence égale ou presqu'égale à

(33) $$f_0 = 2f_1 - f_2$$

correspondant à la fréquence nominale du récepteur R_0 d'une troisième station 0. Le phénomène est illustré par le schéma ci-dessous.

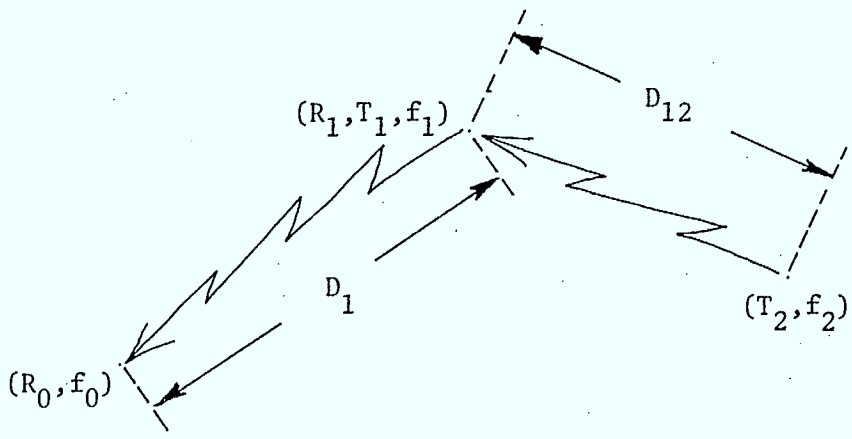


Figure 2. Intermodulation T_X

La condition de non interférence est toujours l'inégalité (2) avec

(34) $$P_{IN} = ERP_2 - P_{L,12} - P_{L,1} - OCR_I(\delta)$$

(35) $$P_{L,12} = 28{,}2 + 20 \log F_{MHz} + 20 \log D_{12}$$

(36) $$P_{L,1} = 28{,}2 + 20 \log F_{MHz} + 20 \log D_1$$

(37) $$OCR_I(\delta) = 57 \log (1{,}5+\delta) - 9{,}6 - 9 \log \delta,$$

où

(38) $$\delta = |f_2-f_1| \quad (= |f_1-f_0|).$$

Ceci donne

(39) $20 \log D_1 D_{12} \geq ERP_2 - P_{MIN} - 50,4 - 40 \log F - OCR_I(\delta)$.

En introduisant pour chaque $\delta > 0$ la distance D_δ^T

(40) $40 \log D_\delta^T = ERP_2 - P_{MIN} - 50,4 - 40 \log F - OCR_I(\delta)$,

alors la condition (39) s'exprime simplement par

(41) $D_1^{1/2} D_{12}^{1/2} \geq D_\delta^T$.

Il est aussi possible de transformer la condition (41) en une condition légèrement plus forte mais du type désensibilisation. En effet, pour qu'il n'y ait pas d'interférence du type intermodulation T_X, il suffit que

(42) $D_1 \geq D_\delta^T$ et $D_{12} \geq D_\delta^T$ (condition forte).

Si l'on substitue dans (40) la quantité $OCR_I(\delta)$ donnée par (37), on obtient

(43) $40 \log D_\delta^T = ERP_2 - P_{MIN} - 40 \log F - 40,8 - 57 \log (1,5+\delta) + 9 \log\delta$.

Si l'on regarde le comportement de D_δ^T en fonction de δ, on s'aperçoit que lorsque δ tend vers $+\infty$, le terme dominant est δ^{-57} et D_δ^T tend vers zéro; lorsque δ tend vers 0 le terme dominant est δ^9 et D_δ^T tend aussi vers zéro. La fonction $40 \log D_\delta^T$ (et à fortiori la fonction D_δ^T) possède un maximum au point

(44) $\bar{\delta} = 13,5/48 = 0,2812$ MHz.

Pour $ERP_2 = 23$ dBW et $F = 160$ MHz le maximum $D_{\bar{\delta}}^T$ de D_δ^T est donné dans le tableau suivant

P_{MIN}	-132	-140	-148
$D_{\bar{\delta}}^T$ (km)	1,477 893	2,342 302	3,712 298

Nous appelerons la condition (42), condition forte de non interférence par intermodulation T_X.

3. RELATIONS ENTRE LES DIFFERENTES REGLES DE NON INTERFERENCE

Pour résumer les résultats précédents nous avons établi quatre conditions de non interférence:

Adjacence $D \geq D^A_{\Delta f}$, (2.10)

Désensibilisation $D \geq D^D_\delta$, $0{,}0125 \leq \delta \leq 10$, (2.14)

Intermodulation R_X $D_1^{2/3} D_2^{1/3} \delta \geq D^R$ (2.27)

Intermodulation T_X $D_1^{1/2} D_{12}^{1/2} \geq D^T_\delta$ (2.41)

Les deux dernières conditions possèdent leur version forte

Intermodulation R_X forte $D_1 \geq D^R_\delta$ et $D_2 \geq D^R_{2\delta}$ (2.29)

Intermodulation T_X forte $D_1 \geq D^T_\delta$ et $D_{12} \geq D^T_\delta$ (2.42)

Dans ce paragraphe nous allons déterminer dans quels intervalles d'écart de fréquence δ une condition est plus forte que l'autre. Nous allons aussi chercher les points d'intersection des courbes D^D_δ, D^T_δ et D^R_δ.

Enfin, à la lumière de ces considérations, nous allons déterminer des ensembles de conditions de non interférence pour les valeurs de P_{MIN} égales à -132, -140 et -148.

3.1 *Intermodulation R_X et désensibilisation*

On suppose que la condition de désensibilisation (2.14) est vérifiée pour δ entre 0,0125 et 10 et l'on cherche les δ pour lesquels cette condition implique que la condition de non interférence par intermodulation R_X (2.27) est vérifiée:

(1) $D_1 \geq D^D_\delta$, $D_2 \geq D^D_{2\delta} \Rightarrow D_1^{2/3} D_2^{1/3} \delta \geq D^R$.

Pour que ceci se produise il suffit que

(2) $(D^D_\delta)^{2/3} (D^D_{2\delta})^{1/3} \delta \geq D^R$.

En effet

(3) $\quad D_1^{2/3} D_2^{1/3} \delta \;\geq\; (D_\delta^D)^{2/3} (D_{2\delta}^D)^{1/3} \delta \;\geq\; D^R$.

La condition (2) est équivalente à

(4) $\quad f(\delta) \;\leq\; 0$

où

(5) $\quad f(\delta) \;=\; 60 \log\{D^R / [(D_\delta^D)^{2/3} (D_{2\delta}^D)^{1/3} \delta]\}.$

En utilisant les définitions (2.13) et (2.25) de D_δ^D, $D_{2\delta}^D$ et D^R,

(6) $\quad f(\delta) \;=\; 2[OCR(\delta)] + OCR(2\delta) - 60 \log \delta + 2P_{MIN} - 2 - 60 \log (1{,}5).$

Comme la fonction $OCR_D(\delta)$ est définie par (2.12) en trois morceaux, il faut considérer cinq cas:

(i) $\quad 0{,}0125 \leq \delta < 0{,}02$ et $0{,}0125 \leq 2\delta < 0{,}02 \;\Rightarrow$ impossible

(ii) $\quad 0{,}0125 \leq \delta < 0{,}02$ et $0{,}02 \leq 2\delta < 0{,}4 \;\Rightarrow\; 0{,}0125 \leq \delta < 0{,}02$

(iii) $\quad 0{,}02 \leq \delta < 0{,}4$ et $0{,}02 \leq 2\delta < 0{,}4 \;\Rightarrow\; 0{,}02 \leq \delta < 0{,}2$

(iv) $\quad 0{,}02 \leq \delta < 0{,}4$ et $0{,}4 \leq 2\delta < 10 \;\Rightarrow\; 0{,}2 \leq \delta < 0{,}4$

(v) $\quad 0{,}4 \leq \delta \leq 10$ et $0{,}4 \leq 2\delta \leq 10 \;\Rightarrow\; 0{,}4 \leq \delta \leq 5.$

Nous allons maintenant déterminer les zéros δ^{DR} de la fonction $f(\delta)$ et trouver dans quelle région elle est négative ou zéro.

(ii) $\quad \underline{0{,}0125 \leq \delta < 0{,}02}$

$$f(\delta) \;=\; 2[451 + 221 \log\delta] + 85{,}5 + 6{,}3 \log (2\delta) - 60 \log(\delta) - 60 \log (1{,}5) - 2 + 2P_{MIN}$$

$$= \; 976{,}831\,0135 + 388{,}3 \log\delta + 2P_{MIN}$$

$$f(\delta) \leq 0 \iff \log\delta \leq \frac{-2P_{MIN} - 976{,}831}{388{,}3} = \log \delta^{DR}$$

$$\Leftrightarrow \; \delta \leq \delta^{DR}.$$

P_{MIN}	-118,93	-132	-140	-148	-157,899	-158,56
δ^{DR}	0,0125	0,014596	0,016048	0,017646	0,0198438	0,02

(iii) $\underline{0,02 \leq \delta < 0,2}$

$$f(\delta) = 2[85,5 + 6,3 \log\delta] + 85,5 + 6,3 \log(2\delta) - 60 \log\delta - 60 \log (1,5) - 2 + 2P_{MIN}$$

$$= 245,831\ 0135 - 41,1 \log\delta + 2P_{MIN}$$

$$f(\delta) \leq 0 \Leftrightarrow \log\delta \geq \frac{2P_{MIN} + 245,831}{41,1} = \log \delta^{DR}$$

$$\Leftrightarrow \delta \geq \delta^{DR}$$

P_{MIN}	-157,8993	-157,829	-148	-140	-137,290 7709	-137,279
δ^{DR}	0,0198438	0,02	0,060165	0,14745	0,199744	0,2

(iv) $\underline{0,2 \leq \delta < 0,4}$

$$f(\delta) = 2[85,5 + 6,3 \log\delta] + 96,1 + 32,9 \log(2\delta) - 60 \log\delta - 60 \log (1,5) - 2 + 2P_{MIN}$$

$$= 264,438\ 4114 - 14,5 \log\delta + 2P_{MIN}$$

$$f(\delta) \leq 0 \Leftrightarrow \log\delta \geq \frac{2P_{MIN} + 264,438}{14,5} = \log\delta^{DR}$$

$$\Leftrightarrow \delta \geq \delta^{DR}$$

P_{MIN}	-148	-140	-137,2907709	-137,28	-137	-136	-135,1083035	-135,104
δ^{DR}	0,006657	0,084481	0,199744010	0,2	0,2190	0,3009	0,3994880	0,4

Ici la condition de non interférence n'est jamais vérifiée pour

$$P_{MIN} > -135,108;$$

par contre elle est toujours vérifiée pour $0,2 \leq \delta < 0,4$ si

$$P_{MIN} \leq -137,29.$$

Entre les deux, elle est vérifiée pour δ entre δ^{DR} et 0,4

$$-137,29 \leq P_{MIN} < -135,108 \Rightarrow 0,2 < \delta^{DR} \leq \delta \leq 0,4.$$

(v) $\underline{0,4 \leq \delta \leq 5}$

$$f(\delta) = 2[96,1 + 32,9 \log\delta] + 96,1 + 32,9 \log(2\delta) - 60 \log\delta - 60 \log(1,5) - 2 + 2P_{MIN}$$

$$= 285,638\,4114 + 38,7 \log\delta + 2P_{MIN}$$

$$f(\delta) \leq 0 \Leftrightarrow \log\delta \leq \frac{-285,638 - 2P_{MIN}}{38,7} = \log \delta^{DR}$$

$$\Leftrightarrow \delta \leq \delta^{DR}$$

P_{MIN}	-135,108 035	-135,119	-140	-148	-156,344
δ^{DR}	0,399 4880	0,4	0,7150	1,8525	5

La condition de non interférence est vérifiée pour $0,4 \leq \delta \leq 5$ si

$$P_{MIN} \leq -156,344;$$

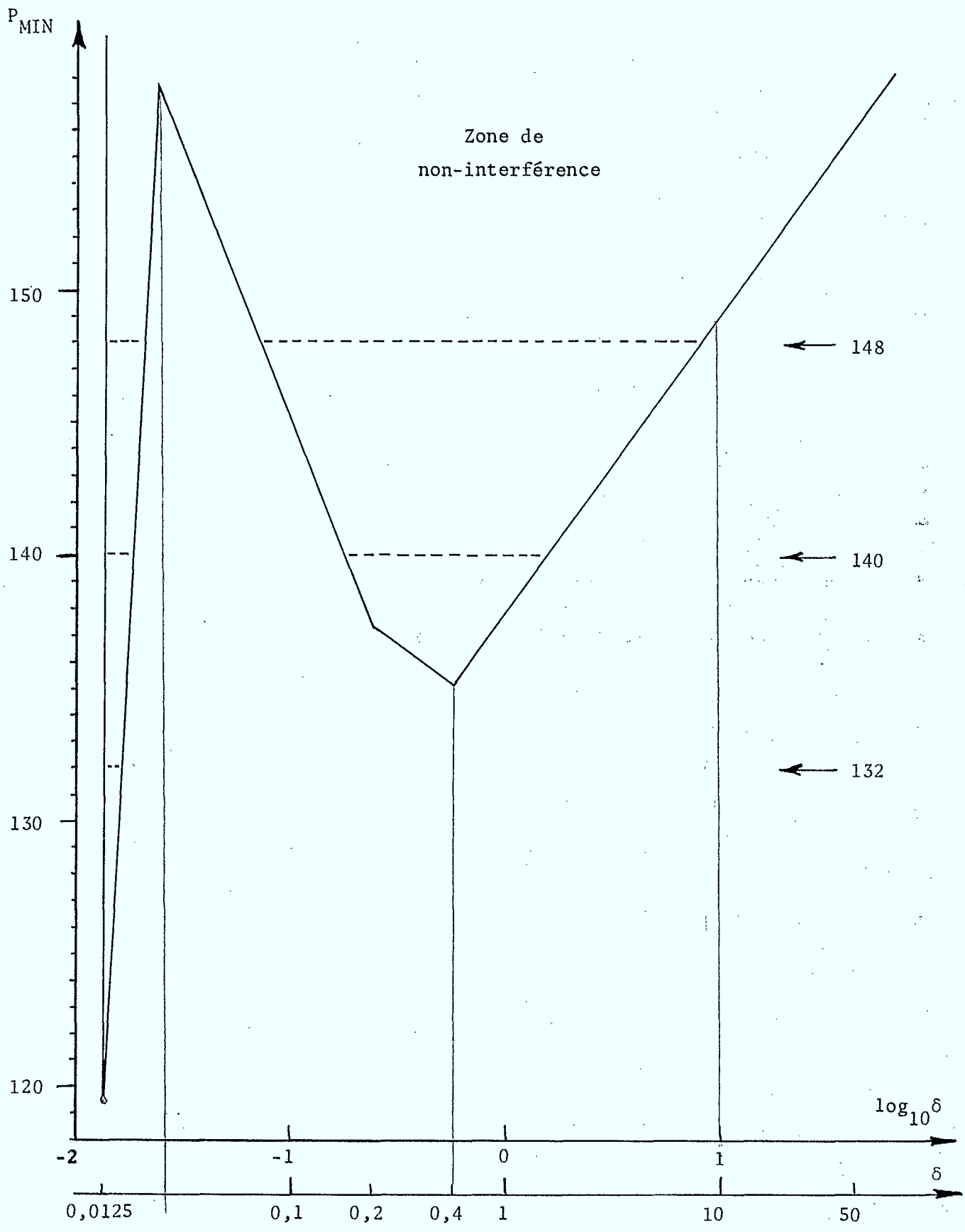
par contre, elle n'est jamais vérifiée pour

$$P_{MIN} > -135,108.$$

Entre les deux elle est vérifiée pour

$$0,4 \leq \delta \leq \delta^{DR} \leq 5.$$

On résume les résultats dans le schéma suivant.



Zone de non interférence en fonction de δ et P_{MIN}

Si la condition (2.14) de non interférence par désensibilisation est satisfaite alors la condition (2.27) de non interférence par intermodulation R_X sera vérifiée dans les cas suivants.

$0,0125 \leq \delta < 0,0198438$	$-2P_{MIN} \geq 976,8310135 + 388,3 \log\delta$
$0,0198438 \leq \delta < 0,199744$	$-2P_{MIN} \geq 245,8310135 - 41,1 \log\delta$
$0,199744 \leq \delta < 0,399488$	$-2P_{MIN} \geq 264,4384114 - 14,5 \log\delta$
$0,399488 \leq \delta \leq 5$	$-2P_{MIN} \geq 285,6384114 + 38,7 \log\delta$

Pour les niveaux P_{MIN} = -132, -140 et -148, on a les résultats suivants:

P_{MIN}	
-132	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0146 = \delta^{DR}$
-140	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0160 = \delta_1^{DR}$
	$\delta_2^{DR} = 0,1474 \leq \delta \leq 0,715 = \delta_3^{DR}$
-148	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0176 = \delta_1^{DR}$
	$\delta_2^{DR} = 0,060165 \leq \delta \leq 1,852 = \delta_3^{DR}$

Tableau des δ^{DR} en fonction de P_{MIN}.

3.2 *Intermodulation T_X et désensibilisation*

On suppose que la condition de désensibilisation (2.14) est vérifiée pour δ entre 0,0125 et 10 et l'on cherche les δ pour lesquels cette condition implique que la condition (2.41) de non interférence par intermodulation T_X est vérifiée:

(7) $\quad D_1 \geq D_\delta^D \quad \text{et} \quad D_{12} \geq D_\delta^D \Rightarrow D_1^{1/2} D_{12}^{1/2} \geq D_\delta^T .$

Pour que ceci soit vrai il suffit que

(8) $\quad D_\delta^D \geq D_\delta^T.$

En effet

$$D_1^{1/2} D_{12}^{1/2} \geq (D_\delta^D)^{1/2} (D_\delta^D)^{1/2} = D_\delta^D \geq D_\delta^T .$$

Ceci est équivalent à trouver les points d'intersection des courbes D_δ^D et D_δ^T.

La condition (8) est équivalente à

(9) $\quad f(\delta) \leq 0,$

où

(10) $\quad f(\delta) = 40 \log[D_\delta^T / D_\delta^D].$

En utilisant les définitions (2.13) et (2.40) de D_δ^D et D_δ^T

(11) $\quad f(\delta) = 2[OCR(\delta)] - OCR_I(\delta) - 6 + P_{MIN} - ERP, \quad 0,0125 \leq \delta \leq 10.$

On peut vérifier que cette fonction est strictement croissante et possède au plus un zéro δ^{DT} pour $\delta > 0$ et que, dans ce cas,

(12) $\quad f(\delta) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \delta \leq \delta^{DT}.$

Pour ERP = 23 on obtient les chiffres suivants

P_{MIN}	-132	-140	-148
δ^{DT}	0,479151	0,653732	0,911522
$D^T_{\delta^{DT}}$	1,433850	2,160463	3,140962

La condition de non interférence (2.41) par intermodulation T_X n'a donc besoin d'être vérifiée que pour tous les δ tels que

(13) $\quad 0{,}0125 > \delta \quad$ ou $\quad \delta > \delta^{DT}$.

Dans ce qui suit on ne gardera la condition (2.41) que pour les valeurs de δ spécifiées dans (13).

3.3 *Intersection des courbes* D_δ^D *et* D_δ^R.

On cherche à déterminer les $\delta > 0$ tels que

(14) $\quad D_\delta^R \geq D_\delta^D \Leftrightarrow 60 \log(D_\delta^D / D_\delta^R) \leq 0.$

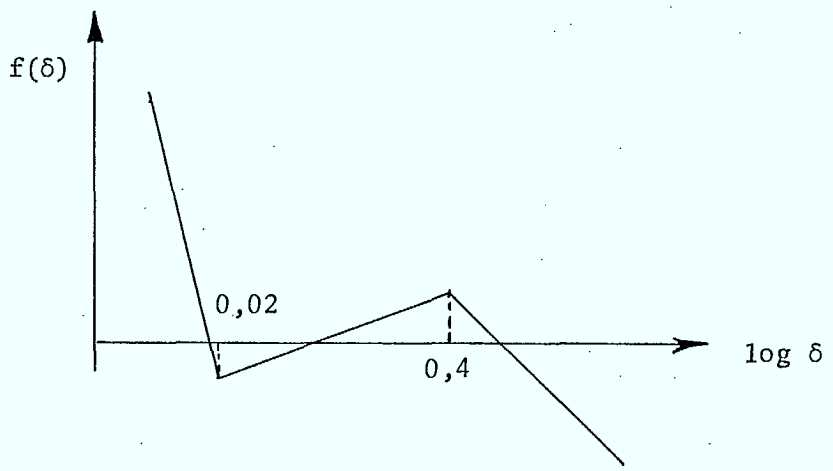
On définit la fonction

(15) $\quad f(\delta) = 60 \log D_\delta^D - 60 \log D_\delta^R, \quad 0{,}0125 \leq \delta \leq 10$

et l'on vérifie que

(16) $\quad f(\delta) = -2P_{MIN} + 2 + 60 \log(1{,}5) - 20 \log 2 + 60 \log\delta - 3[OCR_D(\delta)].$

La fonction $f(\delta)$ est linéaire en $\log \delta$ dans chacune des trois régions de définition de $OCR_D(\delta)$. La pente change de négative à positive en 0,02 et de positive à négative en 0,4 comme illustré ci-dessous.



Cette courbe aura au plus trois zéros δ_F^{DR} selon la valeur du paramètre P_{MIN}. On résume les résultats dans le tableau ci-dessous

P_{MIN}	-132	-140	-148
zéros δ_F^{DR} et signe de $f(\delta)$	+	+	+
	0,016 028 161	0,017 037 964	0,018 111 387
	-	-	-
		0,185 772 373	0,075 803 058
		+	+
		0,900 840 594	2,333 912 880
		-	-

Zéros δ_F^{DR} et signe de la fonction $f(\delta)$

On se souviendra que

(17) $\quad D_\delta^R \geq D_\delta^D \Leftrightarrow f(\delta) \leq 0.$

L'indice "F" est associé avec le fait que les zéros δ_F^{DR} sont associés avec la condition (14) qui est une condition de non interférence forte si on la compare avec la condition (2)

$$(D_\delta^D)^{2/3}(D_{2\delta}^D)^{1/3}\delta \geq D^R.$$

3.4 *Intersection des courbes* D_δ^R *et* D_δ^T

On cherche à déterminer les $\delta > 0$ tels que

(18) $\quad D_\delta^T \geq D_\delta^R \Leftrightarrow 120[\log D_\delta^R - \log D_\delta^T] \leq 0.$

On définit la fonction

(19) $\quad f(\delta) = 120 \log D_\delta^R - 120 \log D_\delta^T, \qquad \delta > 0$

et on vérifie à l'aide de (2.43), (2.25) et (2.30) que

(20) $f(\delta) = 3ERP + P_{MIN} - 147 \log\delta + 171 \log (1,5+\delta) - 14,8 + 40 \log 2 - 120 \log (1,5)$.

La fonction $f(\delta)$ tend vers $+\infty$ lorsque δ tend vers $+\infty$ ou 0. Sa dérivée

$$f'(\delta) = \frac{-147}{\delta} + \frac{171}{1,5+\delta}$$

s'annulle en

(21) $\delta^o = 9,1875$

où la fonction passe par un minimum.

Pour $-P_{MIN}$ assez grand, $f(\delta^o)$ est négative et la fonction $f(\delta)$ possède deux zéros δ^{TR}_{Fm} et δ^{TR}_{FM}

(22) $\delta^{TR}_{Fm} \leq \delta^o \leq \delta^{TR}_{FM}$.

La fonction $f(\delta)$ est négative entre ces zéros et positive à l'extérieur de cet intervalle

δ		δ^{TR}_{Fm}		δ^{TR}_{FM}	
$f(\delta)$	+	0	-	0	+
	$D^T_\delta < D^R_\delta$	$D^T_\delta = D^R_\delta$	$D^T_\delta > D^R_\delta$	$D^T_\delta = D^R_\delta$	$D^T_\delta < D^R_\delta$

P_{MIN}	δ^{TR}_{Fm}	δ^{TR}_{FM}
-132	0,61171	4 161,91
-140	0,50936	8 978,9
-148	0,42837	19 356,8

Points d'intersection des courbes D^R_δ et D^T_δ en fonction de P_{MIN}

3.5 *Intermodulation R_X et intermodulation T_X forte*

On suppose que la condition de non interférence forte (2.42) par intermodulation T_X est vérifiée et l'on cherche les $\delta > 0$ pour lesquels

(23) $\quad (D_\delta^T)^{2/3}(D_{2\delta}^T)^{1/3}\delta \geq D^R.$

Si les distances D_1 et D_2 sont telles que

(24) $\quad D_1 \geq D_\delta^T, \quad D_2 \geq D_{2\delta}^T$

alors il est facile de vérifier que si (23) est vraie

$$D_1^{2/3}D_2^{1/3}\delta \geq (D_\delta^T)^{2/3}(D_{2\delta}^T)^{1/3}\delta \geq D^R.$$

La condition (23) est donc complètement équivalente à la condition

$$60 \log\{D^R/[(D_\delta^T)^{2/3}(D_{2\delta}^T)^{1/3}\delta]\} \leq 0$$

ou en introduisant la fonction

(25) $\quad g(\delta) = 60 \log D^R - 40 \log D_\delta^T - 20 \log D_{2\delta}^T - 60 \log\delta$

à l'inégalité

(26) $\quad g(\delta) \leq 0.$

En utilisant (2.43) et (2.25) la fonction g s'exprime comme

(27) $\quad g(\delta) = \dfrac{3ERP+P_{MIN}}{2} - 7,4 - 60 \log (1,5) - 4,5 \log 2$

$$+ 28,5 \log (1,5+2\delta)(1,5+\delta)^2 - 73,5 \log\delta .$$

La dérivée de cette fonction g est donnée par

$$g'(\delta) = \frac{-73,5}{\delta} + \frac{57}{1,5+2\delta} + \frac{57}{1,5+\delta} = \frac{24\delta^2-159,75\delta-165,375}{\delta(1,5+\delta)(1,5+2\delta)} .$$

Cette dérivée est zéro en deux points

$$\delta_1 = 7,566879655 \quad \text{et} \quad \delta_2 = -0,9106297.$$

On vérifiera aussi que $g(\delta)$ tend vers $+\infty$ lorsque δ tend vers 0 ou $+\infty$.

La fonction $g(\delta)$ possède donc un minimum en δ. Comme ce δ_1 est indépendant de ERP et P_{MIN}, on vérifiera aisément que

$$g(\delta) \leq 0 \Leftrightarrow 3ERP+P_{MIN} \leq 10,9056540 .$$

Pour ERP = 23

$$g(\delta) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -P_{MIN} \geq 79,90.$$

Cette condition sera toujours vérifiée pour les P_{MIN} considérés ici. Il y aura donc toujours deux solutions

$$\delta_m^{TR} < \delta_M^{TR}$$

à l'équation $g(\delta) = 0$ et

(28) $$g(\delta) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_m^{TR} \leq \delta \leq \delta_M^{TR}$$

P_{MIN}	-132	-140	-148
δ_m^{TR}	0,49535	0,4114	0,350
δ_M^{TR}	3302	7127	15 365
δ_{Fm}^{TR}	0,611	0,509	0,428
δ_{FM}^{TR}	4161,9	8978,9	19356,8

On s'aperçoit que pour P_{MIN} égal à -132, -140 et -148,

(29) $$\delta_m^{TR} < \delta_{FM}^{TR} < \delta_M^{TR} < \delta_{FM}^{TR} .$$

3.6 *Intermodulation R_X et désensibilisation combinée avec intermodulation T_X forte*

Nous nous plaçons dans le cas où la condition (2.14) de désensibilisation et la condition forte de non interférence (2.42) par intermodulation T_X sont vérifiées:

(30) $$D \geq D_\delta^{DT}$$

où

$$(31) \qquad D_\delta^{DT} = \begin{cases} \max\{D_\delta^D, D_\delta^T\}, & 0{,}0125 \le \delta \le 10 \\ D_\delta^T, & \delta > 10. \end{cases}$$

En utilisant le point d'intersection δ^{DT}, la fonction maximum D_δ^{DT} des courbes D_δ^D et D_δ^T s'écrit

$$(32) \qquad D_\delta^{DT} = \begin{cases} D_\delta^D, & 0{,}0125 \le \delta \le \delta^{DT} \\ D_\delta^T, & \delta^{DT} < \delta \end{cases}$$

puisque pour $-P_{MIN} = 132,140,148$

$$(33) \qquad 0{,}4 \le \delta^{DT} \le 10.$$

On cherche les $\delta > 0$ pour lesquels

$$(34) \qquad (D_\delta^{DT})^{2/3} (D_{2\delta}^{DT})^{1/3} \delta \ge D^R.$$

Dans ce cas si

$$(35) \qquad D_1 \ge D_\delta^{DT} \quad \text{et} \quad D_2 \ge D_{2\delta}^{DT}$$

on aura

$$D_1^{2/3} D_2^{1/3} \delta \ge (D_\delta^{DT})^{2/3} (D_{2\delta}^{DT})^{1/3} \delta \ge D^R$$

et la condition de non interférence (2.27) par intermodulation R_X sera vérifiée. Pour trouver les $\delta \ge 0$ satisfaisant (34) il faut considérer trois cas

$$(i) \qquad 0{,}0125 \le \delta \le \frac{\delta^{DT}}{2} \Rightarrow (D_\delta^D)^{2/3} (D_{2\delta}^D)^{1/3} \delta \ge D^R$$

$$(ii) \qquad \frac{\delta^{DT}}{2} \le \delta \le \delta^{DT} \Rightarrow (D_\delta^D)^{2/3} (D_{2\delta}^T)^{1/3} \delta \ge D^R$$

$$(iii) \qquad \delta^{DT} \le \delta \Rightarrow (D_\delta^T)^{2/3} (D_{2\delta}^T)^{1/3} \delta \ge D^R .$$

Le premier cas (i) est connu: c'est la condition (2) du paragraphe 3.1.

P_{MIN}	condition (2)	$\delta^{DT}/2$	condition (i)
-132	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0146$	0,2395	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0146$
-140	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0160$ $0,1474 \leq \delta \leq 0,715$	0,3268	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0160$ $0,1474 \leq \delta \leq 0,3268$
-148	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0176$ $0,060165 \leq \delta \leq 1,852$	0,4557	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0176$ $0,060165 \leq \delta \leq 0,4557$

Le dernier cas (iii) est aussi connu. C'est la condition (23) du paragraphe 3.5.

P_{MIN}	condition (23)	δ^{DT}	condition (iii)
-132	$0,49535 \leq \delta \leq 3302$	0,479151	$0,49535 \leq \delta \leq 3302$
-140	$0,4114 \leq \delta \leq 7127$	0,653732	$0,653732 \leq \delta \leq 7127$
-148	$0,350 \leq \delta \leq 15365$	0,911522	$0,911522 \leq \delta \leq 15365$

Il ne reste plus qu'à s'occuper du cas (ii)

$$(36) \qquad (D_{\delta}^{D})^{2/3}(D_{2\delta}^{T})^{1/3}\delta \geq D^{R}, \qquad \frac{\delta^{DT}}{2} \leq \delta \leq \delta^{DT}.$$

Cette condition est équivalente à

$$(37) \qquad 60 \log\{D^{R}/[(D_{\delta}^{D})^{2/3}(D_{2\delta}^{T})^{1/3}\delta]\} \leq 0.$$

On définit la fonction

$$(38) \qquad f(\delta) = 60 \log D^{R} - 40 \log D_{\delta}^{D} - 20 \log D_{2\delta}^{T} - 60 \log\delta .$$

Chercher δ tel que la condition (36) soit satisfaite est équivalent à chercher δ tel que

$$(39) \qquad f(\delta) \leq 0, \quad \frac{\delta^{DT}}{2} \leq \delta \leq \delta^{DT}.$$

A l'aide des équations (2.25), (2.13), et (2.40) pour D^R, D^D_δ et $D^T_{2\delta}$ on peut exprimer $f(\delta)$ comme

$$(40) \qquad f(\delta) = \frac{3P_{MIN}+ERP}{2} - 3,8 - 60 \log(1,5) - 4,5 \log 2$$

$$20CR_D(\delta) - 64,5 \log\delta + 28,5 \log(1,5+2\delta)$$

$$(3,8 + 60 \log (1,5) + 4,5 \log 2 \quad = 15,720\ 110\ 53).$$

P_{MIN}	$f(\delta) \leq 0$	$\delta^{DT}/2$	δ^{DT}	condition (39)
-132	$0,394 \leq \delta \leq 0,418$	0,2395	0,4791	$0,394 \leq \delta \leq 0,418$
-140	$0,210 \leq \delta \leq 2,11$	0,3268	0,6537	$0,3268 \leq \delta \leq 0,6537$
-148	$0,116 \leq \delta \leq 6,42$	0,4557	0,9115	$0,4557 \leq \delta \leq 0,9115$

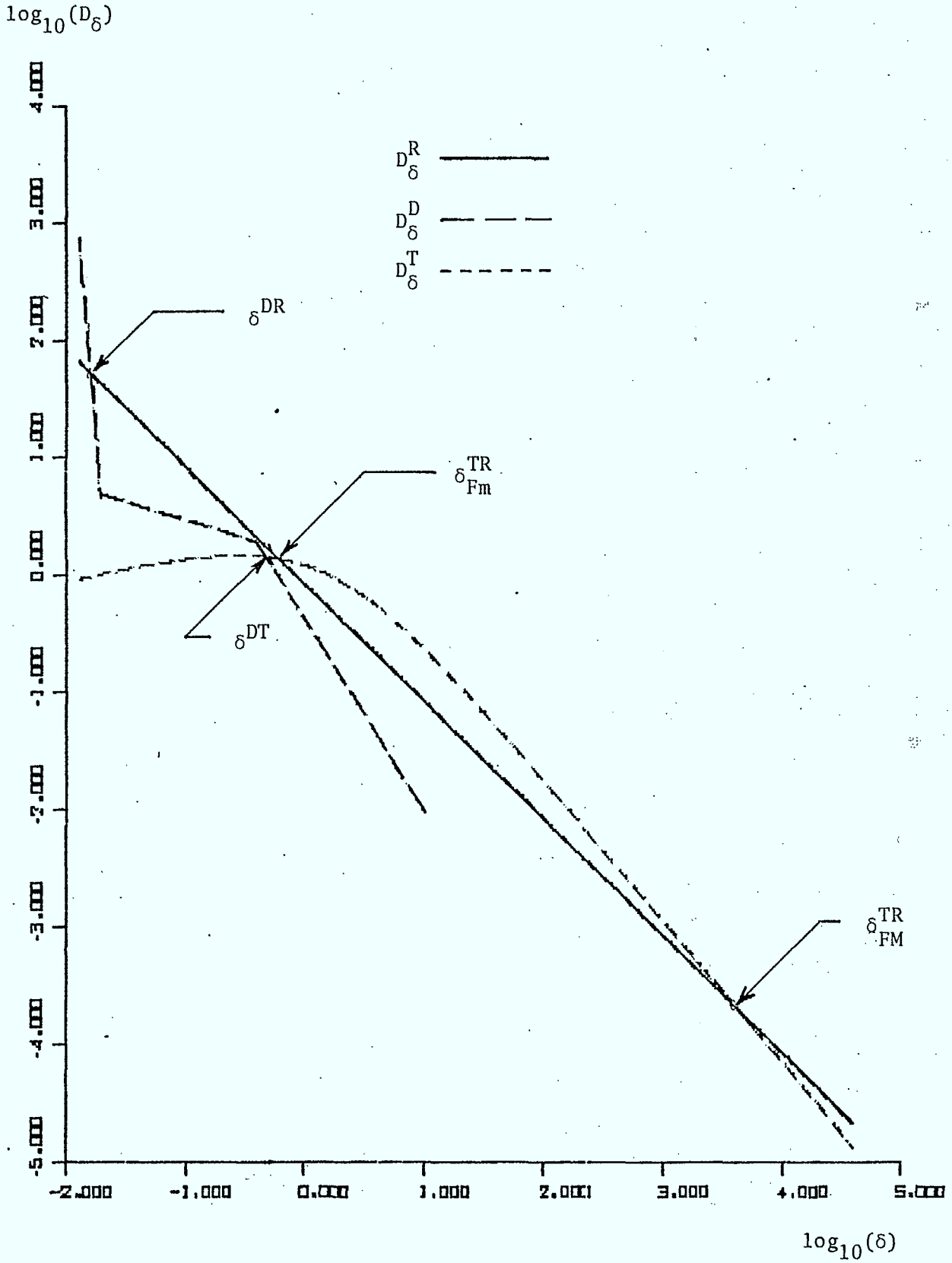
En regroupant les trois cas, on obtient le tableau suivant qui indique les régions dans lesquelles la condition de non interférence par désensibilisation combinée à la condition forte de non interférence par intermodulation T_X entraîne que la condition de non interférence par intermodulation R_X est vérifiée pour δ dans ces régions.

P_{MIN}	conditions (i), (ii) et (iii)		
-132	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0146$	$0,394 \leq \delta \leq 0,418$	$0,49535 \leq \delta \leq 3302$
-140	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0160$	$0,1474 \leq \delta \leq 7127$	
-148	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0176$	$0,060165 \leq \delta \leq 15365$	

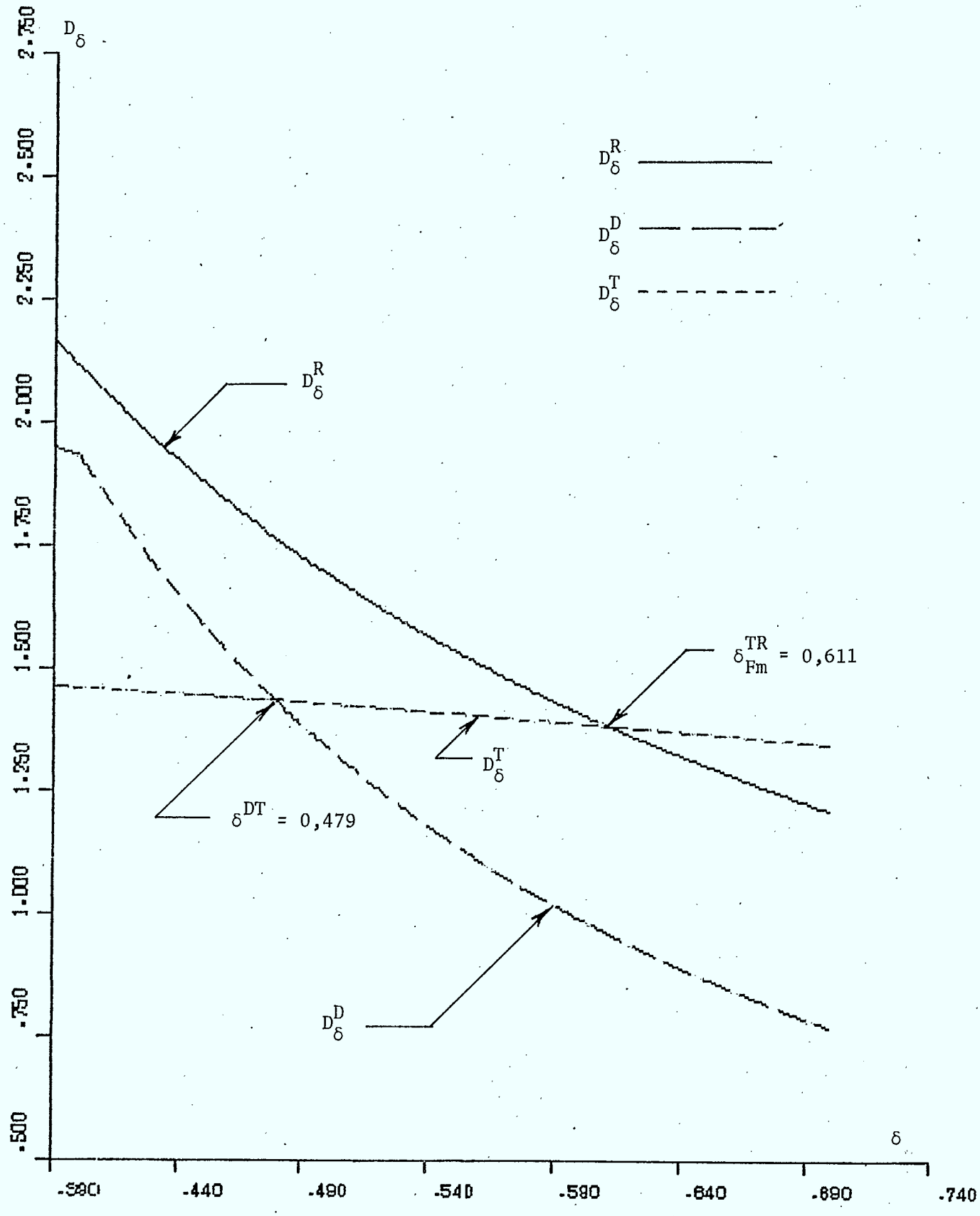
3.7 *Résumé des points d'intersection*

On ne considère que les cas P_{MIN} = -132, -140 et -148. Le cas P_{MIN} = -132 est légèrement différent des cas P_{MIN} = -140 et -148 comme on le verra sur les graphiques.

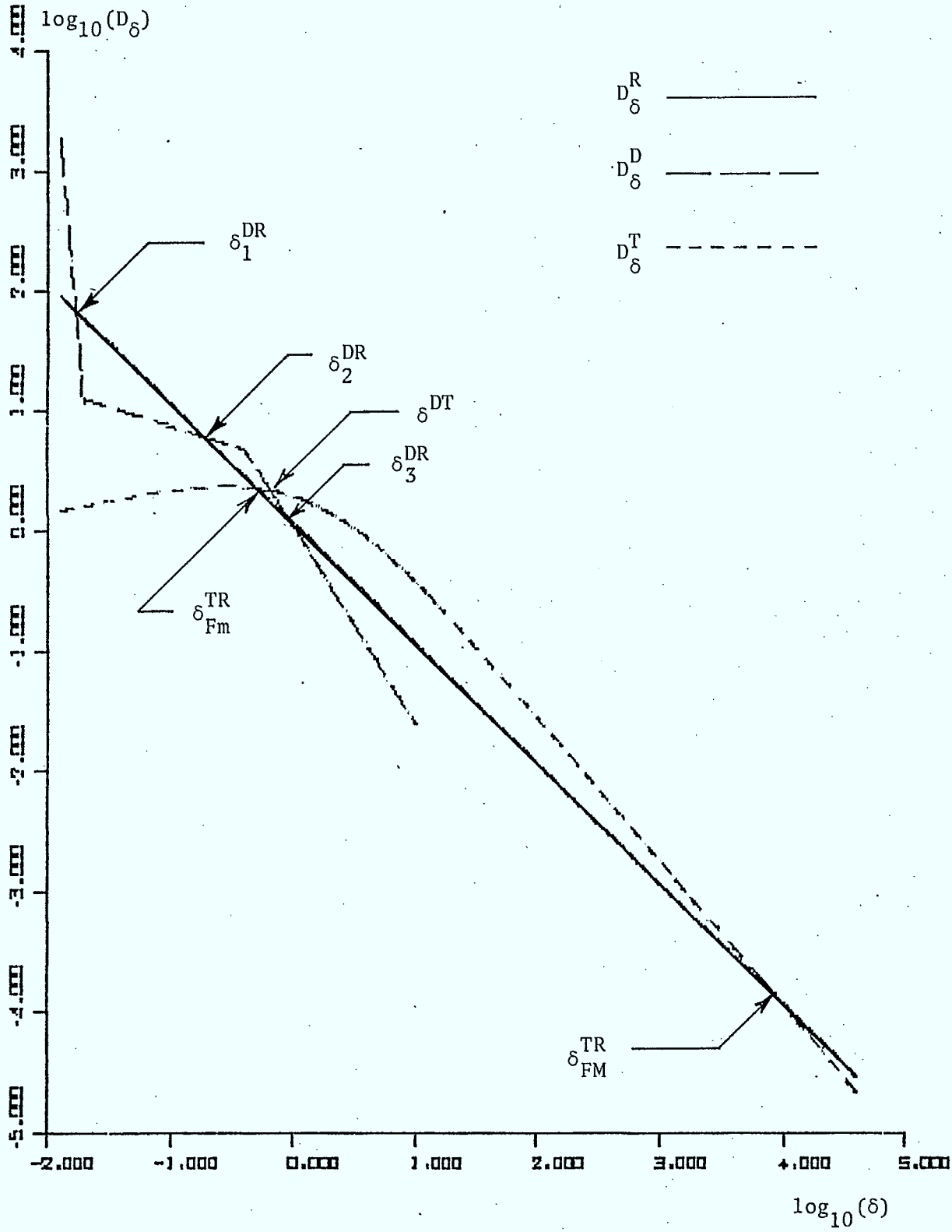
P_{MIN} = -132	P_{MIN} = -140	P_{MIN} = -148
0,0125	0,0125	0,0125
δ^{DR} = 0,0146	δ_1^{DR} = 0,0160	δ^{DR} = 0,0176
δ_F^{DR} = 0,0160	δ_{F1}^{DR} = 0,0170	δ_{F1}^{DR} = 0,0181
0,02	0,02	0,02
	δ_2^{DR} = 0,1474	δ_2^{DR} = 0,0601
	δ_{F2}^{DR} = 0,1857	δ_{F2}^{DR} = 0,0758
	$2\delta_2^{DR}$ = 0,2948	$2\delta_2^{DR}$ = 0,1202
0,394		δ_m^{TR} = 0,350
0,4	0,4	0,4
0,418	δ_m^{TR} = 0,4114	
	δ_{Fm}^{TR} = 0,509	δ_{Fm}^{TR} = 0,428
δ^{DT} = 0,479	δ^{DT} = 0,653	δ^{DT} = 0,911
δ_m^{TR} = 0,495	δ_3^{DR} = 0,715	δ_3^{DR} = 1,852
δ_{Fm}^{TR} = 0,611	δ_{F3}^{DR} = 0,901	δ_{F3}^{DR} = 2,333
10	10	10
δ_M^{TR} = 3302	δ_M^{TR} = 7127	δ_M^{TR} = 15365
	δ_{FM}^{TR} = 8978	δ_{FM}^{TR} = 19356



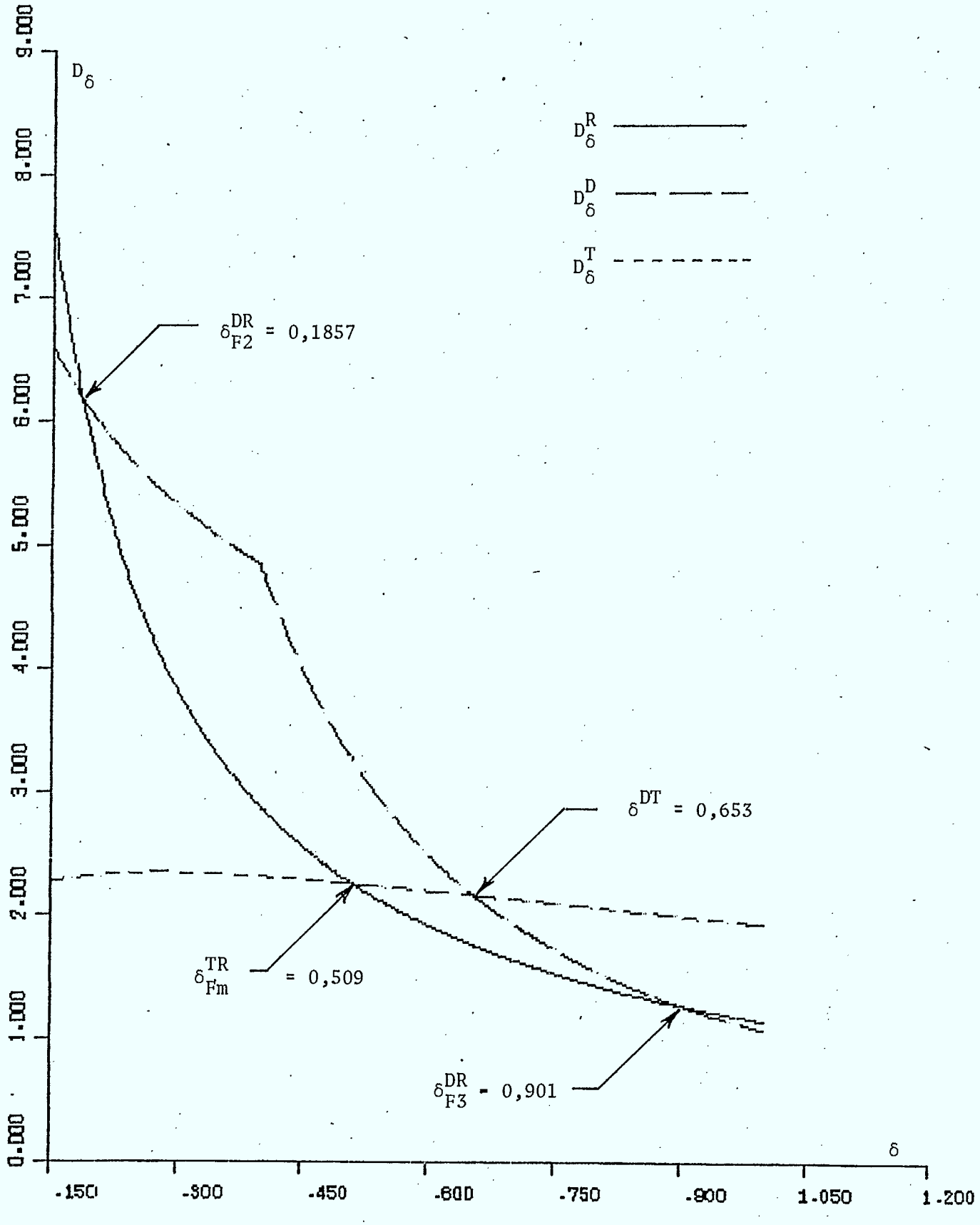
Courbes D_δ^D, D_δ^R et D_δ^T pour P_{MIN} = -132



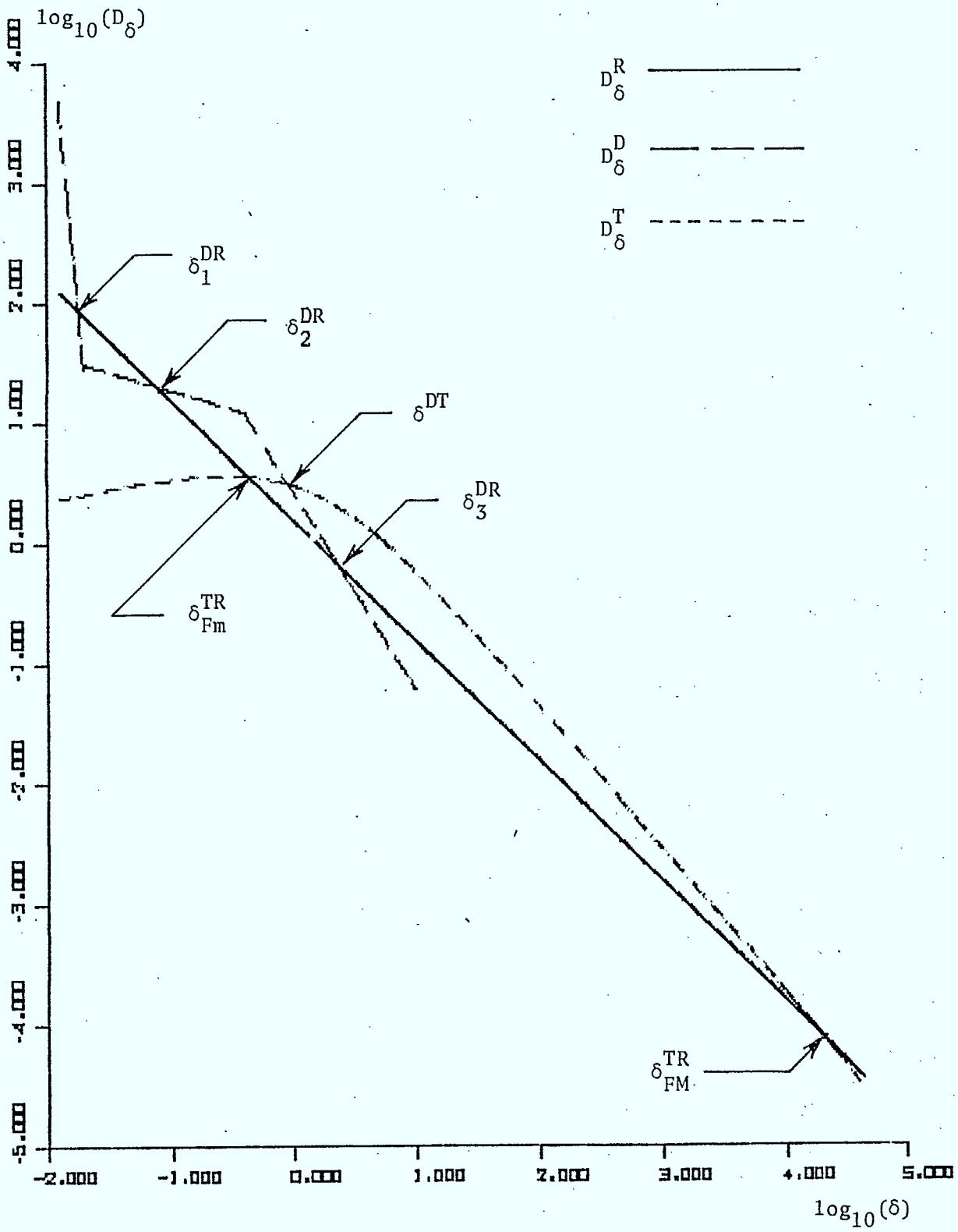
Agrandissement des courbes D_δ^D, D_δ^R et D_δ^T pour P_{MIN} = -132.



Courbes D_δ^D, D_δ^R et D_δ^T pour P_{MIN} = -140



Agrandissement des courbes D_δ^D, D_δ^R et D_δ^T pour P_{MIN} = -140



Courbes D_δ^D, D_δ^R et D_δ^T pour $P_{MIN} = -148$.

4. ENSEMBLES DE CONDITIONS DE NON INTERFERENCE

Au paragraphe 3 nous avons comparé les quatre conditions de non interférence et étudié l'effet qu'elles avaient les unes sur les autres. A la lumière de ces résultats nous définissons deux ensembles de conditions suffisantes de non interférence: les conditions faibles et les conditions fortes. Nous spécialiserons aussi au cas de la bande VHF tous ces résultats. Enfin nous donnons un algorithme pour la vérification des conditions de non interférence par intermodulation R_X.

4.1 *Conditions de non interférence*

Dans ce paragraphe nous faisons le résumé de l'effet des conditions de désensibilisation sur les conditions de non interférence par intermodulation R_X et T_X. Nous définissons ensuite les ensembles de conditions suffisantes faibles et fortes.

4.1.1 *Effet des conditions de désensibilisation sur les conditions de non interférence par intermodulation.*

Lorsque la condition de non interférence (2.14) par désensibilisation est vérifiée

(i) les conditions de non interférence (2.27) par intermodulation R_X sont automatiquement vérifiées pour les écarts de fréquence δ indiqués dans le tableau ci-dessous

P_{MIN}		
-132	$0{,}0125 \leq \delta \leq \delta^{DR} = 0{,}0146$	
-140	$0{,}0125 \leq \delta \leq \delta_1^{DR} = 0{,}0160$	$\delta_2^{DR} = 0{,}1474 \leq \delta \leq \delta_3^{DR} = 0{,}715$
-148	$0{,}0125 \leq \delta \leq \delta_1^{DR} = 0{,}0176$	$\delta_2^{DR} = 0{,}0601 \leq \delta \leq \delta_3^{DR} = 1{,}852$

(ii) et les conditions de non interférence (2.41) par intermodulation T_X sont automatiquement vérifiées pour les écarts de fréquence indiqués dans le tableau ci-dessous

P_{MIN}	
-132	$0,0125 \leq \delta \leq \delta^{DT} = 0,4791$
-140	$0,0125 \leq \delta \leq \delta^{DT} = 0,6537$
-148	$0,0125 \leq \delta \leq \delta^{DT} = 0,9115$

Il reste donc à vérifier la condition (2.27)

(1) $D_1^{2/3} D_2^{1/3} \delta \geq D^R$

et la condition (2.41)

(2) $D_1^{1/2} D_{12}^{1/2} \geq D_\delta^T$

pour les autres valeurs de δ .

4.1.2 *Ensemble de conditions suffisantes faibles*

Ici on se place dans le cadre du paragraphe 3.6. On suppose donc que la condition de non interférence (2.14) par désensibilisation et la condition forte de non interférence (2.42) par intermodulation T_X sont simultanément vérifiées:

(3) $D \geq D_\delta^{DT}$

où

(4) $$D_\delta^{DT} = \begin{cases} D_\delta^D, & 0,0125 \leq \delta \leq \delta^{DT} \\ D_\delta^T, & \delta^{DT} < \delta \end{cases}$$

On se souviendra que le seuil δ^{DT} est fonction de P_{MIN}

P_{MIN}	-132	-140	-148
δ^{DT}	0,479	0,653	0,911

Dans ce cas la condition de non interférence (2.27) par intermodulation R_X est vérifiée pour δ dans les régions suivantes

P_{MIN}			
-132	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0146$	$0,394 \leq \delta \leq 0,418$	$0,495 \leq \delta \leq 3302$
-140	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0160$	$0,1474 \leq \delta \leq 7127$	
-148	$0,0125 \leq \delta \leq 0,0176$	$0,0601 \leq \delta \leq 15365$	

Il ne reste plus qu'à vérifier la condition (2.27)

(5) $$D_{\delta}^{2/3} D_{2\delta}^{1/3} \delta \geq D^{R}$$

pour les autres valeurs de δ .

4.1.3 *Ensemble de conditions suffisantes fortes*

On part de l'ensemble de conditions suffisantes faibles du paragraphe 4.1.2 et l'on remplace la condition (2.27) par une condition plus forte.

En effet si

(6) $$D_1 \geq D_{\delta}^{R} \quad \text{et} \quad D_2 \geq D_{2\delta}^{R}$$

alors l'inégalité (2.27) est vérifiée.

(i) $P_{MIN} = -132$

Ici la condition (2.27) n'est pas vérifiée pour

$0,0146 \leq \delta \leq 0,394$ et $0,418 \leq \delta \leq 0,4953$.

On supposera que le spectre est assez étroit pour ne pas avoir à vérifier la condition au delà de $\delta = 3303/2 = 1651$. Il faut donc vérifier la condition forte (2.29) de non interférence par intermodulation R_X. Il faut que les distances soient plus grandes que D_δ^R pour

$0,0146 \leq \delta \leq 2(0,394)$ et $0,418 \leq \delta \leq 2(0,4953)$

$\Rightarrow 0,0146 \leq \delta \leq 2(0,4953) = 0,9906.$

Mais on sait que

$$D_\delta^R \leq D_\delta^T, \quad \delta_{Fm}^{TR} = 0,611 \leq \delta \leq \delta_{FM}^{TR} = 4161,9 .$$

Comme on sait que $D \geq D_\delta^{DT}$ (cf.(3)), il suffit que

(7) $D \geq D_\delta^R, \quad 0,0146 \leq \delta \leq \delta_{FM}^{TR} = 0,611.$

En combinant (4) et (7) on obtient

(8) $D \geq D_\delta^{DTR}$

$$(9) \qquad D_\delta^{DTR} = \begin{cases} D_\delta^D, & 0,0125 \leq \delta \leq 0,0146 \\ D_\delta^R, & 0,0146 \leq \delta \leq \delta_{Fm}^{TR} = 0,611 \\ D_\delta^T, & \delta_{Fm}^{TR} = 0,611 \leq \delta. \end{cases}$$

Il n'y aura pas d'interférence par intermodulation R_X pour

$0,0125 \leq \delta \leq 3302.$

(ii) $P_{MIN} = -140$

Ici il faut vérifier (2.27) pour

$0,0160 \leq \delta \leq 0,1474.$

On suppose que l'on n'en aura pas besoin pour $\delta \geq 7127/2 = 3563,5$. On ajoute donc la condition

(10) $D \geq D_\delta^R, \quad 0,0160 \leq \delta \leq 2(0,1474) = 0,2948.$

En combinant (4) et (10) on obtient

(11) $D \geq D_{\delta}^{DTR}$

(12) $$D_{\delta}^{DTR} = \begin{cases} D_{\delta}^{D}, & 0,0125 \leq \delta < 0,0160 \\ D_{\delta}^{R}, & 0,0160 \leq \delta < 2(0,1474) = 0,2948 \\ D_{\delta}^{D}, & 0,2948 \leq \delta < \delta^{DT} = 0,653 \\ D_{\delta}^{T}, & \delta^{DT} = 0,653 \leq \delta. \end{cases}$$

Il n'y aura pas d'interférence par intermodulation R_X pour

(13) $0,0125 \leq \delta \leq 7127.$

(iii) $\underline{P_{MIN} = -148}$

Il faut vérifier (2.27) pour

(14) $0,0176 \leq \delta \leq 0,060165$

On suppose que l'on n'en aura pas besoin pour $\delta \geq 15365/2 = 7682,5$. On ajoute donc la condition

(15) $D \geq D_{\delta}^{R}, \quad 0,0176 \leq \delta \leq 2(0,060165) = 0,1202.$

En combinant (4) et (15) on obtient

(16) $D \geq D_{\delta}^{DTR}$

(17) $$D_{\delta}^{DTR} = \begin{cases} D_{\delta}^{D}, & 0,0125 \leq \delta < 0,0176 \\ D_{\delta}^{R}, & 0,0176 \leq \delta < 0,1202 \\ D_{\delta}^{D}, & 0,1202 \leq \delta < 0,9115 = \delta^{DT} \\ D_{\delta}^{T}, & 0,9115 \leq \delta. \end{cases}$$

Il n'y aura pas d'interférence par intermodulation R_X pour

(18) $0,0125 \leq \delta \leq 15365.$

4.2 *Conditions de non interférence pour le VHF*

Pour le VHF la séparation Δf entre deux canaux adjacents est de 30 kHz et F = 160 MHz. On peut alors exprimer les conditions du paragraphe 4.1 en nombre de canaux m en posant

(19) $\delta = 0{,}03\ m,\quad m \geq 1$ un entier.

4.2.1 *Conditions de désensibilisation et d'adjacence*

Soit d_m la distance géographique (en km) entre deux stations pour lesquelles l'écart de fréquence est de m canaux. Alors si l'on définit l'analogue de D_δ^D

(20) $$D_m^D = D_{0,03m}^D$$

la condition de désensibilisation devient

(21) $$d_m \geq D_m^D$$

où

(i) $P_{MIN} = -132$

(22a) $$D_m^D = \begin{cases} 0{,}051\ 723\ 767\ /m^{11,05}, & 0{,}416 \leq m \leq 0{,}666 \\ 4{,}371\ 060\ 525\ /m^{0,315}, & 1 \leq m \leq 13 \\ 136{,}777\ 780\ 1\ /m^{1,645}, & 14 \leq m \leq 333 \end{cases}$$

(ii) $P_{MIN} = -140$

(22b) $$D_m^D = \begin{cases} 0{,}129\ 924\ 228\ /m^{11,05}, & 0{,}416 \leq m \leq 0{,}666 \\ 10{,}979\ 607\ 62\ /m^{0,315}, & 1 \leq m \leq 13 \\ 343{,}570\ 250\ 1\ /m^{1,645}, & 14 \leq m \leq 333 \end{cases}$$

(iii) $\underline{P_{MIN} = -148}$

$$(22c)\quad D_m^D = \begin{cases} 0{,}326\ 354\ 906\ /m^{11{,}05}, & 0{,}416 \le m \le 0{,}666 \\ 27{,}579\ 527\ 41\ \ /m^{0{,}315}, & 1 \le m \le 13 \\ 863{,}009\ 449\ 4\ \ /m^{1{,}645}, & 14 \le m \le 333 \end{cases}$$

La condition d'adjacence est caractérisé par

$$(23)\quad D_{\Delta f}^A = \left\{ \begin{array}{ll} 5{,}443\ 522\ 408, & P_{MIN} = -132 \\ 13{,}673\ 510\ 08, & P_{MIN} = -140 \\ 34{,}346\ 304\ 43, & P_{MIN} = -148 \end{array} \right\}, \quad \Delta f = 0{,}03.$$

Cette condition est plus forte que la condition de non interférence par désensibilisation correspondant à m = 1. On peut donc laisser tomber les conditions (22a), (22b), et (22c) pour m = 1 et les remplacer par (23). Il faut ensuite vérifier la condition de non interférence par intermodulation R_X

$$(24)\quad D_1^{2/3} D_2^{1/3} m \ge D_{\Delta f}^R = \left\{ \begin{array}{lll} 22{,}35, & 1 \le m, & P_{MIN} = -132 \\ 30{,}38, & 1 \le m \le 4 \ \text{ et } \ 24 \le m, & P_{MIN} = -140 \\ 41{,}30, & 1 \le m \le 2 \ \text{ et } \ 62 \le m, & P_{MIN} = -148 \end{array} \right\}$$

où $D_{\Delta f}^R = D^R/\Delta f$.

Il faut aussi vérifier la condition de non interférence par intermodulation T_X

$$(25)\quad D_1^{1/2} D_{12}^{1/2} \ge D_m^T$$

pour certains $m \ge 1$, où, comme pour D_m^D, on définit l'analogue D_m^T de D_δ^T

$$(26)\quad D_m^T \doteq D_{0{,}03m}^T = \frac{m^{9/40}}{(50+m)^{57/40}}\ 0{,}150776796\ 10^{-(P_{MIN}/40)}$$

De façon plus précise

$$(27)\quad D_1^{1/2} D_{12}^{1/2} \ge \frac{m^{0{,}225}}{(50+m)^{1{,}425}} \left\{ \begin{array}{lll} 300{,}839, & 16 \le m, & P_{MIN} = -132 \\ 476{,}798, & 22 \le m, & P_{MIN} = -140 \\ 755{,}674, & 31 \le m, & P_{MIN} = -148\ . \end{array} \right.$$

4.2.2 *Conditions suffisantes faibles*

On pose

(28) $D_m^{DT} = D_{0,03m}^{DT}$

(i) $P_{MIN} = -132$

(29) $$D_m^{DT} = \begin{cases} 4,3710\ /m^{0,315}, & 1 \le m \le 13 \\ 136,77\ \ /m^{1,645}, & 14 \le m \le 15 \\ 300,839 m^{0,225}/(50+m)^{1,425}, & 16 \le m \end{cases}$$

Il faut vérifier la condition de non interférence par intermodulation R_X

(30) $D_1^{2/3} D_2^{1/3} m \ge 22,35, \quad 1 \le m \le 16.$

Il faut aussi vérifier la condition (23) pour l'adjacence.

(ii) $P_{MIN} = -140$

(31) $$D_m^{DT} = \begin{cases} 10,980\ /m^{0,315}, & 1 \le m \le 13 \\ 343,57\ \ /m^{1,645} & 14 \le m \le 21 \\ 476,798\ m^{0,225}/(50+m)^{1,425}, & 22 \le m \end{cases}$$

Il faut vérifier la condition de non interférence par intermodulation R_X

(32) $D_1^{2/3} D_2^{1/3} m \ge 30,38, \quad 1 \le m \le 4.$

Il faut aussi vérifier la condition (23) pour l'adjacence.

(iii) $P_{MIN} = -148$

(33) $$D_m^{DT} = \begin{cases} 27,579/m^{0,315}, & 1 \le m \le 13 \\ 863,009/m^{1,645}, & 14 \le m \le 30 \\ 755,674\ m^{0,225}/(50+m)^{1,425}, & 31 \le m \end{cases}$$

Il faut vérifier la condition de non interférence par intermodulation R_X

(34) $\quad D_1^{2/3} D_2^{1/3} m \geq 41{,}30, \quad 1 \leq m \leq 2.$

Il faut aussi vérifier la condition (23) pour l'adjacence.

4.2.3 *Conditions suffisantes fortes*

Ici on donne les distances

(35) $\quad D_m^{DTR} = D_{0,03m}^{DTR}$

pour les différents P_{MIN}.

(i) $\quad P_{MIN} = -132$

(26) $$D_m^{DTR} = \begin{cases} 28{,}16/m, & 1 \leq m \leq 20 \\ 300{,}839\ m^{0,225}/(50+m)^{1,425}, & 21 \leq m \end{cases}$$

(ii) $\quad P_{MIN} = -140$

(37) $$D_m^{DTR} = \begin{cases} 38{,}27/m\ , & 1 \leq m \leq 9 \\ 10{,}98/m^{0,315}, & 10 \leq m \leq 13 \\ 343{,}57/m^{1,645}, & 14 \leq m \leq 21 \\ 476{,}80\ m^{0,225}/(50+m)^{1,425}, & 22 \leq m \end{cases}$$

(iii) $\quad P_{MIN} = -148$

(38) $$D_m^{DTR} = \begin{cases} 52{,}03/m, & 1 \leq m \leq 4 \\ 27{,}579/m^{0,315}, & 5 \leq m \leq 13 \\ 863{,}009/m^{1,645}, & 14 \leq m \leq 30 \\ 755{,}674\ m^{0,225}/(50+m)^{1,425}, & 31 \leq m \end{cases}$$

Ici on remarquera que la condition d'adjacence (23) est automatiquement vérifiée.

4.3 *Algorithme pour la vérification de la condition de non interférence par intermodulation* R_X

On a vu que dans les conditions du paragraphe 4.2 il faut vérifier une condition de la forme

$$(39) \qquad D_1^{2/3} D_2^{1/3} m \geq D_{\Delta f}^R = \frac{D^R}{\Delta f}, \quad 1 \leq m \leq M^R.$$

Dans le cas de l'assignation de N^2 fréquences à un carré de côté A km au centre de chaque petit carré de côté A/N, on peut proposer l'algorithme suivant.

Algorithme

1) Si $A/N \geq D_{\Delta f}^R$ alors

$$(40) \qquad \forall m \geq 1, \quad (d_m)^{2/3} (d_{2m})^{1/3} m \geq D_{\Delta f}^R m \geq D_{\Delta f}^R$$

où d_m est le minimum des distances entre les positions de deux fréquences différant par m canaux. Dans ce cas la condition (39) est toujours vérifiée.

2) Si $A/N < D_{\Delta f}^R$ alors il existe un entier $K \geq 0$ tel que

$$(41) \qquad \frac{A}{N}(K+1) \geq D_{\Delta f}^R > \frac{A}{N} K .$$

Pour tout

$$m \geq K+1, \quad d_m^{2/3} d_{2m}^{1/3} m \geq (\frac{A}{N})^{2/3} (\frac{A}{N})^{1/3} (K+1) = \frac{A}{N}(K+1) \geq D_{\Delta f}^R$$

et la condition (39) est toujours vérifiée. Enfin la condition (39) pour $1 \leq m \leq K^R = \min\{K, M^R\}$ est équivalente à vérifier pour chaque nombre impair k, $1 \leq k \leq K^R$, la chaîne d'inégalités

$$(42) \qquad [d_{k2^n}]^{2/3} [d_{k2^{n+1}}]^{1/3} k2^n \geq D_{\Delta f}^R \quad \forall n \geq 0 \text{ tel que } 1 \leq k2^n \leq K^R. \quad \square$$

Toujours dans le cas des assignations linéaires, le programme peut trouver pour chaque m, $1 \leq m \leq N^2-1$, les distances d_m. Il est ensuite facile de vérifier les chaînes d'inégalités (42). Cet algorithme s'adapte avec les changements évidents au cas de l'assignation dans un rectangle ou un parallélépipède rectangle.

5. STRATEGIES LINEAIRES D'ASSIGNATION HORIZONTALE

En 1981-82, nous avons étudié le problème de trouver une stratégie d'assignation de N^2 ($N \geq 2$) fréquences dans une ville ayant la forme d'un carré de A km de côté.

Pour ce faire nous avons subdivisé ce grand carré en N^2 petits carrés de côté A/N. Chaque antenne est placée au centre de chaque petit carré où l'une des fréquences du spectre

(1) $\mathbb{N}^2 = \{n \mid 0 \leq n < N^2\}$

est assignée.

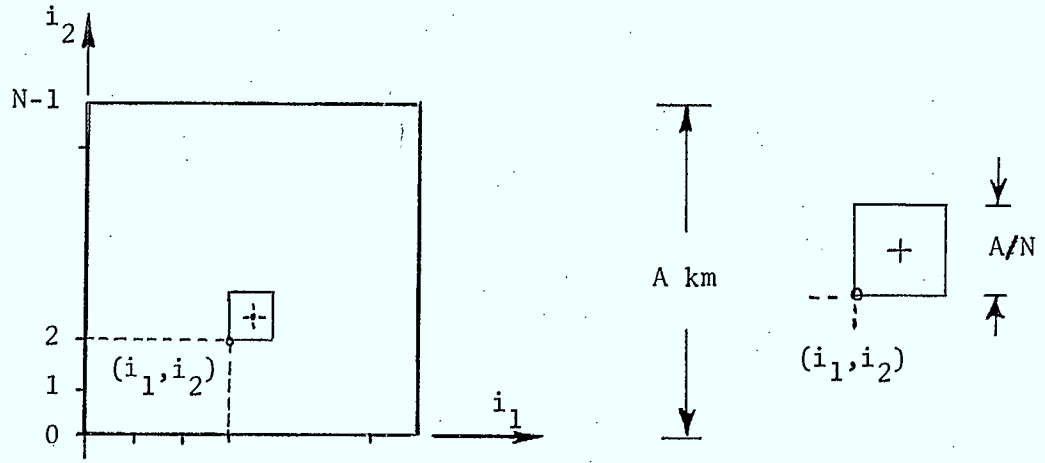


Figure 1

En effet nous avons montré que tout spectre de fréquences

(2) $\Sigma = \{f_0 + n\Delta f \mid 0 \leq n < N^2\}, \quad f_0 > 0, \quad \Delta f > 0$

peut être remplacé par la suite de nombre entier $\mathbb{N}^2$ donné en (1).

Nous allons compléter les résultats sur les stratégies linéaires d'assignation dans un carré et les généraliser au cas d'une ville en forme de rectangle ou de parallélogramme.

5.1 *Assignation uniforme dans un rectangle*

5.1.1 *Transformation du spectre*

De façon générale le spectre à assigner est de la forme

(3) $\Sigma = \{f_0+m\Delta f \mid 0 \leq m < M\}, \quad f_0 > 0, \quad \Delta f > 0$

où les quantités f_0, Δf et le nombre entier M sont fixés d'avance. Si les fréquences à assigner sont exprimées en canaux, c'est-à-dire, en unités Δf, le spectre Σ est équivalent à la suite d'entiers

(4) $\mathbb{M} = \{m \mid 0 \leq m < M\}$.

Pour l'adjacence et la désensibilisation, les conditions de non interférence ne feront intervenir que des différences entre des fréquences

(5) $\delta = f_m - f_n = (f_0+m\Delta f) - (f_0+n\Delta f) = (m-n)\Delta f;$

pour l'intermodulation, les conditions de non interférence font intervenir des relations de la forme

(6) $$\frac{f_{n_0} = 2f_{n_1} - f_{n_2}}{f_0+n_0\Delta f = 2(f_0+n_1\Delta f) - (f_0+n_2\Delta f). = f_0 + (2n_1-n_2)\Delta f}$$

Les différences et ces relations sont équivalentes aux mêmes différences ou relations sur les entiers de $\mathbb{M}$:

(7) $$\boxed{m-n \quad \text{ou} \quad n_0 = 2n_1-n_2.}$$

Dans tous les cas, ces quantités sont indépendantes de la fréquence f_0. Quant au paramètre Δf, il peut être directement incorporé dans les conditions de non interférence comme nous l'avons fait au paragraphe 4.2 pour la bande VHF.

A la lumière de cette discussion, nous remplacerons le spectre Σ par la suite $[M]$ que nous appellerons "spectre" et dont les entiers m seront désignés sous le nom de "fréquences".

Nous verrons par la suite qu'il sera avantageux de donner à notre spectre $[M]$ une structure d'anneau algébrique ce qui revient à définir sur l'ensemble $[M]$ une addition $\oplus$ et une multiplication $\odot$

(8) $\quad m \oplus n = (m+n) \text{ Mod } M$

(9) $\quad m \odot n = (mn) \text{ Mod } M$

où l'opération Mod M est définie de l'ensemble des entiers Z dans l'ensemble $[M]$,

(10) $\quad \text{Mod M:} \quad Z \to [M]$
$\qquad\qquad\quad m \to m \text{ Mod } M = \bar{m}$

où

(11) $\quad m = \bar{m} + cN, \quad c \in Z, \quad 0 \leq \bar{m} < M.$

Les entiers $\bar{m}$ et c sont évidemment uniques pour chaque m. Ces opérations nous permettent d'ajouter, de soustraire et de multiplier les fréquences du spectre $[M]$ tout en restant dans l'ensemble $[M]$ comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 1. $\quad M = 9, \quad [M] = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$5 \oplus 5 = (10) \text{Mod } 9 = (1\times 9+1) \text{Mod } 9 = 1$

$3 \odot 7 = (21) \text{Mod } 9 = (2\times 9+3) \text{Mod } 9 = 3$

$3 \ominus 5 = (-2) \text{Mod } 9 = (-1\times 9+7) \text{Mod } 9 = 7$

$3 \odot 6 = 18 \text{ Mod } 9 = (2\times 9+0) \text{Mod } 9 = 0.$

5.1.2 *Définition d'une stratégie d'assignation*

Supposons que nous voulions assigner $M = N_1N_2$ ($N_1 \geq 1$, $N_2 \geq 1$) fréquences dans un rectangle de dimension $A \times A(N_2/N_1)$. De façon concrète le rectangle est divisé en N_1N_2 petits carrés de côté A/N_1

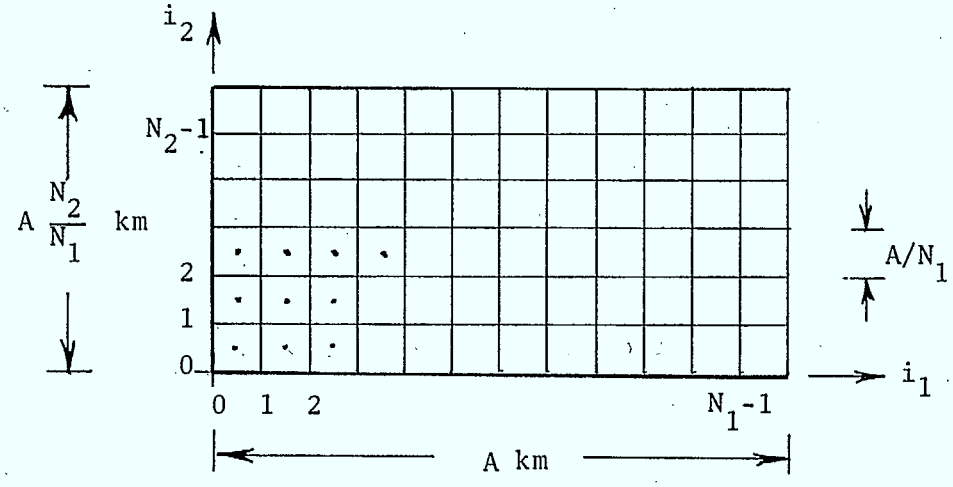


Figure 2

Chaque antenne est placée au centre de chaque petit carré où l'on assigne l'une des fréquences du spectre

(12) $\mathbb{M} = \{m \mid 0 \leq m < N_1N_2\}$.

Le problème de l'assignation uniforme consiste à trouver une stratégie d'assignation pour associer à l'ensemble des coordonnées

(13) $\mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 = \{(i_1,i_2) \mid 0 \leq i_1 < N_1, \quad 0 \leq i_2 < N_2\}$

les fréquences du spectre $\mathbb{M}$ tel que défini par (12). En termes mathématiques, cela revient à chercher une bijection

(14) $a: \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 \rightarrow \mathbb{M}$.

En regardant le dessin plus haut, il est facile de constater qu'il y a $(N_1N_2)!$ (factoriel N_1N_2) façons de construire une stratégie d'assignation. Pour $N_1=N_2=32$, cela fait 1024! ($1024 \times 1023 \times 1022 \times \ldots \times 2 \times 1$). Ceci ne semble pas raisonnable même pour un puissant ordinateur.

5.1.3 *Expression des conditions de non interférence*

Maintenant que nous avons caractérisé le spectre $\mathbb{M}$ et spécifié ce qu'est une stratégie d'assignation a, il reste à calculer pour un écart de fréquence k

(15) $\quad k \in Z \quad$ et $\quad |k| < N_1 N_2$

les distances correspondantes D_k.

Pour l'adjacence et la désensibilisation, il suffit d'étudier les distances D_k. De façon générale on peut associer à chaque point

$$(i_1,i_2) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2$$

et à chaque $k \in Z$, $|k| < N_1 N_2$ les ensembles

(16) $\quad F_k(i_1,i_2) = \{(j_1,j_2) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 \mid a(j_1,j_2)-a(i_1,i_2) = k\}$

(17) $\quad F_k = \{(j_1-i_1,j_2-i_2) \mid (j_1,j_2) \in F_k(i_1,i_2),\ (i_1,i_2) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2\}$

et les quantités

(18) $\quad f_k = \mathrm{Min}\{\sqrt{\ell^2+m^2} \mid (\ell,m) \in F_k\}$

(19) $\quad \forall k \geq 1, \quad \delta_k = \mathrm{Min}\{f_k, f_{-k}\}.$

En fait il est inutile de considérer les valeurs négatives de k puisqu'il est facile de vérifier que

(20) $\quad F_{-k} = \{(-\ell,-m) \mid (\ell,m) \in F_k\}$

et donc

(21) $$\mathrm{Min}_{(\ell,m)\in F_{-k}} \sqrt{\ell^2+m^2} = \mathrm{Min}_{(\ell,m)\in F_k} \sqrt{\ell^2+m^2} = \mathrm{Min}_{(i,j)\in F_k \cup F_{-k}} \sqrt{i^2+j^2}\ .$$

En conclusion

(22) $\quad \delta_k = f_k = f_{-k}$

et il suffira de construire les ensembles F_k pour $k \geq 1$ pour obtenir les distances δ_k.

Comme la distance δ_k est exprimée en unités de longueur A/N_1, les vraies distances sont données par

(23) $$d_k = \frac{A}{N_1}\,\delta_k, \qquad k \geq 1.$$

En utilisant les notations du paragraphe 4.2 la condition de non interférence par adjacence devient

(24) $$d_1 \geq D^A_{\Delta f}$$

et les conditions de non interférence par désensibilisation deviennent

(25) $$d_k \geq D^D_k, \qquad 1 \leq k < N_1 N_2 .$$

Les conditions de non interférence par intermodulation font appel à deux distances D_k et D_{2k} et impliquent trois stations. Il faut donc vérifier toutes les combinaisons.

On peut aussi obtenir un ensemble de conditions suffisantes à l'aide des quantités d_k que nous avons définies. Pour l'intermodulation R_X on demande

(26) $$d_k^{2/3}\, d_{2k}^{1/3}\, k \geq D^R_{\Delta f}, \qquad 1 \leq k \leq \left[\frac{N_1 N_2 - 1}{2}\right]$$

où [X] est le plus grand entier positif ou nul inférieur ou égal à X. Pour l'intermodulation T_X on demande

(27) $$d_k \geq D^T_k, \qquad 1 \leq k < N_1 N_2 .$$

C'est la condition forte de non interférence par intermodulation T_X qui est à la source de la condition (27). Cette dernière condition combinée avec la condition de désensibilisation (25) donne

(28) $$d_k \geq D^{DT}_k, \qquad 1 \leq k < N_1 N_2 .$$

L'ensemble des conditions (24), (28) et (26) sera appelé <u>ensemble de conditions suffisantes de non interférence</u>

$$(29)\quad \begin{cases} d_1 \geq D^A_{\Delta f} \\ d_k \geq D^{DT}_k, \qquad 1 \leq k < N_1N_2 \\ d_k^{2/3}\, d_{2k}^{1/3}\, k \geq D^R_{\Delta f}, \qquad 1 \leq k \leq \left[\dfrac{N_1N_2-1}{2}\right] \end{cases}$$

De plus, dépendant du P_{MIN}, ces conditions ne sont pas indépendantes et la troisième condition n'a pas besoin d'être vérifiée pour tous les k (cf. équation (2.24)).

Si l'on veut exprimer les conditions (29) en unités de longueur A/N_1 on a

$$(30)\quad \begin{cases} \delta_1 \geq \dfrac{N_1}{A} D^A_{\Delta f} \\ \delta_k \geq \dfrac{N_1}{A} D^{DT}_k, \qquad 1 \leq k < N_1N_2, \\ \delta_k^{2/3}\delta_{2k}^{1/3}\, k \geq \dfrac{N_1}{A} D^R_{\Delta f}, \qquad 1 \leq k \leq \left[\dfrac{N_1N_2-1}{2}\right] \end{cases}$$

Il est important de se rappeler que les ensembles de conditions (29) et (30) ne sont que des ensembles de conditions suffisantes. Elles possèdent l'avantage de découpler le calcul des δ_k de celui de la vérification des conditions de non interférence. On verra plus loin que ceci est extrêmement avantageux pour les stratégies linéaires où le calcul des δ_k est simple et rapide.

Il faut aussi ajouter à l'ensemble des conditions (29) et (30) des considérations géométriques qui permettent de réduire l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'une ou l'autre des trois conditions est vérifiée. En effet chaque petit carré a son côté égal à A/N_1.

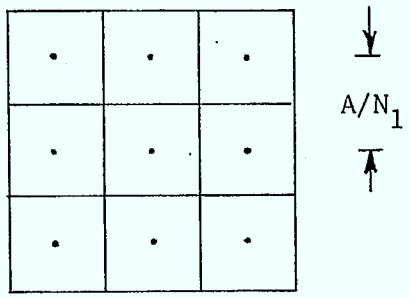


Figure 3

Ceci veut dire que deux stations sont au moins distantes d'une distance A/N_1

(31) $\forall k \geq 1, \quad d_k \geq \frac{A}{N_1} \quad$ et $\quad \delta_k \geq 1$.

Ceci veut dire que la première condition (29) ou (30) sera automatiquement vérifiée si

(32) $D_{\Delta f}^{A} \leq \frac{A}{N_1}$.

Comme D_k^{DT} est une fonction qui décroît lorsque k augmente, il n'y aura pas besoin de vérifier la seconde condition de (29) ou (30) pour

(33) $D_1^{DT} \leq \frac{A}{N_1}$;

si ce n'est pas le cas, on pourra toujours trouver un entier K tel que

(34) $D_{K+1}^{DT} \leq \frac{A}{N_1} \quad$ et $\quad D_K^{DT} > \frac{A}{N_1}$

et il suffira de vérifier la seconde condition (29) ou (30) pour

(35) $1 \leq k \leq \min\{K, N_1N_2-1\}$.

De la même façon si

(36) $D_{\Delta f}^{R} \leq \frac{A}{N_1}$

il n'y aura pas besoin de vérifier la troisième condition (29) ou (30).

Sinon, on pourra aussi trouver un entier K_R tel que

$$(37) \qquad K_R < \frac{N_1}{A} D^R_{\Delta f} \leq K_R+1$$

et il n'y aura à vérifier la troisième condition (29) ou (30) que pour

$$(38) \qquad 1 \leq k \leq \min\left\{\left[\frac{N_1N_2-1}{2}\right], K_R\right\}.$$

En résumé

$$(39a) \quad \begin{cases} D^A_{\Delta f} \leq \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \text{ rien à vérifier} \\ D^A_{\Delta f} > \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \delta_1 \geq \frac{N_1}{A} D^A_{\Delta f} \end{cases}$$

$$(39b) \quad \begin{cases} D^{DT}_1 \leq \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \text{ rien à vérifier} \\ D^{DT}_1 > \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \delta_k \geq \frac{N_1}{A} D^{DT}_k, \quad 1 \leq k \leq \min\{K, N_1N_2-1\} \end{cases}$$

$$(39c) \quad \begin{cases} D^R_{\Delta f} \leq \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \text{ rien à vérifier} \\ D^R_{\Delta f} > \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \delta_k^{2/3}\delta_{2k}^{1/3} k \geq \frac{N_1}{A} D^R_{\Delta f}, \quad 1 \leq k \leq \min\{K_R, \left[\frac{N_1N_2-1}{2}\right]\} \end{cases}$$

Ces considérations sont extrêmement importantes, et réduisent considérablement l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles les conditions (39) doivent être vérifiées.

Exemple 2. On se place dans le cas d'une ville carrée de côté A où il faut assigner un spectre de N^2 fréquences

$$(40) \qquad A = 100 \text{ km}, \quad N = 32 \Rightarrow N^2 = 1024, \quad A/N = 3{,}125.$$

Pour $P_{MIN} = -132$

$$D^A_{\Delta f} = 5{,}44 \text{ km} \qquad D^R_{\Delta f} = 22{,}35 \text{ km}$$

$$D^{DT}_k = \begin{cases} 4{,}37\ k^{-0{,}315} & , \quad 1 \leq k \leq 13 \\ 136{,}7\ k^{-1{,}645} & , \quad 14 \leq k \leq 15 \\ 300{,}8\ k^{0{,}225}(50+k)^{-1{,}425} & , \quad 16 \leq k\ . \end{cases}$$

On voit immédiatement qu'il faut vérifier la condition (39a) sur le δ_1. Pour la seconde condition on s'aperçoit que

$$D_k^{DT} = \frac{A}{N} \quad \text{pour} \quad k = 2{,}8995 \Rightarrow K = 2.$$

Il suffit donc de vérifier la condition (39b) pour k = 1 et 2 et non de 1 jusqu'à 1023. C'est une économie substantielle! Enfin

$$\frac{N}{A} D_{\Delta f}^R = 7{,}1520 \Rightarrow K_R = 7$$

et il n'y a qu'à vérifier la condition (39c) pour k entre 1 et 7 au lieu de k entre 1 et 511. Une fois de plus c'est une économie importante! □

Exemple 3. On reprend l'exemple 2 pour $P_{MIN} = -148$, c'est-à-dire

$$D_{\Delta f}^A = 34{,}34 \qquad D_{\Delta f}^R = 41{,}30$$

$$D_k^{DT} = \begin{cases} 27{,}58\ k^{-0{,}315}, & 1 \le k \le 13 \\ 863{,}0\ k^{-1{,}645}, & 14 \le k \le 30 \\ 755{,}6\ k^{0{,}225}(50+k)^{-1{,}425}, & 31 \le k\ . \end{cases}$$

Si l'on se rappelle que A/N = 3,125, on voit qu'il faut vérifier la condition (39a) sur δ_1. Pour la seconde condition

$$D_k^{DT} = \frac{A}{N} \Rightarrow 30 < k < 31 \Rightarrow K = 30\ .$$

Il faut vérifier (39b) pour $1 \le k \le 30$ au lieu de $1 \le k \le 1023$. Enfin

$$\frac{N}{A} D_{\Delta f}^R = 13{,}216 \Rightarrow K_R = 13$$

et il n'y a à vérifier (39c) que pour $1 \le k \le 13$ au lieu de $1 \le k \le 511$. □

5.1.4 *Stratégies linéaires dans un rectangle*

Au paragraphe 5.1.1 nous avons donné à l'ensemble $\mathbb{M}$ une structure algébrique en définissant une addition $\oplus$ et une multiplication $\odot$. De façon

plus précise $(\mathbb{M}, \oplus, \odot)$ forme un anneau commutatif avec un élément unité 1.

On peut aussi considérer l'anneau $\mathbb{M}$ comme un module sur Z en définissant l'action de Z sur $\mathbb{M}$ comme suit

(41) $\forall \alpha \in Z$, $\forall m \in \mathbb{M}$, $\alpha \cdot m = (\alpha m) \text{Mod } (N_1 N_2)$.

La structure de module sur Z et l'opération ci-dessus sont les analogues de la structure d'espace vectoriel sur les nombres réels R et de l'opération multiplication par un scalaire.

Enfin il faudra étendre la définition de la stratégie d'assignation de l'ensemble $\mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2$ à tout le plan $Z \times Z$. Cet espace produit possède lui aussi une structure de module sur Z avec les opérations habituelles d'addition et de multiplication pour l'ensemble Z des nombres entiers.

La notion de "linéarité" naturelle que nous allons utiliser ici sera celle d'homomorphisme entre deux modules sur Z. L'application

(42) $L: Z \times Z \rightarrow \mathbb{M}$

est un <u>homomorphisme</u> de modules sur Z (ou Z-homomorphisme) si

(43) $\forall (i_1, i_2), (j_1, j_2), \quad L(i_1 + i_2, j_1 + j_2) = L(i_1, i_2) \oplus L(j_1, j_2)$

(44) $\forall \alpha \in Z, \forall (i_1, i_2), \quad L(\alpha i_1, \alpha i_2) = \alpha \cdot L(i_1, i_2)$.

Le lecteur pourra s'apercevoir qu'il s'agit bien de l'équivalent de linéarité d'une application entre espaces vectoriels.

<u>Définition 1.</u> On dira qu'un Z-homomorphisme $L: Z \times Z \rightarrow \mathbb{M}$ est une <u>stratégie linéaire</u> si sa restriction à $\mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2$ est une bijection c'est-à-dire

(45) $L(\mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2) = \mathbb{M}$. □

Le lecteur pourra vérifier que les Z-homomorphismes suivants sont des assignations linéaires.

Exemple 1.

$L(i_1,i_2) = (3i_1+4i_2) \text{ Mod } 12$

i_2				
$N_2 = 3$	8	11	2	5
	4	7	10	1
	0	3	6	9

$i_1 \rightarrow$

$N_1 = 4$

Exemple 2.

$L(i_1,i_2) = (i_1+2i_2) \text{Mod } 6$

i_2		
$N_2 = 3$	4	5
	2	3
	0	1

$i_1 \rightarrow$

$N_1 = 2$

i_2							
$N_2 = 1$	0	1	2	3	4	5	$i_1 \rightarrow$

$N_1 = 6$

Exemple 3.

$L(i_1,i_2) = (4i_1+7i_2) \text{Mod } 16$

i_2				
	5	9	13	1
	14	2	6	10
$N_2 = 4$	7	11	15	3
	0	4	8	12

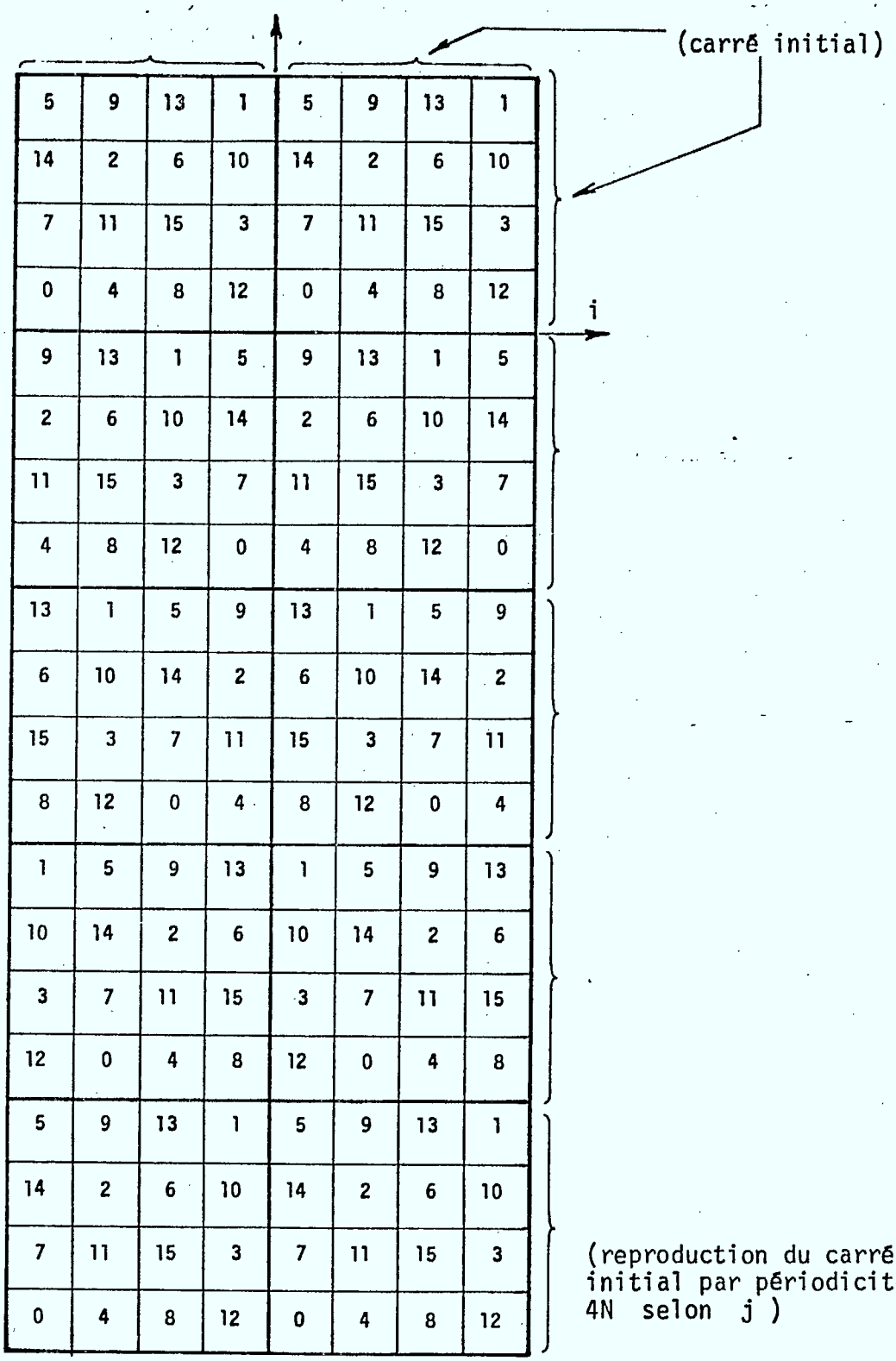
$i_1 \rightarrow$

$N_1 = 4$

Pour l'exemple 3 on présente les assignations pour

$$\{(i_1,i_2) \mid -4 \leq i_1 \leq 3, \quad -16 \leq i_2 \leq 3\}$$

à la Figure 1.



5	9	13	1	5	9	13	1
14	2	6	10	14	2	6	10
7	11	15	3	7	11	15	3
0	4	8	12	0	4	8	12
9	13	1	5	9	13	1	5
2	6	10	14	2	6	10	14
11	15	3	7	11	15	3	7
4	8	12	0	4	8	12	0
13	1	5	9	13	1	5	9
6	10	14	2	6	10	14	2
15	3	7	11	15	3	7	11
8	12	0	4	8	12	0	4
1	5	9	13	1	5	9	13
10	14	2	6	10	14	2	6
3	7	11	15	3	7	11	15
12	0	4	8	12	0	4	8
5	9	13	1	5	9	13	1
14	2	6	10	14	2	6	10
7	11	15	3	7	11	15	3
0	4	8	12	0	4	8	12

Figure 4. Exemple 3.

5.2 *Rappels sur les stratégies linéaires dans un carré*

En 1981-82, nous avons introduit pour la première fois et étudié les stratégies linéaires dans un carré. C'est le cas $N_1 = N_2 = N$ ce qui entraîne $M = N^2$ pour $M \geq 2$.

5.2.1 *Caractérisation et propriétés*

Nous avons d'abord caractérisé les Z-homomorphismes L qui définissent des stratégies linéaires.

Théorème 2. (i) Tout Z-homomorphisme

(46) $L: Z\times Z \rightarrow [M]$

est de la forme

(47) $L(i_1,i_2) = (i_1 I_1 + i_2 I_2) \text{Mod}(N^2)$

où I_1 et I_2 sont des entiers tels que

(48) $0 \leq I_1 < N^2, \quad 0 \leq I_2 < N^2.$

(ii) Un Z-homomorphisme de la forme (46)-(47) possède la propriété

(49) $L([N]\times[N]) = [M]$

si et seulement si les entiers I_1 et I_2 dans (48) vérifient l'une ou l'autre des conditions suivantes:

(50a) $I_1 = NJ_1, \quad (J_1,N) = 1 \text{ et } (I_2,N) = 1$

ou

(50b) $I_2 = NJ_2, \quad (J_2,N) = 1 \text{ et } (I_1,N) = 1,$

où (X,Y) indique le plus grand commun diviseur de X et Y. □

Nous démontrerons plus tard un théorème plus général dans le cas du rectangle. La démonstration sera donc donnée dans ce dernier cas.

En 1981-82 nous avions seulement montré que les conditions (50) étaient suffisantes. Nous pouvons montrer maintenant qu'elles sont nécessaires et éliminer les vérifications par ordinateur.

On se souviendra que les stratégies linéaires d'assignation s'étendent à tout le plan où elles possèdent des propriétés intéressantes.

Théorème 3. Soit L une stratégie linéaire possédant la propriété (49), alors si on construit en n'importe quel point (s_1,s_2) du plan ZxZ le carré

(51) $\{(i_1,i_2) \mid s_1 \leq i_1 < s_1+N, \quad s_2 \leq i_2 < s_2+N\}$

on y retrouvera toutes les N^2 fréquences du spectre $\mathbb{M}$. De façon plus précise,

(52) $L(i_1,i_2) = L(i_1-s_1,i_2-s_2) \oplus L(s_1,s_2)$

et les fréquences assignées au carré (51) sont une translation "modulo N^2" des fréquences assignées au carré $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ □

La démonstration de ce théorème est évidente.

Ce théorème nous fournira un estimé du rayon minimum autour du point (0,0) à l'intérieur duquel on peut trouver toutes les fréquences.

Théorème 4. Pour $N \geq 2$, soient le disque

(53) $C = \{(\ell,m) \mid \sqrt{\ell^2+m^2} \leq \sqrt{2}\,[N/2]\}$

et le carré

(54) $E = \{(\ell,m) \mid -N < \ell < N, \quad -N < m < N\}$

où [X] est le plus grand entier positif ou nul inférieur ou égal à X.

(i) Pour $N \geq 2$

(55) $C \subset E$.

(ii) Si L est une stratégie linéaire vérifiant la propriété (49), alors les N^2 fréquences du spectre $\mathbb{M}$ sont assignées dans le disque C

(56) $\quad L(C) \supset \mathbb{M}$.

Démonstration. (i) Lorsque $N = 2$

$$C = \{(\ell,m) \,|\, \ell^2+m^2 \leq 2\} = \{(\ell,m) \,|\, -1 \leq \ell \leq 1,\ -1 \leq m \leq 1\} = E.$$

Lorsque $N \geq 3$ et N est impair

$$[N/2] = (N-1)/2 \Rightarrow \sqrt{2}[N/2] = (N-1)\sqrt{2}/2 < N-1 \Rightarrow C \subset E$$

Lorsque $N \geq 4$ et N est pair

$$[N/2] = N/2 \Rightarrow \sqrt{2}[N/2] = \sqrt{2}\,\frac{N}{2}\,.$$

Alors

$$\sqrt{2}\,\frac{N}{2} \leq N-1 \Leftrightarrow N \geq 2+\sqrt{2} \Leftrightarrow N \geq 4.$$

Par construction le disque C contient le carré

$$K = \{(\ell,m) \,|\, -[N/2] \leq \ell \leq [N/2],\ -[N/2] \leq m \leq [N/2]\}$$

Lorsque N est impair, $[N/2] = (N-1)/2$. En posant

$$s_1 = -(N-1)/2 \quad \text{et} \quad s_2 = -(N-1)/2,$$

on s'aperçoit que K contient un carré du type (51) où l'on retrouvera toutes les fréquences. De la même façon lorsque N est pair, $[N/2] = N/2$. En posant

$$s_1 = -N/2 \quad \text{et} \quad s_2 = -N/2$$

on obtient le même résultat. Donc par le Theoreme 3 toutes les fréquences se trouvent dans K et, à fortiori, dans C. □

Afin de réduire le nombre d'assignations à étudier nous avons aussi caractérisé en 1981-82 les transformations du couple (I_1,I_2) qui donnent la même stratégie d'assignation à une symétrie géométrique près du carré.

Théorème 5. Soit L une stratégie linéaire caractérisée par le couple d'entiers (I_1,I_2)

$$(57)\quad \begin{cases} L(i_1,i_2) = (i_1 I_1 + i_2 I_2) \text{ Mod } N^2 \\ 0 \le I_1 < N^2, \quad 0 \le I_2 < N^2 . \end{cases}$$

Les transformations suivantes du couple (I_1,I_2) ne changent pas les positions relatives des fréquences assignées.

1) Rotation de 90^o

$$(58)\quad (I_1,I_2) \to (N^2-I_2,I_1)$$

2) Rotation de 180^o

$$(59)\quad (I_1,I_2) \to (N^2-I_1,N^2-I_2)$$

3) Rotation de 270^o

$$(60)\quad (I_1,I_2) \to (I_2,N^2-I_1)$$

4) Pivotement autour de la diagonale $i_1=i_2$

$$(61)\quad (I_1,I_2) \to (I_2,I_1)$$

5) Rotation de 90^o plus pivotement

$$(62)\quad (I_1,I_2) \to (N^2-I_1,I_2)$$

6) Rotation de 180^o plus pivotement

$$(63)\quad (I_1,I_2) \to (N^2-I_2,N^2-I_1)$$

7) Rotation de 270^o plus pivotement

$$(64)\quad (I_1,I_2) \to (I_1,N^2-I_2).$$

De façon concrète le théorème 5 nous dit qu'il suffit de chercher les paires admissibles (I_1,I_2) telles que

$$(65)\quad 2 \le I_1 \le [N^2/2], \quad 1 \le I_2 \le I_1,$$

où $[N^2/2]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $N^2/2$. Toutes les autres paires admissibles (I_1,I_2) seront obtenues en utilisant l'une des sept transformations décrites dans le théorème 5. Le lecteur pourra

the other way around in the results! ??? e.g. (32,65) I_1 I_2

consulter le rapport 1981-82 pour voir la liste des paires admissibles pour N = 2 à 19 (cf. p.44 et Annexe 2 p.125 à 139).

N	2	3	4	5	6	7
nombre de paires admissibles	4	24	32	160	48	504
N	23	24	31	32	41	50
nombre de paires admissibles	22 264	3072	55 800	16 384	131 200	40 000

5.2.2 *Conditions de non interférence*

Si l'on se reporte maintenant à l'ensemble des conditions suffisantes de non interférence (30) et aux définitions (16) à (19) des ensembles $F_k(i_1,i_2)$ et F_k et des quantités f_k et δ_k, on s'aperçoit que dans le cas de stratégies linéaires il est plus avantageux de travailler avec les ensembles

(66) $$E_k(i_1,i_2) = \{(j_1,j_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid L(j_1-i_1,j_2-i_2) = (k) \text{Mod } N^2\}$$

(67) $$E_k = \{(j_1-i_1,j_2-i_2) \mid (j_1,j_2) \in E_k(i_1,i_2),\ (i_1,i_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}\ .$$

Cet avantage réside dans le fait qu'il est facile de montrer que

(68) $$E_k = \{(\ell,m) \in E \mid L(\ell,m) = (k) \text{ Mod } N^2\},$$

où E est donné par (54).

Comme au paragraphe 5.1.3, on associe à E_k l'équivalent des quantités f_k et δ_k. Comme en (21) on montre que

(69) $$\min_{(\ell,m)\in E_{-k}} \sqrt{\ell^2+m^2} = \min_{(\ell,m)\in E_k} \sqrt{\ell^2+m^2} = \min_{(\ell,m)\in E_k \cup E_{-k}} \sqrt{\ell^2+m^2}\ .$$

On pose donc

(70) $$\forall k \geq 1, \quad e_k = \min_{(\ell,m)\in E_k} \sqrt{\ell^2+m^2}\ .$$

Les ensembles E_k sont cependant plus gros que les ensembles F_k. En effet il est facile de montrer que

$$(71) \qquad E_k = F_k \cup F_{-(N^2-k)}, \qquad E_{-k} = F_{-k} \cup F_{N^2-k}$$

et donc que

$$(72) \qquad e_k = e_{N^2-k}, \qquad 1 \leq k \leq N^2 .$$

Cette symétrie va nous permettre de limiter encore la vérification des conditions de non interférence (30)

$$(73) \quad \begin{cases} e_1 \geq \frac{N}{A} D^A_{\Delta f} \\ e_k \geq \frac{N}{A} D^{DT}_k, & 1 \leq k \leq \left[\frac{N^2}{2}\right] \\ e_k^{2/3} e_{2k}^{1/3} k \geq \frac{N}{A} D^R_{\Delta f}, & 1 \leq k \leq \left[\frac{N^2-1}{2}\right] \end{cases}$$

La seconde condition devait être vérifiée par k allant jusqu'à N^2-1.

Enfin on se souviendra qu'il est possible de réduire encore plus l'ensemble des k en tenant compte de la géométrie des assignations comme nous l'avons fait au paragraphe 5.1.3. De façon concrète ceci donne les nouvelles conditions suivantes où les entiers K et K_R sont calculés par (34) et (37).

$$(74a) \quad \begin{cases} D^A_{\Delta f} \leq \frac{A}{N} & \Rightarrow \text{ rien à vérifier} \\ D^A_{\Delta f} > \frac{A}{N} & \Rightarrow e_1 \geq \frac{N}{A} D^A_{\Delta f} \end{cases}$$

$$(74b) \quad \begin{cases} D^{DT}_1 \leq \frac{A}{N} & \Rightarrow \text{ rien à vérifier} \\ D^{DT}_1 > \frac{A}{N} & \Rightarrow e_k \geq \frac{N}{A} D^{DT}_k, \quad 1 \leq k \leq \min\{K, \left[\frac{N^2}{2}\right]\} \end{cases}$$

$$(74c) \quad \begin{cases} D^R_{\Delta f} \leq \frac{A}{N} & \Rightarrow \text{ rien à vérifier} \\ D^R_{\Delta f} > \frac{A}{N} & \Rightarrow e_k^{2/3} e_{2k}^{1/3} k \geq \frac{N}{A} D^R_{\Delta f}, \quad 1 \leq k \leq \min\{\left[\frac{N^2-1}{2}\right], K_R\}. \end{cases}$$

C'est l'ensemble des conditions (74) qui servira de base à notre étude cette année. En 1981-82 l'ensemble de conditions de non interférence se réduisait essentiellement à

$$(75) \qquad e_k k \geq 2^{1/3} \frac{N}{A} D^R_{\Delta f}, \qquad 1 \leq k \leq \min\left\{\left[\frac{N^2-1}{2}\right], K_R\right\}$$

avec un

$$(76) \qquad D^R_{\Delta f} = 100/6 \simeq 16,6 \qquad \text{(en 1981-82)}.$$

Cette condition assurait la non interférence par intermodulation R_X et assurait une certaine désensibilisation. L'utilisation de la condition (74c) et de l'algorithme décrit au paragraphe 4.3 représente un raffinement important sur la condition (75). Malheureusement les nouvelles valeurs de $D^R_{\Delta f}$

$$(77) \qquad D^R_{\Delta f} = \left\{\begin{array}{ll} 22,35 & , P_{MIN} = -132 \\ 30,38 & , P_{MIN} = -140 \\ 41,30 & , P_{MIN} = -148 \end{array}\right\}$$

sont beaucoup moins avantageuses que celles de 1981-82.

5.2.3 *Calcul des distances* e_k

Le dernier élément essentiel à la vérification des conditions de non interférence (74) est le calcul des distances e_k. Ce calcul pourrait se faire dans l'ordre croissant des k mais l'algorithme du paragraphe 4.3 pour la vérification de la condition (74c) nécessite que pour chaque nombre impair p l'on calcule la suite

$$(78) \qquad e_p, e_{2p}, e_{4p}, e_{8p}, e_{16p}, \cdots$$

Il faut donc un algorithme qui pour k donné aille chercher le ou un point (i_1, i_2) tel que

$$(79) \qquad e_k = \sqrt{i_1^2+i_2^2}\,.$$

Il est bon de se souvenir que e_k est la distance minimum entre l'origine (0,0) et les points (i_1,i_2) du plan $Z \times Z$ où sont assignées les fréquences k du spectre $\mathbb{M} = \{n \in Z \mid 0 \leq n < N^2\}$.

Au paragraphe 5.2 nous avons déjà établi que toutes les fréquences du spectre $\mathbb{M}$ se trouvent dans le disque

(80) $\quad C = \{(\ell,m) \mid \sqrt{\ell^2+m^2} \leq \sqrt{2}\,[N/2]\}$

où $[X]$ est le plus grand entier positif ou nul inférieur ou égal à X.

Il suffit donc de chercher la fréquence k dans le disque C pour calculer la distance e_k. Le théorème suivant indique comment construire l'ensemble de tous les points (i_1,i_2) tels que

(81) $\quad L(i_1,i_2) = (I_1 i_1 + I_2 i_2) \text{Mod } N^2 = (k) \text{Mod } N^2.$

Il n'y aura plus alors qu'à se limiter aux coordonnées à l'intérieur du disque C. De façon générale il ne pourra y avoir plus de quatre points correspondant à une fréquence k donnée,..et l'on soupçonne même qu'il puisse n'y en avoir plus que trois.

Théorème 6. Soit un entier k, $0 \leq k < N^2$. Les solutions (i_1,i_2) de l'équation (81) sont données comme suit, dans les cas (50a) et (50b).

(i) Cas (50a). $I_1 = NJ_1$, $(J_1,N) = 1$, et $(I_2,N) = 1$.

(82a) $$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \alpha_1 \nu_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + d_1 \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} -\alpha_1 I_2 \\ N \end{bmatrix}$$

où d_1 et d_2 sont des entiers arbitraires dans Z et α_1, $0 \leq \alpha_1 < N$, et $\nu_1 \in Z$ (resp. α_2, $0 \leq \alpha_2 < N$, et $\nu_2 \in Z$) sont tels que

(83a) $\quad \alpha_1 J_1 + \nu_1 N = 1 \quad$ (resp. $\alpha_2 I_2 + \nu_2 N = 1$).

(ii) Cas (50b). $I_2 = NJ_2$, $(J_2,N) = 1$, et $(I_1,N) = 1$.

(82b) $$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2\gamma_1 \end{bmatrix} + d_1\begin{bmatrix} N \\ -\alpha_2 I_1 \end{bmatrix} + d_2\begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}$$

où d_1 et d_2 sont des entiers arbitraires dans Z et α_1, $0 \leq \alpha_1 < N$, et $\nu_1 \in Z$ (resp. α_2, $0 \leq \alpha_2 < N$, et $\nu_2 \in Z$) sont tels que

(83b) $\alpha_1 I_1 + \nu_1 N = 1$ (resp. $\alpha_2 J_2 + \nu_2 N = 1$). □

L'algorithme consiste à d'abord chercher $\alpha_1, \alpha_2, \nu_1$ et ν_2. Ensuite on détermine les couples (d_1,d_2) pour lesquels $(i_1,i_2) \in C$.

5.2.4 *Stratégies linéaires non uniformes dans un losange ou un parallélogramme*

Il s'agit essentiellement de changer la distribution géographique des stations en faisant varier l'angle θ entre l'axe i_2 et l'axe i_1 d'une part et en introduisant des changements d'échelle $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ le long des axes i_1 et i_2 d'autre part. Dans le cas de la rotation θ, un angle de 60^o produit une assignation uniforme

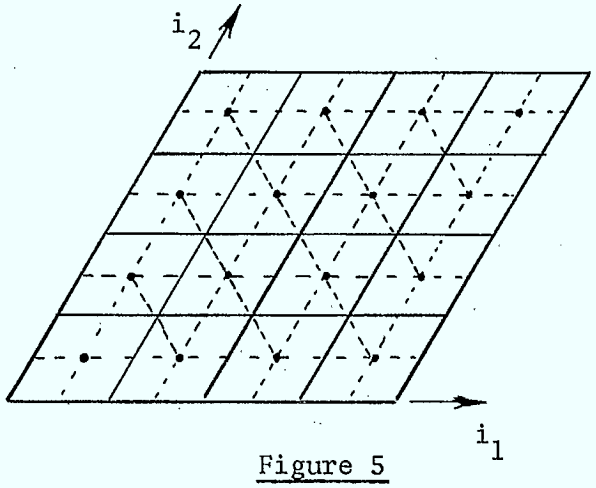


Figure 5

où les antennes se retrouvent au centre de petits losanges. Autour de chaque station, on retrouve six (6) stations placées aux sommets d'un

hexagone. Ceci est un cas particulier intéressant mais, en général, l'assignation obtenue n'est pas uniforme.

De façon générale, les méthodes sont les mêmes que pour le carré sauf pour ce qui a trait au calcul des distances D entre deux points (i_1,i_2) et (j_1,j_2) qui devient

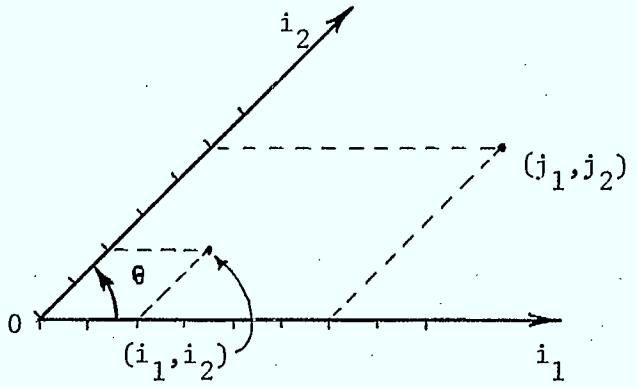


Figure 6

$$D^2 = (j_1-i_1)^2 + (j_2-i_2)^2 + 2(j_1-i_1)(j_2-i_2)\cos\theta \,. \tag{84}$$

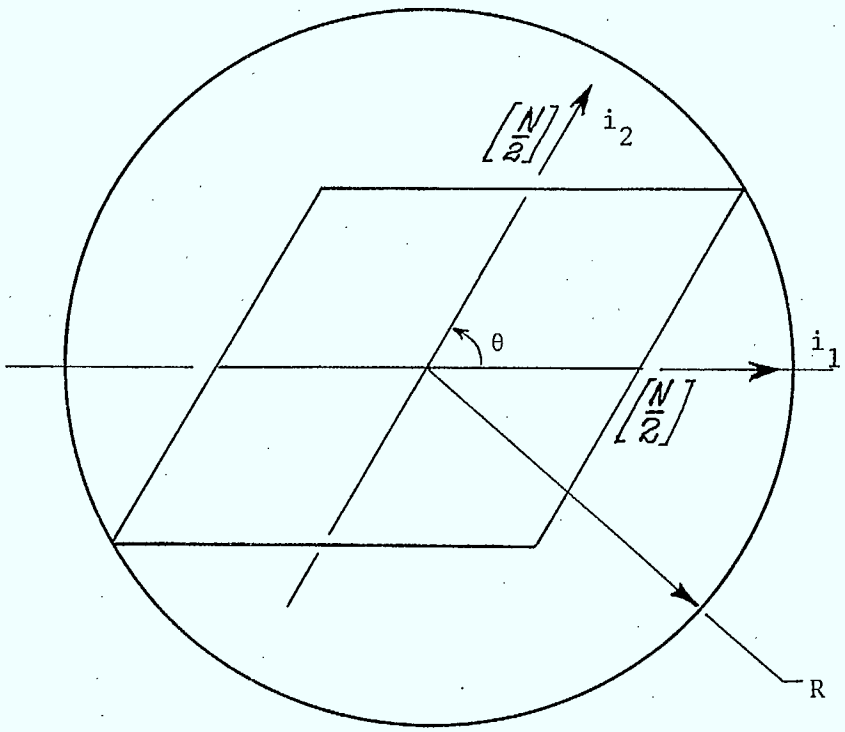


Figure 7

Il faut aussi modifier le calcul du rayon du disque C dans lequel on recherche les e_k de la façon suivante:

$$R = \left[\frac{N}{2}\right] \sqrt{2+2|\cos\theta|}, \qquad 0 < \theta < \pi . \tag{85}$$

Si l'on introduit en plus des changements d'échelle $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ le long des axes i_1 et i_2, le calcul des distances devient

$$D^2 = [a_1(j_1-i_1)]^2+[a_2(j_2-i_2)]^2+2a_1a_2(j_1-i_1)(j_2-i_2)\cos\theta \tag{86}$$

et celui du rayon du disque C devient

$$R = \left[\frac{N}{2}\right] \sqrt{a_1^2+a_2^2+2a_1a_2|\cos\theta|}, \qquad 0 < \theta < \pi \tag{87}$$

5.3 *Stratégies linéaires dans un rectangle*

Avant d'aborder ce paragraphe, il est conseillé de lire d'abord le paragraphe 5.2 auquel on renverra souvent.

5.3.1 *Caractérisation et propriétés*

La démarche adoptée est un peu celle du paragraphe 5.2.1 pour un carré. On caractérise d'abord les Z-homomorphismes:

$$\begin{aligned} &L: Z \times Z \to \mathbb{M} \\ &\mathbb{M} = \{\, n \in Z \mid 0 \le n < N_1N_2 \,\} \end{aligned} \tag{88}$$

qui définissent des stratégies linéaires.

Théorème 7. (i) Tout Z-homomorphisme L donné par (88) est de la forme

$$L(i_1,i_2) = (i_1I_1+i_2I_2) \text{ Mod } (N_1N_2) \tag{89}$$

où I_1 et I_2 sont des entiers tels que

$$0 \le I_1 < N_1N_2, \qquad 0 \le I_2 < N_1N_2. \tag{90}$$

(ii) Un Z-homomorphisme de la forme (88)-(89) possède la propriété

$$L(\mathbb{N}_1\times\mathbb{N}_2) = \mathbb{M} \tag{91}$$

si et seulement si les entiers I_1 et I_2 dans (90) vérifient l'une ou

l'autre des conditions suivantes:

(92a) $I_1 = N_2 J_1$, $(J_1, N_1) = 1$ et $(I_2, N_2) = 1$

ou

(92b) $I_2 = N_1 J_2$, $(J_2, N_2) = 1$ et $(I_1, N_1) = 1$. □

La démonstration de cet important théorème ne sera pas donnée ici, mais est disponible.

Comme dans le cas du carré, les stratégies linéaires d'assignation s'étendent à tout le plan où elles possèdent la propriété de reproducibilité suivante.

Théorème 8. Soit L une stratégie linéaire possédant la propriété (91). Alors si l'on construit en n'importe quel point (s_1, s_2) du plan ZxZ le rectangle

(93) $\{(i_1, i_2) \mid s_1 \leq i_1 < s_1 + N_1, \quad s_2 \leq i_2 < s_2 + N_2\}$

on y retrouvera toutes les $N_1 N_2$ fréquences du spectre $\mathbb{M}$. De façon plus précise,

(94) $L(i_1, i_2) = L(i_1 - s_1, i_2 - s_2) \oplus L(s_1, s_2)$

et les fréquences assignées au rectangle (93) sont une translation "modulo $N_1 N_2$" des fréquences assignées au rectangle $\mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2$. □

Théorème 9. Pour $N_1 \geq 2$ et $N_2 \geq 2$, soient le disque

(95) $C = \{(\ell_1, \ell_2) \mid \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} \leq R = \sqrt{\left[\frac{N_1}{2}\right]^2 + \left[\frac{N_2}{2}\right]^2}\}$

et le carré

(96) $E = \{(\ell_1, \ell_2) \mid -N_1 < \ell_1 < N_1, \quad -N_2 < \ell_2 < N_2\}$

où $[X]$ est le plus grand nombre entier positif ou nul inférieur ou égal à X.

(i) Pour $N_1 \geq 2$, $N_2 \geq 2$,

(97) $C \subset E$.

(ii) Si L est une stratégie linéaire vérifiant la propriété (91), alors les N_1N_2 fréquences du spectre $\mathbb{M}$ sont assignées dans le disque C

(98) $L(C) \supset \mathbb{M}$.

Démonstration. Analogue à celle du Théorème 4. □

Dans le cas d'un rectangle le nombre de symétries est considérablement réduit comme le montre le théorème suivant si on le compare avec le théorème 5 pour un carré.

Théorème 10. Soit L une stratégie linéaire caractérisée par le couple d'entiers (I_1,I_2)

(99) $$\begin{cases} L(i_1,i_2) = (i_1I_1+i_2I_2) \text{ Mod } (N_1N_2) \\ 0 \le I_1 < N_1N_2, \quad 0 \le I_2 < N_1N_2 . \end{cases}$$

Les transformations suivantes du couple (I_1,I_2) ne changent pas les positions relatives des fréquences assignées.

1) Rotation de 90^o plus pivotement

(100) $(I_1,I_2) \to (N_1N_2-I_1,I_2)$.

2) Rotation de 270^o plus pivotement

(101) $(I_1,I_2) \to (I_1,N_1N_2-I_2)$.

3) Rotation de 180^o

(102) $(I_1,I_2) \to (N_1N_2-I_1,N_1N_2-I_2)$. □

Ici aussi le théorème 10 nous permet de réduire la recherche des paires admissibles (I_1,I_2) par un facteur 4 en nous restreignant aux paires

(103) $2 \le I_1 \le [N_1N_2/2], \quad 1 \le I_2 \le [N_1N_2/2]$.

Les autres paires admissibles seront obtenues en utilisant l'une des trois transformations décrites dans le théorème 10.

5.3.2 *Conditions de non interférence*.

Pour cette question on suit textuellement la démarche du paragraphe 5.2.2 pour le carré avec les modifications suivantes dans la définition des ensembles E_k:

$$E_k(i_1,i_2) = \{(j_1,j_2) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 \,|\, L(j_1-i_1, j_2-i_2) = (k) \mathrm{Mod}(N_1N_2)\} \tag{104}$$

$$E_k = \{(j_1-i_1, j_2-i_2) \,|\, (j_1,j_2) \in E_k(i_1,i_2),\ (i_1,i_2) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2\} \tag{105}$$

$$E_k = \{(\ell_1,\ell_2) \in E \,|\, L(\ell_1,\ell_2) = (k) \mathrm{Mod}(N_1N_2)\} \tag{106}$$

où l'ensemble E est défini par (96).

Les identités (69) et (70) demeurent vraies et

$$E_k = F_k \cup F_{-(N_1N_2-k)},\quad E_{-k} = F_{-k} \cup F_{(N_1N_2-k)} \tag{107}$$

et aussi

$$e_k = e_{(N_1N_2-k)},\qquad 1 \le k < N_1N_2\ . \tag{108}$$

Ceci donne l'analogue des conditions de non interférence (74) où K et K_R sont calculés par (34) et (37)

$$\text{(109a)}\quad \begin{cases} D^A_{\Delta f} \le \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D^A_{\Delta f} > \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad e_1 \ge \dfrac{N_1}{A}\, D^A_{\Delta f} \end{cases}$$

$$\text{(109b)}\quad \begin{cases} D^{DT}_1 \le \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D^{DT}_1 > \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad e_k \ge \dfrac{N_1}{A}\, D^{DT}_k, \qquad 1 \le k \le \min\{K, \left[\dfrac{N_1N_2}{2}\right]\} \end{cases}$$

$$\text{(109c)}\quad \begin{cases} D^R_{\Delta f} \le \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D^R_{\Delta f} > \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad e_k^{2/3}\, e_{2k}^{1/3}\, k \ge \dfrac{N_1}{A}\, D^R_{\Delta f}, \qquad 1 \le k \le \min\{\left[\dfrac{N_1N_2-1}{2}\right], K_R\}. \end{cases}$$

C'est l'ensemble des conditions (109) qui servira de base à notre étude pour le rectangle.

5.3.3 *Calcul des distances e_k*

Comme pour le carré au paragraphe 5.2.3, l'élément essentiel à la vérification des conditions de non interférence (109) est le calcul des distances e_k. Ce calcul se fait de la même façon qu'au paragraphe 5.2.3.

En effet nous avons établi au théorème 9 que toutes les fréquences du spectre $\mathbb{M}$ se trouvent dans le disque

$$(110) \qquad C = \{(\ell_1,\ell_2) \mid \sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2} \le R = \sqrt{\left[\frac{N_1}{2}\right]^2 + \left[\frac{N_2}{2}\right]^2} \ \}$$

Il suffit donc de chercher dans le disque C pour trouver toutes les distances e_k.

Le théorème suivant est l'analogue du théorème 6 pour le carré. Il permet de construire tous les points $(i_1,i_2) \in ZxZ$ tels que

$$(111) \qquad L(i_1,i_2) = (I_1 i_1 + I_2 i_2) \text{Mod}(N_1N_2) = (k) \text{Mod}(N_1N_2).$$

Théorème 11. Soit un entier k, $0 \le k < N_1N_2$. Les solutions (i_1,i_2) de l'équation (111) sont données comme suit dans les cas (92a) et (92b).

(i) Cas (92a). $I_1 = N_2J_1$, $(J_1,N_1) = 1$, et $(I_2,N_2) = 1$.

$$(112a) \qquad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \alpha_1\nu_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + d_1 \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} -\alpha_1 I_2 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

où d_1 et d_2 sont des entiers arbitraires dans Z et α_1, $0 \le \alpha_1 < N_1$, et $\nu_1 \in Z$ (resp. α_2, $0 \le \alpha_2 < N_2$, $\nu_2 \in Z$) sont tels que

$$(113a) \qquad \alpha_1 J_1 + \nu_1 N_1 = 1 \quad (\text{resp. } \alpha_2 I_2 + \nu_2 N_2 = 1).$$

(ii) Cas (92b). $I_2 = N_1 J_2$, $(J_2, N_2) = 1$, et $(I_1, N_1) = 1$.

$$\text{(112b)} \qquad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \gamma_1 \end{bmatrix} + d_1 \begin{bmatrix} N_1 \\ -\alpha_2 I_1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \end{bmatrix} ,$$

où d_1 et d_2 sont des entiers arbitraires dans Z et α_1, $0 \leq \alpha_1 \leq N_1$, et $\nu_1 \in Z$ (resp. α_2, $0 \leq \alpha_2 < N_2$, et $\nu_2 \in Z$) sont tels que

$$\text{(113b)} \qquad \alpha_1 I_1 + \nu_1 N_1 = 1 \qquad \text{(resp. } \alpha_2 J_2 + \nu_2 N_2 = 1).$$

Ici aussi l'algorithme consiste à d'abord chercher $\alpha_1, \alpha_2, \nu_1, \nu_2$. Ensuite on détermine les couples (d_1, d_2) pour lesquels $(i_1, i_2) \in C$.

5.3.4 *Stratégies non uniformes dans un parallélogramme*

Comme au paragraphe 5.2.4, il s'agit essentiellement de changer la distribution géographique des stations en faisant varier l'angle θ entre les axes i_2 et i_1 d'une part et en introduisant des changements d'échelle $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ le long des axes i_1 et i_2 d'autre part.

Pour le cas de la rotation simple tout ce qui a été dit précédemment demeure vrai sauf le calcul des distances D entre deux points (j_1, j_2) et (i_1, i_2) qui devient

$$\text{(114)} \qquad D^2 = (j_1 - i_1)^2 (j_2 - i_2)^2 + 2(j_1 - i_1)(j_2 - i_2)\cos\theta$$

et celui du rayon R du disque C

$$\text{(115)} \qquad R^2 = \left[\frac{N_1}{2}\right]^2 + \left[\frac{N_2}{2}\right]^2 + 2\left[\frac{N_1}{2}\right]\left[\frac{N_2}{2}\right]|\cos\theta|, \quad 0 < \theta < \pi .$$

Pour le cas combiné de la rotation θ et des dilatations a_1 et a_2 le calcul des distances D et du rayon R du disque C deviennent

$$(116) \qquad D^2 = (a_1(j_1-i_1))^2 + (a_2(j_2-i_2))^2 + 2a_1a_2(j_1-i_1)(j_2-i_2)\cos\theta$$

$$(117) \qquad R^2 = (a_1\left[\frac{N_1}{2}\right])^2 + (a_2\left[\frac{N_2}{2}\right])^2 + 2(a_1\left[\frac{N_1}{2}\right])(a_2\left[\frac{N_2}{2}\right])|\cos\theta| \ , \quad 0 < \theta < \pi$$

6. STRATEGIES LINEAIRES D'ASSIGNATION VECTORIELLE (HORIZONTALE ET VERTICALE)

Nous avons vu au paragraphe 5 comment assigner N_1N_2 fréquences dans un rectangle de dimension A par AN_2/N_1. Nous allons maintenant voir comment assigner $N_1N_2N_3$ fréquences dans un parallélépipède rectangle de base rectangulaire A par AN_2/N_1 et de hauteur AN_3/N_1. Ceci reviendra à assigner au centre de chacun des petits carrés du rectangle horizontal un vecteur de N_3 fréquences. On pourra dire qu'elles sont assignées sur un même mât L'hypothèse sous-jacente à cette construction est qu'il n'y aura pas d'interférence entre les N_3 fréquences assignées sur un même mât en un point du plan horizontal

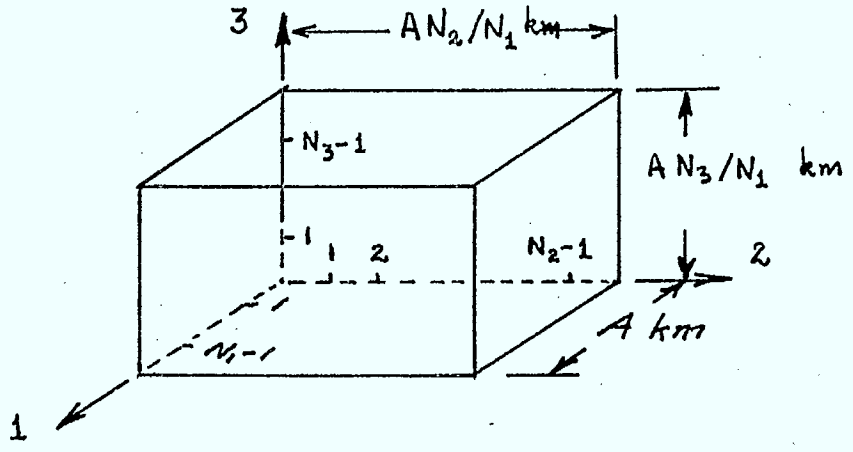


Figure 1

6.1 *Assignation uniforme dans un parallélépipède rectangle*

Etant donné trois entiers $N_1 \geq 1$, $N_2 \geq 1$ et $N_3 \geq 1$, le spectre sera défini par

(1) $\mathbb{M} = \{n \mid 0 \leq n < N_1N_2N_3\}$

avec la structure d'anneau algébrique telle que définie au paragraphe 5.1.1 (équations (5.8) à (5.11)).

L'assignation uniforme du spectre $\mathbb{M}$ au parallélépipède rectangle

(2) $\mathbb{N}_{123} = \{(i_1,i_2,i_3) \mid 0 \leq i_n < N_n, \quad n=1,2,3\}$

consiste à associer à chaque point de $\mathbb{N}_{123}$ un élément du spectre $\mathbb{M}$ de façon à épuiser complètement les fréquences du spectre $\mathbb{M}$. En d'autres termes, cela revient à chercher une bijection

(3) $a: \mathbb{N}_{123} \rightarrow \mathbb{M}$

6.2 *Expression des conditions de non interférence*

Comme au paragraphe 5.1.3 on peut associer à chaque point $(i_1,i_2,i_3) \in \mathbb{N}_{123}$

et à chaque $k \in Z$, $|k| < N_1N_2N_3$, les ensembles

(4) $F_k(i_1,i_2,i_3) = \{(j_1,j_2,j_3) \in \mathbb{N}_{123} \mid a(j_1,j_2,j_3)-a(i_1,i_2,i_3) = k\}$

(5) $F_k = \{(j_1-i_1,j_2-i_2,j_3-i_3) \mid (j_1,j_2,j_3) \in F_k(i_1,i_2,i_3),\ (i_1,i_2,i_3) \in \mathbb{N}_{123}\}$

et les quantités

(6) $f_k = \text{Min}\{\sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2} \mid (\ell_1,\ell_2,\ell_3) \in F_k \text{ et } (\ell_1,\ell_2) \neq (0,0)\}$

(7) $\forall k \geq 1, \quad \delta_k = \text{Min}\{f_k, f_{-k}\}.$

Le calcul de la distance f_k implique deux hypothèses:

H1) Il n'y a pas d'interaction entre les fréquences assignées verticalement en un point donné (i_1,i_2) du plan horizontal

(8) $v(i_1,i_2) = \{a(i_1,i_2,i_3) \mid 0 \leq i_3 < N_3\}$

H2) Les distances géographiques entre les fréquences de $v(i_1,i_2)$ sont petites par rapport aux distances entre stations et peuvent être négligées dans le calcul des distances intervenant dans les calculs de non interférence.

Les hypothèses H1) et H2) indiquent que la coordonnée verticale i_3 est artificielle et ne sert qu'à distinguer les fréquences du vecteur $v(i_1,i_2)$ au point (i_1,i_2).

Pour revenir aux ensembles F_k, on s'aperçoit qu'il est inutile de considérer les valeurs négatives de k puisque

$$F_{-k} = \{(-\ell_1,-\ell_2,-\ell_3) \mid (\ell_1,\ell_2,\ell_3) \in F_k\} \tag{9}$$

et donc

$$\underset{\substack{\underline{\ell}\in F_{-k} \\ (\ell_1,\ell_2)\neq(0,0)}}{\text{Min}} \sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2} = \underset{\substack{\underline{\ell}\in F_{k} \\ (\ell_1,\ell_2)\neq(0,0)}}{\text{Min}} \sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2} = \underset{\substack{\underline{\ell}\in F_k \cup F_{-k} \\ (\ell_1,\ell_2)\neq(0,0)}}{\text{Min}} \sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2} \tag{10}$$

où $\underline{\ell}$ est le vecteur

$$\underline{\ell} = (\ell_1,\ell_2,\ell_3). \tag{11}$$

En conclusion

$$\delta_k = f_k = f_{-k} \tag{12}$$

et il suffira de construire les ensembles F_k pour $k \geq 1$ pour calculer les distances δ_k.

Les distances δ_k sont exprimées en unités de longueur A/N_1 et les vraies distances sont données par

$$d_k = \frac{A}{N_1}\delta_k, \qquad k \geq 1. \tag{13}$$

En utilisant les notations du paragraphe 4.2, on obtient comme au paragraphe 5.1.3 un ensemble de conditions suffisantes de non interférence

$$\begin{cases} d_1 \geq D^A_{\Delta f} \\ d_k \geq D^{DT}_k, \qquad 1 \leq k < N_1N_2N_3 \\ d_k^{2/3}\, d_{2k}^{1/3}\ k \geq D^R_{\Delta f}, \qquad 1 \leq k \leq \left[\frac{N_1N_2N_3-1}{2}\right] \end{cases} \tag{14}$$

ou encore en unités de A/N_1

$$(15)\quad \begin{cases} \delta_1 \geq \dfrac{N_1}{A} D^A_{\Delta f} \\ \delta_k \geq \dfrac{N_1}{A} D^{DT}_k, \quad 1 \leq k < N_1N_2N_3 \\ \delta_k^{2/3}\delta_k^{1/3}{}_k \geq \dfrac{N_1}{A} D^R_{\Delta f}, \quad 1 \leq k \leq \left[\dfrac{N_1N_2N_3-1}{2}\right] \end{cases}$$

Il est important de ne pas perdre de vue que d'une part les ensembles de conditions (14) ou (15) ne sont que des ensembles de conditions suffisantes et que d'autre part ces conditions ne sont pas nécessairement indépendantes les unes des autres. Par exemple la première condition d'adjacence implique la seconde condition pour k=1 et, dépendant de P_{MIN}, la troisième condition n'a pas besoin d'être vérifiée pour tous les cas (cf. équation (2.24)).

Comme au paragraphe 5.1.3 il faut aussi tenir compte du fait que deux stations sont au moins distantes de A/N_1

$$(16)\quad \forall k \geq 1, \quad d_k \geq A/N_1, \quad \text{et} \quad \delta_k \geq 1.$$

Cette dernière remarque nous donne l'expression finale de l'ensemble des conditions (15) où les entiers K et K_R sont construits de la façon suivante. Si

$$(17)\quad D^{DT}_1 > A/N_1$$

on pourra toujours trouver un entier K tel que

$$(18)\quad D^{DT}_{K+1} \leq A/N_1 \quad \text{et} \quad D^{DT}_K > A/N_1;$$

si

$$(19)\quad D^R_{\Delta f} > A/N_1$$

on pourra toujours trouver un entier K_R tel que

(20) $$K_R < \frac{N_1}{A} D^R_{\Delta f} \leq K_R+1.$$

Avec ces définitions l'ensemble de conditions (15) devient

(21a)
$$\begin{cases} D^A_{\Delta f} \leq \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D^A_{\Delta f} > \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \delta_1 \geq \frac{N_1}{A} D^A_{\Delta f} \end{cases}$$

(21b)
$$\begin{cases} D^{DT}_1 \leq \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D^{DT}_1 > \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \delta_k \geq \frac{N_1}{A} D^{DT}_k, \quad 1 \leq k \leq \min\{K, N_1N_2N_3-1\} \end{cases}$$

(21c)
$$\begin{cases} D^R_{\Delta f} \leq \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D^R_{\Delta f} > \frac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \delta_k^{2/3}\delta_{2k}^{1/3}k \geq \frac{N_1}{A} D^R_{\Delta f}, \quad 1 \leq k \leq \min\{K_R, \left[\frac{N_1N_2N_3-1}{2}\right]\} \end{cases}$$

Comme nous l'avons vu dans les Exemples 2 et 3 du paragraphe 5.1.3 l'introduction des K et K_R réduit de façon importante l'ensemble des entiers k pour lesquels les conditions (21) doivent être vérifiées.

6.3 *Stratégies linéaires dans un parallélépipède rectangle*

Comme dans le cas du rectangle au paragraphe 5.1.4, nous allons utiliser la structure algébrique du spectre $\mathbb{M}$. En définissant la multiplication par un scalaire comme

(22) $$\forall \alpha \in Z, \quad \forall m \in \mathbb{M}, \quad \alpha \cdot m = (\alpha m) \text{ Mod } (N_1N_2N_3)$$

le spectre devient un module sur Z et l'on peut parler du Z-homomorphisme

(23) $$L: Z \times Z \times Z \rightarrow \mathbb{M}$$

(24) $$\forall \underline{i}, \underline{j}, \quad L(i_1+j_1, i_2+j_2, i_3+j_3) = L(i_1,i_2,i_3) \oplus L(j_1,j_2,j_3)$$

(25) $$\forall \alpha \in Z, \quad \forall \underline{i}, \quad L(\alpha i_1, \alpha i_2, \alpha i_3) = \alpha \cdot L(i_1,i_2,i_3).$$

Définition 1. On dira qu'un Z-homomorphisme $L: Z\times Z\times Z \to \mathbb{M}$ est une stratégie linéaire si sa restriction à $\mathbb{N}_{123}$ est une bijection, c'est-a-dire

(26) $\quad L(\mathbb{N}_{123}) = \mathbb{M}$ $\quad\square$

Les stratégies linéaires sont complètement caractérisées par le théorème suivant.

Théorème 2. (i) Tout Z-homomorphisme

(27) $\quad L: Z\times Z\times Z \to \mathbb{M}$

est de la forme

(28) $\quad L(i_1,i_2,i_3) = (i_1I_1+i_2I_2+i_3I_3)\,\mathrm{Mod}(N_1N_2N_3)$

où I_1, I_2 et I_3 sont des entiers tels que

(29) $\quad 0 \le I_n < N_1N_2N_3, \quad n=1,2,3.$

(ii) Un Z-homomorphisme de la forme (27)-(28) possède la propriété

(30) $\quad L(\mathbb{N}_{123}) = \mathbb{M}$

si et seulement si les entiers I_1, I_2 et I_3 dans (29) vérifient l'une ou l'autre des conditions suivantes:

(31a) $\begin{cases} I_3 = N_1N_2J_3, & (J_3,N_3) = 1 \\ I_2 = N_1J_2, & (J_2,N_2) = 1, \quad \text{et} \quad (I_1,N_1) = 1, \end{cases}$

(31b) $\begin{cases} I_3 = N_1N_2J_3, & (J_3,N_3) = 1 \\ I_1 = N_2J_1, & (J_1,N_1) = 1, \quad \text{et} \quad (I_2,N_2) = 1 \end{cases}$

(31c) $\begin{cases} I_1 = N_2N_3J_1, & (J_1,N_1) = 1, \\ I_3 = N_2J_3, & (J_3,N_3) = 1, \quad \text{et} \quad (J_2,N_2) = 1, \end{cases}$

(31d) $\begin{cases} I_1 = N_2N_3J_1, & (J_1,N_1) = 1, \\ I_2 = N_3J_2, & (J_2,N_2) = 1, \quad \text{et} \quad (I_3,N_3) = 1, \end{cases}$

$$(31e)\quad \begin{cases} I_2 = N_3N_1J_2, & (J_2,N_2) = 1 \\ I_1 = N_3J_1, & (J_1,N_1) = 1, \quad \text{et} \quad (I_3,N_3) = 1, \end{cases}$$

$$(31f)\quad \begin{cases} I_2 = N_3N_1J_2, & (J_2,N_2) = 1, \\ I_3 = N_1J_3, & (J_3,N_3) = 1 \quad \text{et} \quad (I_1,N_1) = 1. \end{cases} \qquad \square$$

La démonstration de ce théorème ne sera pas donnée ici, mais est disponible.

Les stratégies linéaires s'étendent à tout l'espace où elles possèdent la propriété de reproducibilité suivante

Théorème 3. Soit L une stratégie linéaire possédant la propriété (30). Alors si, en n'importe quel point $\underline{s} = (s_1,s_2,s_3)$ de l'espace $Z \times Z \times Z$, on construit le parallélépipède rectangle

$$(32)\qquad \{(i_1,i_2,i_3) \,|\, s_n \le i_n < s_n+N_n,\ n=1,2,3\},$$

on y retrouvera les $N_1N_2N_3$ fréquences du spectre $\mathbb{M}$. De façon plus précise

$$(33)\qquad L(i_1,i_2,i_3) = L(i_1-s_1,i_2-s_2,i_3-s_3) \oplus L(s_1,s_2,s_3)$$

et les fréquences assignées au rectangle (32) sont une translation "modulo $N_1N_2N_3$" des fréquences assignées au parallélépipède rectangle $\mathbb{N}_{123}$. $\square$

Comme les entiers N_1,N_2 et N_3 sont, en général, différents le nombre de symétries sera limité comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 4. Soit L une stratégie linéaire caractérisée par un triplet (I_1,I_2,I_3)

$$(34)\quad \begin{cases} L(i_1,i_2,i_3) = (i_1I_1+i_2\ I_2+i_3\ I_3)\text{Mod}(N_1N_2N_3) \\ 0 \le I_n < N_1N_2N_3, \quad n=1,2,3. \end{cases}$$

Les transformations suivantes du triplet (I_1,I_2,I_3) ne changent pas les positions relatives des fréquences assignées.

(35) $(I_1,I_2,I_3) \rightarrow (N_1N_2N_3-I_1,I_2,I_3)$

(36) $(I_1,I_2,I_3) \rightarrow (I_1,N_1N_2N_3-I_2,I_3)$

(37) $(I_1,I_2,I_3) \rightarrow (N_1N_2N_3-I_1,N_1N_2N_3-I_2,I_3)$

(38) $(I_1,I_2,I_3) \rightarrow (I_1,I_2,N_1N_2N_3-I_3)$

(39) $(I_1,I_2,I_3) \rightarrow (N_1N_2N_3-I_1,I_2,N_1N_2N_3-I_3)$

(40) $(I_1,I_2,I_3) \rightarrow (I_1,N_1N_2N_3-I_2,N_1N_2N_3-I_3)$

(41) $(I_1,I_2,I_3) \rightarrow (N_1N_2N_3-I_1,N_1N_2N_3-I_2,N_1N_2N_3-I_3)$

Comme la coordonnée verticale i_3 possède une signification spéciale lorsque l'on fera les calculs de non interférence, il ne sera pas alors possible d'utiliser les transformations (38) à (41). Les transformations (35) à (37) permettront de réduire le nombre de cas admissibles que par un facteur de quatre.

6.4 *Simplification des conditions de non interférence*

On revient au paragraphe 6.2 de la definition (4) à (7) des ensembles F_k, des quantités f_k et de l'ensemble (21) des conditions suffisantes de non interférence.

Comme dans le cas du rectangle, on s'aperçoit que pour les stratégies linéaires il est plus avantageux de travailler avec les ensembles

(42) $E_k(\underline{i}) = \{\underline{j} \in \mathbb{N}_{123} | L(\underline{j}-\underline{i}) = (k)\text{Mod}(N_1N_2N_3)\}$

(43) $E_k = \{\underline{j}-\underline{i} | \underline{j} \in E_k(\underline{i}),\ \underline{i} \in \mathbb{N}_{123}\}.$

Cet avantage réside dans le fait qu'il est facile de montrer que

(44) $E_k = \{\underline{\ell} \in E | L(\underline{\ell}) = (k)\text{Mod}(N_1N_2N_3)\}$

où l'ensemble E est défini comme suit

$$(45) \qquad E = \{\underline{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \,|\, -N_n < \ell_n < N_n,\ n=1,2,3\}.$$

Comme au paragraphe 6.2, on associe à chaque E_k l'équivalent des quantités f_k et δ_k. On montre en particulier que

$$(46) \qquad \min_{\underline{\ell}\in E_{-k}} \sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2} = \min_{\underline{\ell}\in E_k} \sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2} = \min_{\underline{\ell}\in E_k \cup E_{-k}} \sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2}$$

On pose donc

$$(47) \qquad \forall k \geq 1, \quad e_k = \min_{\underline{\ell}\in E_k} \sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2}\ , \quad e_k^+ = \mathrm{Min}\{\sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2} \,|\, \underline{\ell}\in E_k,\ (\ell_1,\ell_2)\neq(0,0)\}.$$

Les ensembles E_k sont plus gros que les ensembles F_k et il est facile de montrer que

$$(48) \qquad E_k = F_k \cup F_{-(N_1N_2N_3-k)}, \quad E_{-k} = F_{-k} \cup F_{N_1N_2N_3-k}$$

et donc que

$$(49) \qquad e_k = e_{N_1N_2N_3-k}, \quad e_k^+ = e^+_{N_1N_2N_3-k}\ , \qquad 1 \leqslant k < N_1N_2N_3.$$

Cette symétrie va nous permettre de limiter encore la vérification de l'ensemble (21) des conditions de non interférence:

$$(50) \qquad \begin{cases} e_1^+ \geq \dfrac{N_1}{A}\, D^A_{\Delta f} \\ e_k^+ \geq \dfrac{N_1}{A}\, D_k^{DT}\ , \quad 1 \leq k \leq \left[\dfrac{N_1N_2N_3}{2}\right] \\ e_k^{+2/3}\, e_{2k}^{+1/3} k \geq \dfrac{N_1}{A}\, D^R_{\Delta f}, \quad 1 \leq k \leq \left[\dfrac{N_1N_2N_3-1}{2}\right]. \end{cases}$$

Si l'on combine ce dernier résultat avec (21) on obtient finalement

$$(51a) \qquad \begin{cases} D^A_{\Delta f} \leq \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D^A_{\Delta f} > \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad e_1^+ \geq \dfrac{N_1}{A}\, D^A_{\Delta f} \end{cases}$$

$$(51b)\quad \begin{cases} D_1^{DT} \le \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D_1^{DT} > \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad e_k^+ \ge \dfrac{N_1}{A} D_k^{DT}, \qquad 1 \le k \le \min\{K, \left[\dfrac{N_1 N_2 N_3}{2}\right]\} \end{cases}$$

$$(51c)\quad \begin{cases} D_{\Delta f}^{R} \le \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D_{\Delta f}^{R} > \dfrac{A}{N_1} & \Rightarrow \quad e_k^{+2/3}\, e_{2k}^{+1/3}{}_k \ge \dfrac{N_1}{A} D_{\Delta f}^{R}, \qquad 1 \le k \le \min\{\left[\dfrac{N_1 N_2 N_3 - 1}{2}\right], K_R\} \end{cases}$$

où les entiers K et K_R sont calculés de la façon suivante. Si

$$(52)\qquad D_1^{DT} > A/N_1$$

on peut toujours trouver un entier K tel que

$$(53)\qquad D_{K+1}^{DT} \le A/N_1 \quad \text{et} \quad D_K^{DT} > A/N_1 \ ;$$

si

$$(54)\qquad D_{\Delta f}^{R} \gtrless A/N_1$$

on peut toujours trouver un entier K_R tel que

$$(55)\qquad K_R < \frac{N_1}{A} D_{\Delta f}^{R} \le K_R + 1.$$

L'ensemble des conditions (51) servira de base à nos calculs de non interférence.

6.5 *Calcul des distances* e_k *et* e_k^+

Comme dans les cas du carré ou du rectangle, l'élément essentiel à la vérification des conditions de non interférence (51) est le calcul des distances e_k.

Ce calcul est un peu plus compliqué en trois dimensions car pour certains k, $1 \le k < N_1 N_2 N_3$, on peut trouver

$$e_k = 0$$

ce qui correspond à une position sur l'axe i_3

$i_1 = i_2 = 0$ et $i_3 \neq 0$.

Souvenons-nous de la définition de E et de E_k

(56) $e_k = \text{Min}\{\sqrt{i_1^2+i_2^2} \mid (i_1,i_2,i_3) \in E \text{ et } L(i_1,i_2,i_3) = (k)\text{Mod}(N_1N_2N_3)\}$

où

(57) $E = \{\underline{\ell} = (\ell_1,\ell_2,\ell_3) \mid |\ell_n| < N_n, \quad n=1,2,3\}.$

Pour éviter les cas où $e_k = 0$, on a introduit une nouvelle distance e_k^+ qui coincide avec e_k si $e_k > 0$ ou donne le minimum des distances entre (0,0) et les stations de fréquence k qui ne sont pas sur l'axe i_3

(58) $e_k^+ = \text{Min}\{\sqrt{i_1^2+i_2^2} \mid \underline{i} = (i_1,i_2,i_3) \in E, \sqrt{i_1^2+i_2^2} > 0 \text{ et } L(\underline{i}) = k\text{Mod}(N_1N_2N_3)\}$

pour $0 \leq k < N_1N_2N_3$.

Le calcul des e_k peut se faire de la façon habituelle, mais le calcul des e_k^+ correspondant à $e_k = 0$ va être un peu plus complexe.

6.5.1 Recherche des coordonnées des stations de fréquence k

De façon générale pour k donné, $0 \leq k < N_1N_2N_3$, on doit résoudre le problème suivant: trouver $(i_1,i_2,i_3) \in Z \times Z \times Z$ et $c \in Z$ tels que

(59) $I_1i_1+I_2i_2+I_3i_3 = k+cN_1N_2N_3$.

Théorème 5. Soit un entier k, $0 \leq k < N_1N_2N_3$. Les solutions (i_1,i_2,i_3) de l'équation (56) sont données comme suit dans les cas (31a) à (31f).

(i) Cas (31a). $I_3 = N_1N_2J_3$, $(J_3,N_3) = 1$;

$I_2 = N_1J_2$, $(J_2,N_2) = 1$ et $(I_1,N_1) = 1$

(60a) $$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2\nu_1 \\ \alpha_3\nu_2\nu_1 \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} N_1 \\ -\alpha_2 I_1 \\ -\alpha_3\nu_2 I_1 \end{bmatrix} d_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \\ -\alpha_3 J_2 \end{bmatrix} d_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_3 \end{bmatrix} d_3$$

où d_1, d_2, d_3 sont des entiers arbitraires dans Z et $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3$ sont des entiers construits de la façon suivante:

$$(61a)\quad \begin{cases} 0 \le \alpha_1 < N_1 & \text{tel que } \exists \nu_1 \in Z,\ \alpha_1 I_1 + \nu_1 N_1 = 1 \\ 0 \le \alpha_2 < N_2 & \text{tel que } \exists \nu_2 \in Z,\ \alpha_2 J_2 + \nu_2 N_2 = 1 \\ 0 \le \alpha_3 < N_3 & \text{tel que } \exists \nu_3 \in Z,\ \alpha_3 J_3 + \nu_3 N_3 = 1 \end{cases}.$$

(ii) Cas (31b). $I_3 = N_1 N_2 J_3$, $(J_3, N_3) = 1$,

$I_1 = N_2 J_1$, $(J_1, N_1) = 1$, et $(I_2, N_2) = 1$.

$$(60b)\quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\nu_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3\nu_2\nu_1 \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} -\alpha_1 I_2 \\ N_2 \\ -\alpha_3\nu_1 I_2 \end{bmatrix} d_2 + \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \\ -\alpha_3 J_1 \end{bmatrix} d_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_3 \end{bmatrix} d_3$$

où d_1, d_2, d_3 sont des entiers arbitraires dans Z et $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3$ sont des entiers construits de la façon suivante:

$$(61b)\quad \begin{cases} 0 \le \alpha_1 < N_1 & \text{tel que } \exists \nu_1 \in Z,\ \alpha_1 J_1 + \nu_1 N_1 = 1 \\ 0 \le \alpha_2 < N_2 & \text{tel que } \exists \nu_2 \in Z,\ \alpha_2 I_2 + \nu_2 N_2 = 1 \\ 0 \le \alpha_3 < N_3 & \text{tel que } \exists \nu_3 \in Z,\ \alpha_3 J_3 + \nu_3 N_3 = 1 \end{cases}$$

(iii) Cas (31c). $I_1 = N_2 N_3 J_1$, $(J_1, N_1) = 1$;

$I_3 = N_2 J_3$, $(J_3, N_3) = 1$, et $(I_2, N_2) = 1$.

$$(60c)\quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\nu_3\nu_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3\nu_2 \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} -\alpha_1\nu_3 I_2 \\ N_2 \\ -\alpha_3 I_2 \end{bmatrix} d_2 + \begin{bmatrix} -\alpha_1 J_3 \\ 0 \\ N_3 \end{bmatrix} d_3 + \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d_1$$

où d_1, d_2, d_3 sont des entiers arbitraires de Z et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ sont des entiers construits de la façon suivante:

$$(61c)\quad \begin{cases} 0 \le \alpha_1 < N_1 \text{ tel que } \exists \nu_1 \in Z, & \alpha_1 J_1 + \nu_1 N_1 = 1 \\ 0 \le \alpha_2 < N_2 \text{ tel que } \exists \nu_2 \in Z, & \alpha_2 I_2 + \nu_2 N_2 = 1 \\ 0 \le \alpha_3 < N_3 \text{ tel que } \exists \nu_3 \in Z, & \alpha_3 J_3 + \nu_3 N_3 = 1 \end{cases}$$

(iv) Cas (31d). $I_1 = N_2 N_3 J_1$, $(J_1, N_1) = 1$;

$I_2 = N_3 J_2$, $(J_2, N_2) = 1$, et $(I_3, N_3) = 1$.

$$(60d)\quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \nu_2 \nu_3 \\ \alpha_2 \nu_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} -\alpha_1 \nu_2 I_3 \\ -\alpha_2 I_3 \\ N_3 \end{bmatrix} d_3 + \begin{bmatrix} -\alpha_1 J_2 \\ N_2 \\ 0 \end{bmatrix} d_2 + \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d_1$$

où d_1, d_2, d_3 sont des entiers arbitraires de Z et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ sont des entiers construits de la façon suivante:

$$(61d)\quad \begin{cases} 0 \le \alpha_1 < N_1 \text{ tel que } \exists \nu_1 \in Z, & \alpha_1 J_1 + \nu_1 N_1 = 1 \\ 0 \le \alpha_2 < N_2 \text{ tel que } \exists \nu_2 \in Z, & \alpha_2 J_2 + \nu_2 N_2 = 1 \\ 0 \le \alpha_3 < N_3 \text{ tel que } \exists \nu_3 \in Z, & \alpha_3 I_3 + \nu_3 N_3 = 1 \end{cases}$$

(v) Cas (31e). $I_2 = N_3 N_1 J_2$, $(J_2, N_2) = 1$;

$I_1 = N_3 J_1$, $(J_1, N_1) = 1$, et $(I_3, N_3) = 1$.

$$(60e)\quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \nu_3 \\ \alpha_2 \nu_1 \nu_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} -\alpha_1 I_3 \\ -\alpha_2 \nu_1 I_3 \\ N_3 \end{bmatrix} d_3 + \begin{bmatrix} N_1 \\ -\alpha_2 J_1 \\ 0 \end{bmatrix} d_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \\ 0 \end{bmatrix} d_2$$

où d_1, d_2, d_3 sont des entiers arbitraires de Z et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ sont des entiers construits de la façon suivante:

$$(61e)\quad \begin{cases} 0 \le \alpha_1 < N_1 \text{ tel que } \exists \nu_1 \in Z, & \alpha_1 J_1 + \nu_1 N_1 = 1 \\ 0 \le \alpha_2 < N_2 \text{ tel que } \exists \nu_2 \in Z, & \alpha_2 J_2 + \nu_2 N_2 = 1 \\ 0 \le \alpha_3 < N_3 \text{ tel que } \exists \nu_3 \in Z, & \alpha_3 I_3 + \nu_3 N_3 = 1 \end{cases}$$

(vi) Cas (31f). $I_2 = N_3 N_1 J_2$, $(J_2, N_2) = 1$;

$I_3 = N_1 J_3$, $(J_3, N_3) = 1$, et $(I_1, N_1) = 1$

$$(60f) \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \nu_3 \nu_1 \\ \alpha_3 \nu_1 \end{bmatrix} k \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ -\alpha_2 \nu_3 I_1 \\ -\alpha_3 I_1 \end{bmatrix} d_1 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha_2 J_3 \\ N_3 \end{bmatrix} d_3 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \\ 0 \end{bmatrix} d_2$$

où d_1, d_2, d_3 sont des entiers arbitraires dans Z et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ sont des entiers construits de la façon suivante:

$$(61f) \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha_1 < N_1 \text{ tel que } \exists \nu_1 \in Z, \ \alpha_1 I_1 + \nu_1 N_1 = 1 \\ 0 \leq \alpha_2 < N_2 \text{ tel que } \exists \nu_2 \in Z, \ \alpha_2 J_2 + \nu_2 N_2 = 1 \\ 0 \leq \alpha_3 < N_3 \text{ tel que } \exists \nu_3 \in Z, \ \alpha_3 J_3 + \nu_3 N_3 = 1 \end{cases} . \square$$

6.5.2 *Calcul des e_k*

On utilise l'analogue du théorème 9 pour le rectangle (cf. paragraphe 5.3.1).

Théorème 6. Pour $N_1 \geq 2$, $N_2 \geq 2$, $N_3 \geq 1$, soient le cylindre tronqué

$$(62) \quad C = \{\underline{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \mid \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} \leq R = \sqrt{\left[\frac{N_1}{2}\right]^2 + \left[\frac{N_2}{2}\right]^2} \text{ et } |\ell_3| < N_3\}$$

et le parallélépipède rectangle E défini par (57), où $[X]$ est le plus plus grand nombre positif ou nul inférieur ou égal à X. (i) Pour $N_1 \geq 2$, $N_2 \geq 2$ et $N_3 \geq 1$,

(63) $C \subset E$.

(ii) Si L est une stratégie linéaire vérifiant la propriété (30), alors les $N_1 N_2 N_3$ fréquences du spectre $\mathbb{M}$ sont assignées dans le cylindre tronqué C

$L(C) \supset \mathbb{M}$. $\square$

La démonstration de ce théorème est analogue à celles des théorèmes 4 et 9 du paragraphe 5.

En fait l'on peut faire légèrement mieux.

Théorème 7. (i) Sous les hypothèses a,b,c,d,e ou f du théorème 2

(64) $\bar{N} = N_1N_2N_3/(I_3,N_1N_2N_3) = N_3\{N_1N_2/(I_3,N_1N_2)\} \geq N_3$

où (X,Y) est le plus grand commun diviseur des deux entiers X et Y.

(ii) Soit le cylindre tronqué

(65) $\bar{C} = \{(i_1,i_2,i_3) \mid \sqrt{i_1^2+i_2^2} \leq R \text{ et } |i_3| \leq \min\{[\bar{N}/2], N_3-1\}$

où

(66) $R = \sqrt{\left[\frac{N_1}{2}\right]^2 + \left[\frac{N_2}{2}\right]^2}$

où [X] est le plus grand entier positif ou nul inférieur ou égal à X. Pour tout k, $1 \leq k < N_1N_2N_3$

(67) $e_k = \text{Min}\{\sqrt{i_1^2+i_2^2} \mid \underline{i} = (i_1,i_2,i_3) \in \bar{C} \text{ et } L(\underline{i}) = (k)\text{Mod}(N_1N_2N_3)\}$. □

Ce théorème montre que l'on peut remplacer C par $\bar{C}$ ce qui réduit la région de recherche lorsque $[\bar{N}/2] \leq N_3-1$.

Démonstration du théorème 7. (i) En effet

(31a,b) $I_3 = N_1N_2J_3$ et $(I_3,N_3) = 1 \Rightarrow (I_3,N_1N_2N_3) = N_1N_2$

(31c) $I_3 = N_2J_3$ et $(J_3,N_3) = 1 \Rightarrow (I_3,N_1N_2N_3) = (N_2J_3,N_1N_2N_3) = N_2(J_3,N_1)$

(31d,e) $(I_3,N_3) = 1 \Rightarrow (I_3,N_1N_2N_3) = (I_3,N_1N_2)$

(31f) $I_3 = N_1J_3$ et $(J_3,N_3) = 1 \Rightarrow (I_3,N_1N_2N_3) = (N_1J_3,N_1N_2N_3) = N_1(J_3,N_2)$.

Donc dans tous les cas

$$\bar{N} = \frac{N_1N_2N_3}{(I_3,N_1N_2N_3)} = \frac{N_1N_2}{(I_3,N_1N_2)} N_3 \geq N_3 .$$

(ii) Comme $\bar{N} \geq N_3$ et que toutes les fréquences se trouvaient dans le cylindre

$$\{\underline{i} = (i_1,i_2,i_3) \mid \sqrt{i_1^2+i_2^2} \leq R \quad \text{et} \quad |i_3| < [N_3/2]\}$$

elles se trouvent donc toutes dans le cylindre plus gros

$$K = \{(i_1,i_2,i_3) \mid \sqrt{i_1^2+i_2^2} \leq R \quad \text{et} \quad |i_3| \leq \left[\frac{\bar{N}}{2}\right]\}$$

Si $[\bar{N}/2] \geq N_3-1$, alors $C = \bar{C}$ et il n'y a rien à démontrer.

Si $[\bar{N}/2] < N_3-1$, alors il faut montrer que pour tout k, $0 \leq k < N_1N_2N_3$ et tout $(i_1,i_2,i_3) \in C$ tel que

$$L(i_1,i_2,i_3) = k ,$$

il existe $(i_1,i_2,\alpha) \in \bar{C}$ (c'est-à-dire, $|\alpha| \leq [\bar{N}/2]$) tel que

$$L(i_1,i_2,\alpha) = k .$$

En effet il suffit de choisir

$$|\alpha| \leq \left[\frac{\bar{N}}{2}\right] \text{ tel que } i_3 = \alpha+d\bar{N} \text{ pour un entier d.}$$

Par linéarité

$$L(i_1,i_2,\alpha) = L(i_1,i_2,i_3) \ominus d(0,0,\bar{N})$$

$$= k \ominus d\cdot L(0,0,\bar{N}).$$

Mais

$$L(0,0,\bar{N}) = (I_3\bar{N}) \bmod (N_1N_2N_3) = \left(I_3 \frac{N_1N_2N_3}{(I_3,N_1N_2N_3)}\right) \text{Mod}(N_1N_2N_3)$$

$$= \left(\frac{I_3}{(I_3,N_1N_2N_3)} N_1N_2N_3\right) \text{Mod}(N_1N_2N_3) = 0.$$

Ceci complète la démonstration de la partie (ii). □

6.5.3 *Calcul des e_k^+*

Pour compléter cette analyse, il faut maintenant savoir quoi faire lorsque $e_k = 0$. Nous allons procéder cas par cas.

Proposition 8. Considérons les cas (31a) et (31b) qui sont caractérisés par

(68) $I_3 = N_1N_2J_3, \quad (J_3,N_3) = 1.$

(i) La condition $e_k = 0$ entraîne

(69) $k = cN_1N_2, \quad 0 \le c < N_3.$

(ii) Pour tout k tel que $e_k = 0$, on a

(70) $e_k^+ = e_0^+$

et il suffit de chercher la fréquence 0 dans l'ensemble

(71) $S_x = \{(i_1,i_2,i_3) \,|\, |i_1| \ge N_1 \text{ ou } |i_2| \ge N_2, \ \sqrt{i_1^2+i_2^2} \le B_x, \ |i_3| \le \min\{\left[\frac{\tilde{N}}{2}\right], N_3-1\}$

où x=a ou b

(72) $B_a = \min\{N_2, \sqrt{N_1^2+n_a^2}\}, \quad B_b = \min\{N_1, \sqrt{N_2^2+n_b^2}\}$

où

(73) $\begin{cases} n_a = \min\{(\alpha_2 I_1) \bmod N_2, \ N_2-(\alpha_2 I_1) \bmod N_2\} \\ n_b = \min\{(\alpha_1 I_2) \bmod N_1, \ N_1-(\alpha_1 I_2) \bmod N_1\}. \end{cases}$

(iii) Pour k_1, $1 \le k_1 < N_1N_2$

(74) $e_{k_1+cN_1N_2} = e^+_{k_1+cN_1N_2} = e^{12}_{k_1}, \quad \forall c, \ 0 \le c < N_3,$

où $e^{12}_{k_1}$ est la distance e_{k_1} associée avec les stratégies linéaires $L^{12}(i_1,i_2)$

(75) $\begin{cases} I_1i_1+N_1J_2i_2 & \text{dans le cas (31a)} \\ N_2J_1i_1+I_2i_2 & \text{dans le cas (31b)} \ . \end{cases}$

Démonstration. (i) Dans les cas (31a) et (31b)

$$L(i_1,i_2,i_3) = \{N_1N_2J_3i_3 + L^{12}(i_1,i_2)\} \text{Mod } N_1N_2N_3$$

et $\bar{N} = N_3$. Donc

$$e_k = 0 \Leftrightarrow N_1N_2J_3i_3 = k+dN_1N_2N_3, \quad d \text{ entier}, \quad |i_3| \leq \left[\frac{N_3}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow k = cN_1N_2 \quad \text{et} \quad J_3i_3 = c+dN_3, \quad |i_3| \leq \left[\frac{N_3}{2}\right]$$

(ii) Si $e_k = 0$, alors

(76) $$L(0,0,i_3) = k, \quad |i_3| < N_3.$$

Soit $(\bar{i}_1,\bar{i}_2,\bar{i}_3)$ tel que

(77) $$e_0^+ = \sqrt{\bar{i}_1^2+\bar{i}_2^2} \quad \text{(cf. définition (58))}.$$

Donc

(78) $$L(\bar{i}_1,\bar{i}_2,\bar{i}_3) = 0, \quad |\bar{i}_3| < N_3 \quad \text{et} \quad \sqrt{\bar{i}_1^2+\bar{i}_2^2} > 0 .$$

Par linéarité

$$L(-\bar{i}_1,-\bar{i}_2, i_3-\bar{i}_3) = k.$$

On construit maintenant j_3 à partir de $i_3-\bar{i}_3$ pour que $|j_3| < N_3$. En effet

$$\exists \ j_3, \ 0 \leq j_3 \leq N_3 \ \text{ tel que } \ i_3-\bar{i}_3 = j_3+cN_3$$

et

$$L(-\bar{i}_1,\bar{i}_2,j_3) = L(-\bar{i}_1,-\bar{i}_2,i_3-\bar{i}_3) - cL(0,0,N_3)$$

$$= k$$

puisque

$$L(0,0,N_3) = (N_1N_2J_3N_3) \text{Mod}(N_1N_2N_3) = 0.$$

Donc $e_k^+ \leq e_0^+$. Réciproquement si $(\hat{i}_1,\hat{i}_2,\hat{i}_3)$ sont tels que

$$L(\hat{i}_1,\hat{i}_2,\hat{i}_3) = k, \quad \sqrt{\hat{i}_1^2+\hat{i}_2^2} = e_k^+, \quad |\hat{i}_3| < N_3$$

et si $(0,0,i_3)$, $i_3 \neq 0$ est un autre point tel que

$$L(0,0,i_3) = k, \quad \text{et} \quad e_k = 0,$$

alors par linéarité

$$L(\hat{i}_1,\hat{i}_2,\hat{i}_3-i_3) = 0 , \quad \sqrt{\hat{i}_1^2+\hat{i}_2^2} = e_k^+ .$$

Mais

$$\exists\ j_3, \quad 0 \leqslant j_3 < N_3 \quad \text{tel que} \quad \hat{i}_3-i_3 = j_3+dN_3, \qquad d \text{ entier}$$

et

$$L(\hat{i}_1,\hat{i}_2,j_3) = 0 + dL(0,0,N_3) = 0,$$

puisque $(N_1N_2J_3N_3)$ Mod $(N_1N_2N_3) = 0$. Donc $e_0^+ \leq e_k^+$ et l'identité (70) est vérifiée.

Par définition d'une stratégie d'assignation linéaire, on sait que le 0 correspondant à e_0^+ ne peut se trouver dans la réunion Q des parallélépipèdes rectangles de dimension $N_1\ N_2\ N_3$ contenant (0,0,0):

$$Q = \{(i_1,i_2,i_3) \mid |i_n| < N_n,\ n=1,2,3\}.$$

En particulier 0 se trouvera dans l'ensemble

$$\{(i_1,i_2,i_3) \mid |i_1| \geq N_1 \text{ ou } |i_2| \geq N_2,\ |i_3| < N_3\}.$$

Mais on a vu dans la démonstration du Théorème 6 que pour toute fréquence k telle que

$$L(i_1,i_2,i_3) = k, \quad |i_3| < N_3$$

il existe $\bar{i}_3$, $|\bar{i}_3| \leq \min\{\left[\frac{\bar{N}}{2}\right], N_3-1\}$ tel que

$$L(i_1,i_2,\bar{i}_3) = k.$$

Il suffit donc de chercher dans l'ensemble

$$\{(i_1,i_2,i_3) \mid |i_1| \geq N_1 \text{ ou } |i_2| \geq N_2,\ |i_3| \leq \min\{\left[\frac{\bar{N}}{2}\right], N_3-1\}.$$

Il faudrait maintenant chercher une borne supérieure sur i_1 et i_2. D'après le Théorème 5 les équations (60a) et (60b) avec k=0 donnent des positions des fréquences 0. Dans le cas (31a)

$$i_1 = N_1 d_1, \quad i_2 = -\alpha_2 I_1 d_1 + N_2 d_2 \qquad \forall d_1, d_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{i_1^2+i_2^2} \le B_a = \min\{N_2, \sqrt{N_1^2+[(\alpha_2 I_1) \bmod N_2]^2}\} \sqrt{N_1^2+(N_2-(\alpha_2 I_1) \bmod N_2)^2}\,.$$

Le même raisonnement dans le cas (31b) fait interchanger les indices 1 et 2.

(iii) Pour k_1, $1 \le k_1 < N_1 N_2$, soit (i_1, i_2) tel que

$$e^{12}_{k_1} = \sqrt{i_1^2+i_2^2}\,, \quad L^{12}(i_1,i_2) \text{Mod } N_1 N_2 = k_1.$$

Il existe donc un entier d tel que

$$L^{12}(i_1,i_2) = k_1 + dN_1 N_2\,.$$

Puisque $(J_3, N_3) = 1$, il existe pour tout $0 \le c < N_3$, i_3 tel que

$$J_3 i_3 = -d + (c+e) N_3 \quad \text{pour un entier } e.$$

Alors

$$L^{12}(i_1,i_2) + N_1 N_2 J_3 i_3 = k_1 + dN_1 N_2 + N_1 N_2(-d+(c+e)N_3)$$

$$= k_1 + cN_1 N_2 + eN_1 N_2 N_3$$

$$\Rightarrow L(i_1,i_2,i_3) = (k_1 + cN_1 N_2) \text{Mod}(N_1 N_2 N_3)\,.$$

Si $\left[\frac{\bar{N}}{2}\right] \ge N_3 - 1$, $(i_1,i_2,i_3) \in \bar{C}$ et, par construction, on en conclut que

$$e^{+}_{k_1 + cN_1 N_2} \le e^{12}_{k_1}\,.$$

Si $\left[\frac{\bar{N}}{2}\right] < N_3 - 1$, alors on peut toujours choisir j_3 tel que

$$i_3 = j_3 + e\bar{N}, \quad |j_3| \le \left[\frac{\bar{N}}{2}\right]$$

et

$$L(i_1,i_2,j_3) = L(i_1,i_2,i_3) - eL(0,0,\bar{N}) = k - 0 = k.$$

Donc $e_k^+ \leq e_k^{12}$. Réciproquement, si $(i_1,i_2,i_3) \in \bar{C}$

$$e^+_{k_1+cN_1N_2} = \sqrt{i_1^2+i_2^2}\ , \quad L(i_1,i_2,i_3) = (k_1+cN_1N_2)\,\mathrm{Mod}(N_1N_2N_3)$$

alors il existe un entier d tel que

$$N_1N_2J_3i_3+L^{12}(i_1,i_2) = k_1+cN_1N_2+dN_1N_2N_3$$

$$\Rightarrow L^{12}(i_1,i_2) = k_1+N_1N_2(c+dN_3-J_3i_3)$$

$$\Rightarrow L^{12}(i_1,i_2)\,\mathrm{Mod}(N_1N_2) = k_1$$

$$\Rightarrow e^{12}_{k_1} \leq e^+_{k_1+cN_1N_2}\ .$$

On en conclut donc à l'identité (74). □

Proposition 9. Supposons que $\bar{N} > N_3$ (ce qui est vrai dans tous les cas qui ne se ramènent pas aux cas (31a) ou (31b)). S'il existe un k, $1 \leq k < N_1N_2N_3$, tel que $e_k = 0$, alors

(79) $$e_k^+ = \mathrm{Min}\{\sqrt{i_1^2+i_2^2}\ |(i_1,i_2,i_3) \in \bar{C},\ \sqrt{i_1^2+i_2^2} > 0 \text{ et } L(i_1,i_2,i_3) = k\}.$$

Démonstration. Soit k, $1 \leq k < N_1N_2N_3$, tel que $e_k = 0$. Alors il existe $(0,0,i_3) \in \bar{C}$ et $c \in Z$ tel que

$$I_3i_3 = k + cN_1N_2N_3, \quad i_3 \neq 0, \quad |i_3| < N_3.$$

On peut prendre, sans perte de généralité $i_3 > 0$. C'est donc la seule fréquence k dans la partie supérieure $\bar{C}^+$ de $\bar{C}$

$$\bar{C}^+ = \{(i_1,i_2,i_3) \in \bar{C}\ |\ |i_3| \geq 0\}$$

puisque c'est la seule dans la partie supérieure K^+ de K,

$$K^+ = \{(i_1,i_2,i_3) \in K | i_3 \geq 0\}$$

$$K = \{(i_1,i_2,i_3)\ |\ |i_n| < N_n,\ n=1,2,3\}$$

et que $\bar{C} \subset K$ et $\bar{C}^+ \subset \bar{K}^+$. Mais il existe aussi une ou plusieurs fréquences

k dans la partie inférieure K^- de K

$$K^- = \{(i_1,i_2,i_3) \in K \mid i_3 \leq 0\}.$$

S'il en existe une sur l'axe i_3 ce sera la seule dans K^-. Donc si la fréquence k n'est pas sur l'axe, il en existe au plus quatre qui ne seront pas sur l'axe. Dans ce cas e_k^+ sera donné par (79).

Supposons maintenant qu'il existe $(0,0,\bar{i}_3) \in \bar{C}$, $\bar{i}_3 < 0$, et $\bar{c}$ tel que

$$I_3\bar{i}_3 = k+cN_1N_2N_3, \quad \bar{i}_3 < 0, \quad |\bar{i}_3| < N_3.$$

Alors

$$I_3(\bar{i}_3-i_3) = (\bar{c}-c)N_1N_2N_3 \qquad |\bar{i}_3-i_3| \leq 2(N_3-1)$$

et nécessairement

$$\bar{i}_3-i_3 = d\bar{N}, \quad d \neq 0$$

où

$$\bar{N} = \frac{N_1N_2N_3}{(I_3,N_1N_2N_3)} = N_3 \frac{\bar{N}_1N_2}{(I_3,N_1N_2)} \geq N_3$$

est un multiple de N_3. Alors on a

$$|dN_3| \leq |d\bar{N}| \leq 2(N_3-1) \quad \Rightarrow |d| = 1 \quad \Rightarrow \quad N_3 \leq \bar{N} \leq 2(N_3-1) \Rightarrow \quad \bar{N} = N_3$$

(puisque $\bar{N}$ est un multiple de N_3). Cette situation ne peut se produire que dans les cas (31a) et (31b)

$$N_3 = \bar{N} = \frac{N_1N_2N_3}{(I_3,N_1N_2N_3)} \Rightarrow (I_3,N_1N_2N_3) = N_1N_2$$

$$\Rightarrow I_3 = J_3N_1N_2 \quad \text{et} \quad (J_3,N_3) = 1.$$

Il est important de s'apercevoir que la même assignation peut appartenir à un ou plusieurs cas. La Proposition 9 est donc complémentaire de la Proposition 8 et s'applique aux cas qui ne se ramènent pas à (31a) ou (31b). Ceci complète la démonstration. □

7. REVISION DES CONCLUSIONS DU RAPPORT 1981-82 DECOULANT DE LA FORMULATION DU PARAGRAPHE 4.2.

La formulation des conditions de non interférence au paragraphe 4.2, le raffinement des méthodes de calcul pour une ville carrée et le développement des stratégies linéaires horizontales dans un rectangle et vectorielles dans un parallélépipède rectangle vont maintenant nous permettre de revoir les résultats du rapport 1981-82 et d'en tirer de nouvelles conclusions.

7.1 *Comparaison des conditions de non interférence de 1981-1982 avec celles de 1982-1983*

En 1981-82 nous n'avions considéré que les règles de non interférence par intermodulation R_X et de désensibilisation suivantes

$$(1)\qquad \begin{cases} e_k \; k \geq \dfrac{N}{A}\, 2^{1/3} D^R_{\Delta f}, \quad 1 \leq k \leq \min\left\{\left[\dfrac{N^2-1}{2}\right], K_R\right\} \\ D^R_{\Delta f} \simeq 16{,}6 \quad \text{ou} \quad 2^{1/3} D^R_{\Delta f} \simeq 21, \end{cases}$$

$$(2)\qquad e_k \geq \frac{N}{A}, \qquad 2 \leq k \leq 4,$$

où pour $2^{1/3} D^R_{\Delta f} > A/N$, K_R est un entier tel que

$$(3)\qquad K_R < \frac{N}{A}\, 2^{1/3}\, D^R_{\Delta f} \leq K_R + 1.$$

Pour la désensibilisation cela revenait à choisir

$$(4)\qquad D^R_k = \begin{cases} 1, & 2 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

A l'aide de ces conditions de non interférence, on cherche à maximiser le minimum des distances entre fréquences adjacentes

$$(5)\qquad d_1 = \frac{A}{N}\, e_1$$

par rapport à toutes les stratégies linéaires dans un carré. On supposait donc implicitement que la distance $D^A_{\Delta f}$ était le paramètre important qu'il

fallait maximiser. Ceci était aussi pratique pour choisir parmi toutes les stratégies linéaires admissibles les "meilleures".

En 1982-83, c'est l'ensemble de conditions de non interférence (5.74) (paragraphe 5) qui a été choisi:

$$(6a)\quad \begin{cases} D^A_{\Delta f} \le \frac{A}{N} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D^A_{\Delta f} > \frac{A}{N} & \Rightarrow \quad e_1 \ge \frac{N}{A} D^A_{\Delta f} \end{cases}$$

$$(6b)\quad \begin{cases} D^{DT}_1 \le \frac{A}{N} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D^{DT}_1 \ge \frac{A}{N} & \Rightarrow \quad e_k \ge \frac{N}{A} D^{DT}_k, \qquad 1 \le k \le \min\{K, [\frac{N^2}{2}]\} \end{cases}$$

$$(6c)\quad \begin{cases} D^R_{\Delta f} \le \frac{A}{N} & \Rightarrow \quad \text{rien à vérifier} \\ D^R_{\Delta f} > \frac{A}{N} & \Rightarrow \quad e_k^{2/3}\, e_{2k}^{1/3}\, k \ge \frac{N}{A} D^R_f, \quad 1 \le k \le \min\{[\frac{N^2-1}{2}], K_R\} \end{cases}$$

où K et K_R sont deux entiers choisis de la façon suivante: si $D^{DT}_1 > A/N$,

$$(7)\qquad D^{DT}_{K+1} \le A/N \quad \text{et} \quad D^{DT}_K > A/N$$

et si $D^R_{\Delta f} > A/N$

$$(8)\qquad K_R < \frac{N}{A} D^R_{\Delta f} \le K_R + 1.$$

Ici nous avons considéré les conditions de non interférence par adjacence, désensibilisation et intermodulation R_X et T_X. Les chiffres ont aussi changé comme en témoigne le tableau ci-dessous

P_{MIN}	$D^A_{\Delta f}$	D^{DT}_1	$D^R_{\Delta f}$
-132	5,44	4,37	22,35
-140	13,67	10,98	30,38
-148	34,34	27,58	41,30

Ces chiffres proviennent des paragraphes 2.1 et 4.2.1 (équations (2.11), (2.17) et (4.24)).

Dans le meilleur cas, $P_{MIN} = -132$, le paramètre $D^R_{\Delta f}$ a augmenté de 35% et le paramètre D^{DT}_1 de 337%

On peut aussi voir qu'indépendamment de P_{MIN} c'est le mécanisme d'intermodulation qui va dominer dans la détermination des premières distances

(9) $\quad d_k = \frac{A}{N} e_k$, $(\frac{A}{N} e^+_k$ en dimension 3) , $k \geq 1$,

puisque

(10) $\quad d_1^{2/3} d_2^{1/3} \geq D^R_{\Delta f} \Rightarrow d_1 \geq D^R_{\Delta f}$ ou $d_2 \geq D^R_{\Delta f}$.

Si l'on choisit

(11) $\quad d_1 \geq D^R_{\Delta f}$,

alors pour tous les P_{MIN} considérés

(12) $\quad d_1 \geq D^R_{\Delta f} \gg D^A_{\Delta f} > D^{DT}_1$.

Si l'on choisit $d_1 = D^A_{\Delta f}$ (limite inférieure), alors

(13) $\quad d_2 \geq \begin{cases} 377{,}25 , & P_{MIN} = -132 \\ 150{,}05 , & P_{MIN} = -140 \\ 59{,}74 , & P_{MIN} = -148 \end{cases}$

Si l'on choisit $d_2 = D^{DT}_2$ (limite inférieure) alors

(14) $\quad d_1 \geq \begin{cases} 56{,}40, & P_{MIN} = -132 \\ 56{,}35, & P_{MIN} = -140 \\ 56{,}37, & P_{MIN} = -148 \end{cases}$

A la lumière de cette discussion, il semble clair que le critère de maximisation de la distance d_1 utilisé en 1981-82, ne soit pas bien adapté aux nouvelles conditions de non interférence 1982-83. En effet, puisque le critère de non interférence par intermodulation R_X semble être dominant pour les premiers écarts de fréquence k, il semble raisonnable

de choisir de maximiser le produit

(15) $\quad d_1^{2/3}\, d_2^{1/3}$

par rapport à toutes les stratégies linéaires L admissibles. On verra plus tard que ce critère tend à forcer la distance d_1 à être presqu'égale à la distance d_2.

7.2 *Assignation dans un carré de 100km de côté*

L'exemple type que l'on étudiera est l'assignation d'environ 1000 fréquences dans une ville carrée de 100km de côté pour différentes valeurs du paramètre P_{MIN} égales à -132, -140 et -148.

De façon plus précise, les quatre cas suivants seront considérés

$N_1 = N_2$	N_3	$N_1N_2N_3$
32	1	1024
23	2	1058
19	3	1083
16	4	1024

Tableau 1. Les quatre cas considérés

Les résultats sont présentés sous la forme de quatre tableaux correspondant à chaque cas. On y retrouvera en fonction de P_{MIN}, le nombre de paires (I_1,I_2) ou de triplets (I_1,I_2,I_3) admissibles (ce chiffre doit être multiplié par 8 si l'on ajoute les symétries), le nombre N_D de conditions de non interférence par désensibilisation à vérifier (cf. condition (6b)), le nombre N_I de conditions de non interférence par

intermodulation à vérifier (cf. condition (6c)), la valeur maximum m_{12} de la quantité (15) et les paires (I_1,I_2) ou les triplets (I_1,I_2,I_3) réalisant m_{12}. Dans les colonnes N_D et N_I on trouvera la valeur de l'entier m pour laquelle

(16) $\quad D_m^{DT} = d_m \quad$ ou $\quad d_m^{2/3} d_{2m}^{1/3} m = D_{\Delta f}^R$

P_{MIN}	no. de paires admissibles	N_D	N_I	m_{12}	(I_1,I_2) ou (I_1,I_2,I_3)
-132	1760	3	7 (3)	57,525	(416,195)
-140	1413	18	3 (3)	57,357	(480,419)
-148	180	31 (3)	2	56,785	(352,57)

Tableau 2. Le cas $N_1=N_2=32$ et $N_3=1$ en fonction de P_{MIN}

P_{MIN}	no. de paires admissibles	N_D	N_I	m_{12}	(I_1,I_2,I_3)
-132	2343	2	5 (4)	67,636	(46,50,1)
		2	5 (4)	67,636	(92,188,1)
-140	1955	15 (3)	3	67,636	(92,188,1)
-148	717	25 (9)	2	64,195	(184,308,1)

Tableau 3. Les cas $N_1=N_2=23$ et $N_3=2$ en fonction de P_{MIN}

P_{MIN}	No. de paires admissibles	N_D	N_I	m_{12}	(I_1,I_2,I_3)
-132	1296	1	4 (4)	66,989	(57,63,1)
		1	4 (4)	"	(114,234,1)
-140	1091	11	4 (4)	66,989	(114,234,1)
-148	496	23 (4)	2	63,377	(114,462,1)
		23 (19)	"	"	(171,192,1)
		23 (4)	"	"	(228,150,1)
		23 (4)	"	"	(399,93,1)
		23(13)	"	"	(513,36,1)

Tableau 4. Les cas $N_1=N_2=19$ et $N_3=3$ en fonction de P_{MIN}

P_{MIN}	No. de paires admissibles	N_D	N_I	m_{12}	(I_1,I_2,I_3)
-132	216	1	3 (1)	66,438	(448,220,1)
-140	192	6 (5)	4	66,438	(448,220,1)
-148	98	20 (5)	2	66,348	(192,220,1)

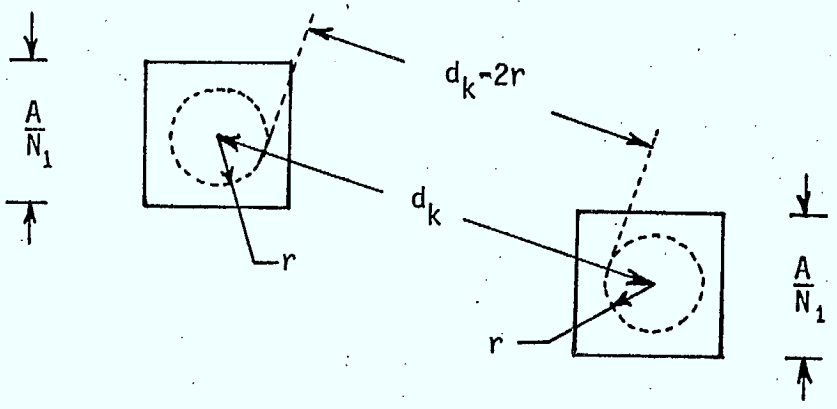
Tableau 5. Les cas $N_1=N_2=16$ et $N_3=4$ en fonction de P_{MIN}

On constate que, lorsque P_{MIN} passe de -132 à -148, l'influence de la désensibilisation est plus forte et que le paramètre m_{12} et le nombre de paires admissibles diminuent.

Les détails des 12 cas se trouvent en Annexe 5.

7.3 *Relaxation de la position géométrique de l'antenne*

Nous allons maintenant reprendre les résultats du paragraphe précédent en permettant à l'antenne située au centre de chaque petit carré de côté A/N_1 de bouger dans un disque de rayon r autour de ce point. Nous devons déterminer le rayon de déplacement maximum r pour les cas du paragraphe 7.2.



Concrètement il suffit de remplacer d_k dans les conditions (6a), (6b) et (6c) par d_k-2r et de déterminer les moments pairs (I_1,I_2) ou les triplets (I_1,I_2,I_3) qui maximisent le rayon r. Les résultats sont résumés dans les tableaux qui suivent.

P_{MIN}	2r	nombre de solutions admissibles	I_1	I_2
-132	2,9665	6	480	497,499,503,505,507,509
-140	2,84	1	480	427
-148	2,57	3	352	465,483,485

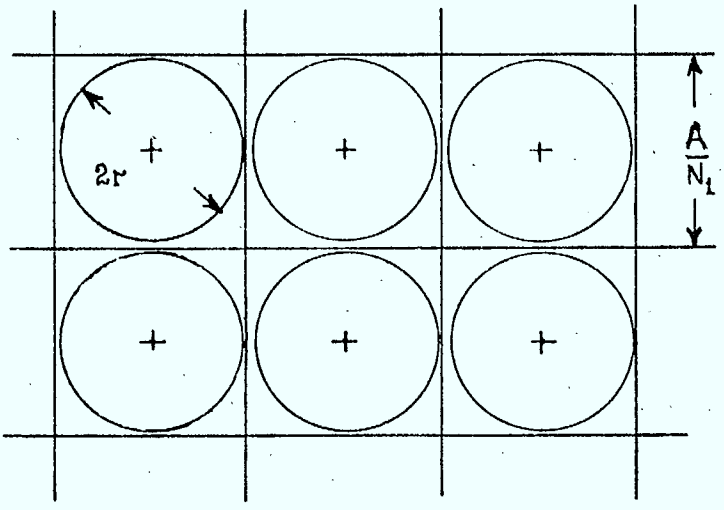
Tableau 6. Cas $N_1 = N_2 = 32$ et $N_3 = 1$. $(A/N_1=3,125)$

P_{MIN}	2r	nombre de solutions admissibles	I_1	I_2
-132	4,195	2	506	520,526
-140	4.09	4	506	470,472,474,478
-148	3,89	1	506	430

Tableau 7. Cas $N_1 = N_2 = 23$ et $N_3 = 2$. $(A/N_1=4,3478)$

P_{MIN}	2r	nombre de solutions admissibles	I_1	I_2
-132	6,07	7	448	436,460,468,476,484,500,508
-140	5,97	2	448	476,484
-148	5,78	1	448	484

Tableau 8. Cas $N_1 = N_2 = 16$ et $N_3 = 4$ $(A/N_1=6,250)$



7.4 *Compression maximale de la ville pour les stratégies horizontales*

L'idée de base est très simple. On comprime la ville, c'est-à-dire la longueur A du côté du carré, jusqu'à ce qu'une ou l'autre des conditions de non interférence soit violée. On répète cette opération pour différentes valeurs de N dans le cas d'une ville carrée et pour différentes valeurs du paramètre P_{MIN}.

On verra dans les trois tableaux qui suivent que la longueur minimum A* du côté du carré est relativement stable par rapport à N pour un P_{MIN} fixé. Il semble même que, pour P_{MIN} fixé, A* tende vers une limite inférieure lorsque N devient grand. De plus cette limite inférieure possède une borne inférieure

$$(17) \qquad A^* \geq \begin{cases} 31{,}61, & P_{MIN} = -132 \\ 42{,}96, & P_{MIN} = -140 \\ 58{,}41, & P_{MIN} = -148 \end{cases}$$

La quatrième colonne indique l'entier m précédé d'un D pour lequel

$$(18) \qquad d_m = D_m^{DT}$$

ou l'entier m précédé d'un I pour lequel

$$(19) \qquad d_m^{2/3} d_{2m}^{1/3} m = D_{\Delta f}^{R} .$$

Les cinquième et sixième colonnes indiquent les coordonnées des points réalisant e_1 et e_2, respectivement. La septième colonne contient les couples (I_1, I_2) qui maximisent le produit

$$(20) \qquad m_{12} = d_1^{2/3} d_2^{1/3} .$$

Ceux qui sont soulignés sont les mêmes que ceux qui, en 1981-82, maximisaient la distance d_1 sous les conditions de non interférence (1) à (3). En tenant compte des symétries énumérées au Théorème 5.5, il y a en fait 8 fois plus de couples admissibles.

N	N^2	A*	Dm Im	coord. de e_1	coord. de e_2	(I_1,I_2) (1)
4	16	41,501	I1	(2,-1)	(0,-2)	(4,7)
5	25	42,375	I1	(2,2)	(2,-1)	(5,8),(10,3)
6	36	49,409	I1	(3,-1)	(0,-2)	(6,17)
7	64	41,459	I1	(1,4)	(-3,1)	(7,23)
8	64	39,883	I1	(4,3)	(3,-2)	(8,11)
9	81	42,906	I1	(0,5)	(-4,-1)	(9,34),(18,7),(36,16)
10	100	40,350	I1	(5,3)	(-3,-4)	(10,17)
11	121	41,578	I1	(5,3)	(-1,6)	(11,59),(33,15)
12	144	41,539	I1	(-1,7)	(5,2)	(12,43)
16	256	40,374	I1	(8,5)	(-5,-6)	(112,77)
17	289	39,638	I1	(8,5)	(7,-7)	(51,92)
23	529	38,505	I1	(-1,-14)	(11,-5)	(253,133)
32	1024	39,221	I1	(16,9)	(0,18)	(96,57),(288,57)

(1) En tenant compte des symétries le nombre de couples admissibles doit être multiplié par 8.

Tableau 9. A* en fonction de N pour $P_{MIN} = -132$.

N	N^2	A*	Dm Im	coord. de e_1	coord. de e_2	(I_1,I_2) (1)
4	16	56,415	I1	(2,-1)	(0,-2)	(4,7)
5	25	58,092	I1	(2,2)	(2,-1)	(5,8),(10,3)
6	36	67,165	I1	(3,-1)	(0,-2)	(6,17)
7	49	56,357	I1	(1,4)	(-3,1)	(7,23)
8	64	54,215	I1	(4,3)	(3,-2)	(8,11)
9	81	58,325	I1	(3,4)	(-4,-1)	(9,34),(18,7),(36,16)
10	100	54,851	I1	(5,3)	(-3,-4)	(10,17)
11	121	56,520	I1	(-5,3)	(1,6)	(35,15),(33,26),(55,29)
12	144	*60,228	D12	(-1,7)	(5,2)	(12,41),(12,43)
16	256	54,883	I1	(8,5)	(-5,-6)	(112,77)
17	289	53,883	I1	(8,5)	(7,-7)	(51,92)
23	529	52,431	I1	(0,14)	(-11,5)	(230,189)
32	1024	53,315	I1	(16,9)	(0,18)	(96,57),(288,57)

(1) En tenant compte des symétries le nombre de couples admissibles doit être multiplié par 8.

Tableau 10. A* en fonction de N pour $P_{MIN} = -140$

N	N^2	A*	Dm Im	coord. de e_1	coord. de e_2	(I_1,I_2) (1)
4	16	76,688	I1	(2,-1)	(0,-2)	(4,7)
5	25	83,06	D5	(2,2)	(2,-1)	(5,8)
6	36	94,104	D6	(3,-1)	(0,-2)	(6,17)
7	49	84,369	I1	(3,3)	(-2,-1)	(14,19)
8	64	96,421	I1	(3,3)	(-1,-2)	(24,19)
9	81	81,186	I1	(0,-5)	(-4,-1)	(36,16)
10	100	86,932	I1	(5,3)	(-1,-4)	(30,17)
11	121	78,023	I1	(-5,3)	(3,-5)	(22,37)
12	144	93,742	I1	(4,5)	(-3,2)	(60,19)
16	256	79,340	I1	(-7,5)	(-5,6)	(80,61)
17	289	74,500	I1	(7,7)	(8,-3)	(34,90)
23	529	79,880	I1	(10,-6)	(-3,-12)	(184,42)
32	1024	78,143	I1	(13,13)	(13,-6)	(224,485)

(1) En tenant compte des symétries le nombre de couples admissibles doit être multiplié par 8.

Tableau 11. A* en fonction de N pour $P_{MIN} = -148$

7.5 *Compression maximale de la ville pour les stratégies vectorielles*

On reprend les considérations du paragraphe précédent en se donnant, en plus des stratégies horizontales, les stratégies vectorielles. Est-il possible de comprimer plus la ville en utilisant des stratégies vectorielles? La réponse semble être oui dans la plupart des cas, mais peut-être pas autant qu'on le souhaiterait.

Pour comprendre ce qui se passe, il faut revenir au paragraphe 6.5 sur le calcul des distances e_k et e_k^+. L'entier

$$\bar{N} = \frac{N_1 N_2 N_3}{(I_3, N_1 N_2 N_3)} \tag{21}$$

est égal à

$$\bar{N} = \frac{N_1 N_2}{(I_3, N_1 N_2)} N_3 \tag{22}$$

dans les cas a,b,c,d,e et f du Théorème 6.2. Il faut distinguer deux cas

1) $\bar{N} = N_3$ et 2) $\bar{N} > N_3$.

Le cas 1) entraîne

$$I_3 = J_3 N_1 N_2 \quad \text{pour} \quad (J_3, N_3) = 1 \tag{23}$$

et se ramène donc aux cas (31a) ou (31b) du Théorème 6.2.

Si $N_1 = N_2 = 1$, alors toutes les N_3 fréquences sont placées sur un même mât en plein centre de la ville et nécessairement le minimum A* de la longueur du côté A sera

$$A^* = D^R_{\Delta f} = \begin{cases} 22{,}353, & P_{MIN} = -132 \\ 30{,}386, & P_{MIN} = -140 \\ 41{,}305, & P_{MIN} = -148 \end{cases} \tag{24}$$

Lorsque $N_1 N_2 > 1$, on utilise la Proposition 6.8 qui nous dit que les fréquences k qui se trouvent sur l'axe i_3 (e_k=0) sont de la forme

(25) $\quad k = cN_1N_2, \qquad 0 \le c < N_3$

et que

(26) $\quad e_k^+ = e_0^+ \ge \min\{N_1, N_2\}$

$$\Rightarrow \quad d_k = \frac{A}{N_1} e_k^+ \ge A \min\left\{1, \frac{N_2}{N_1}\right\}$$

En particulier si $N_1 = N_2$,

(27) $\quad d_k \ge A.$

Le cas 2) entraîne

(28) $\quad N_1N_2 > (I_3, N_1N_2) \ge 1$

et se ramène à l'un ou l'autre des cas (31c), (31d), (31e) et (31f). D'après la Proposition 9 on a alors

(29)
$$e_k \le e_k^+ \le \sqrt{\left[\frac{N_1}{2}\right]^2 + \left[\frac{N_2}{2}\right]^2}$$
$$\Rightarrow \quad d_k = \frac{A}{N_1} e_k^+ \le A \frac{1}{N_1} \sqrt{\left[\frac{N_1}{2}\right]^2 + \left[\frac{N_2}{2}\right]^2}$$

En particulier si $N_1 = N_2$

(30) $\quad d_k \le \frac{\sqrt{2}}{2} A \simeq 0{,}707\ A\ .$

Dans le cas 2) la limite supérieure sur d_k est la même que la limite supérieure pour les stratégies horizontales.

On se rappellera que la condition de non-interférence la plus contraignante est la première condition pour l'intermodulation R_χ, soit

(31) $\quad (d_1)^{2/3}(d_2)^{1/3} \ge D^R_{\Delta f}\ .$

En général, minimiser A sera équivalent à maximiser le produit $(d_1)^{2/3}(d_2)^{1/3}$. Dans le cas 1) il y a possibilité pour le carré ($N_1 = N_2$) de rendre

(32) $\quad d_k \ge A$

mais seulement pour les fréquences de la forme

(33) $cN_1N_2, \quad 0 \leq c < N_3.$

Malheureusement, pour avoir les fréquences 1 et 2 il faut prendre $N_1N_2=1$ ce qui correspond au cas trivial d'une antenne centrale où l'on assigne toutes les fréquences. Donc, bien qu'en théorie ce cas paraissait intéressant, il ne sera généralement pas utilisable.

Le cas 2) est manifestement moins intéressant puisque les distances d_k sont bornées par 0,707 A, la même limite que pour les stratégies horizontales. Cependant il sera quand même possible d'améliorer les résultats obtenus pour les stratégies horizontales en choisissant des stratégies de la forme

(34) $L(i_1,i_2,i_3) = (I_1i_1+I_2i_2+i_3) \text{ Mod } (N_1N_2N_3).$

Ceci revient à assigner en (0,0) les fréquences

(35) $\{n \mid 0 \leq n < N_3\}.$

En particulier on verra que généralement

(36) $d_1 = d_2$

et que ces distances se rapprochent beaucoup mieux de la limite supérieure R pour les stratégies vectorielles.

On considère trois séries d'exemples correspondent aux P_{MIN} = -132, -140 et -148 pour les trois cas

$N_1 = N_2 = 32, \quad N_3 = 1 \Rightarrow N_1N_2N_3 = 1024$

$N_1 = N_2 = 23, \quad N_3 = 2 \Rightarrow N_1N_2N_3 = 1058$

$N_1 = N_2 = 19, \quad N_3 = 3 \Rightarrow N_1N_2N_3 = 1083$

$N_1 = N_2 = 16, \quad N_3 = 4 \Rightarrow N_1N_2N_3 = 1024$

qui correspondent à à peu près 1000 fréquences.

$P_{MIN} = -132$		$N_1 = N_2$		$D^R_{\Delta f} = 22,353$				
N_1	N_3	A*	d_1	d_2	$d_1^{2/3} d_2^{1/3}$	$\sqrt{2}[N_1/2]$	e_1^+	e_2^+
32	1	39,221	22,500	22,062	22,353	22,62	18,36	18
23	2	34,274	22,353	22,353	22,353	15,56	15	15
19	3	34,793	22,353	22,353	22,353	12,73	12,21	12,21
16	4	33,645	22,353	22,353	22,353	11,31	10,63	10,63

$P_{MIN} = -140$		$N_1 = N_2$		$D^R_{\Delta f} = 30,386$				
N_1	N_3	A*	d_1	d_2	$d_1^{2/3} d_2^{1/3}$	$\sqrt{2}[N_1/2]$	e_1^+	e_2^+
32	1	53,315	30,586	29,990	30,386	22,62	18,36	18,00
23	2	47,011	30,386	30,386	30,386	15,56	14,87	14,87
19	3	47,296	30,386	30,386	30,386	12,73	12,21	12,21
16	4	47,221	30,386	30,386	30,386	11,31	10,296	10,296

$P_{MIN} = -148$		$N_1 = N_2$		$D^R_{\Delta f} = 41,305$				
N_1	N_3	A*	d_1	d_2	$d_1^{2/3} d_2^{1/3}$	$\sqrt{2}[N_1/2]$	e_1^+	e_2^+
32	1	78,143	44,895	34,964	41,305	22,62	18,38	14,32
23	2	67,176	41,305	41,305	41,305	15,56	14,14	14,14
19	3	67,050	41,305	41,305	41,305	12,73	11,70	11,70
16	4	67,102	41,305	41,305	41,305	11,31	9,85	9,85

Tableau 12. Les quatre cas en fonction de P_{MIN}

Pour le cas $P_{MIN} = -132$, on voit que, en passant aux stratégies vectorielles, on peut réduire A* de 39,221 à 33,645, soit d'environ 14,2%. On remarque que $d_1 = d_2$ et que

(37) $$d_1^{2/3} d_2^{1/3} = D^R_{\Delta f} .$$

De plus pour $N_3 = 2$ ou 3 les distances e_1^+ et e_2^+ se rapprochent de très près de la borne supérieure

(38) $$\sqrt{2}[N_1/2].$$

De façon plus précise les coordonnées (i_1, i_2, i_3) des points réalisant e_1 et e_2 sont

N_1	N_3	e_1	e_2	$[N_1/2]$
32	1	(16,9)	(0,18)	16
23	2	(9,12,-1)	(9,12,0)	11
19	3	(7,10,-2)	(7,10,-1)	9
16	4	(8,7,-3)	(8,7,-2)	8

Tableau 13. Coordonnées des points réalisant e_1 et e_2 pour $P_{MIN} = -132$.

Les cas $P_{MIN} = -140$ et -148 sont semblables au cas $P_{MIN} = -132$. Cependant l'effet des contraintes imposées par les conditions de non interférence par désensibilisation est plus marqué. Ceci fait que les distances e_1^+ et e_2^+ s'éloignent de la borne supérieure prévue. L'amélioration est de 12% et 14% respectivement pour $P_{MIN} = -140$ et -148.

Les résultats plus détaillés de chaque cas et les grilles d'assignation autour de l'origine sont donnés en Annexe 6.

Nous donnons maintenant une série de trois tableaux pour les valeurs de A* en fonction de $N_1=N_2$ et N_3 pour P_{MIN} = -132, -140 et -148. Les valeurs A* précédées d'une astérisque "*" indique celles pour lesquelles la limite supérieure de e_1 et e_2 est atteinte. On ne peut donc pas obtenir de A* plus petit pour la valeur $N_1=N_2$ correspondante.

Comme pour les stratégies horizontales la valeur de A* est relativement stable surtout lorsque la limite supérieure de e_1 et e_2 est atteinte.

Les résultats détaillés pour les cas $N_1 = N_2 = 4$, $N_1 = N_2 = 5$ et $N_1 = N_2 = 9$ sont donnés en Annexe 7 avec les grilles correspondantes.

$N_1=N_2$	N_3	$N_1N_2N_3$	Dm Im	A*	coord. de e_1	coord. de e_2	(I_1,I_2) ou (I_1,I_2,I_3)
4	1	16	I1	41,501	(2,-1)	(0,-2)	(4,7)
	2	32	I1	* 39,986	(2,-1,-1)	(2,-1,0)	(8,14,1)
5	1	25	I1	42,375	(2,2)	(2,-1)	(5,8),(10,3)
	2	50	I1	* 39,515	(2,2,-1)	(2,2,0)	(10,14,1),(10,16,1), (20,4,1),(20,6,1)
6	1	36	I1	49,409	(3,-1)	(0,-2)	(6,17)
	2	72	I1	* 42,412	(3,-1,-1)	(3,-1,0)	(12,34,1)
7	1	49	I1	41,459	(1,4)	(-3,1)	(7,23)
	2	98	I1	* 36,880	(-3,-3,-1)	(-3,-3,0)	(14,18,1),(28,4,1), (28,38,1)
	3	147	I1	* 36,880	(3,3,-2)	(3,3,-1)	(21,27,1),(42,57,1)
8	1	64	I1	39,883	(4,3)	(3,-2)	(8,11)
	2	128	I1	* 35,765	(4,3,-1)	(4,3,0)	(16,22,1),(48,22,1)
	3	192	I1	* 35,765	(4,3,-2)	(4,3,-1)	(24,33,1),(72,33,1)
9	1	81	I1	42,906	(0,5)	(-4,-1)	(9,34),(18,7),(36,16)
	2	162	I1	* 35,563	(-4,-4,-1)	(-4,-4,0)	(18,22,1),(36,76,1)
	3	243	I1	* 35,563	(-4,-4,-2)	(-4,-4,-1)	(27,33,1),(54,114,1)
	4	324	I1	* 35,563	(-4,-4,-3)	(-4,-4,-2)	(36,44,1),(72,152,1)
	5	405	I1	* 35,563	(-4,-4,-4)	(-4,-4,-3)	(45,55,1),(90,10,1), (90,190,1)
10	1	100	I1	40,35	(5,3)	(-3,-4)	(10,17)
	2	200	I1	* 38,335	(5,3,-1)	(5,3,0)	(20,34,1),(60,34,1)
11	1	121	I1	41,578	(5,3)	(-1,6)	(11,59),(33,15), (33,26),(55,29)
	2	242	I1	* 34,773	(5,-5,-1)	(5,-5,0)	(44,92,1)
	3	363	I1	* 34,773	(5,-5,-2)	(5,-5,-1)	(66,138,1)
12	1	144	I1	41,539	(-1,7)	(5,2)	(12,43)
	2	288	I1	* 34,344	(6,-5,-1)	(6,-5,0)	(120,86,1)
	3	432	I1	* 34,344	(6,-5,-2)	(6,-5,-1)	(180,129,1)
16	1	256	I1	40,374	(8,5)	(-5,-6)	(112,77)
	2	512	I3	34,025	(8,7,-1)	(8,7,0)	(224,110,1)
	3	768	I1	34,738	(5,-9,-2)	(5,-9,-1)	(144,165,1)
	4	1024	I1	* 33,645	(8,7,-3)	(8,7,-2)	(448,220,1)

Tableau 14. A* en fonction de $N_1=N_2$ et N_3 pour $P_{MIN} = -132$.

$N_1=N_2$	N_3	$N_1N_2N_3$	Dm Im	A*	coord. de e_1	coord. de e_2	(I_1,I_2) ou (I_1,I_2,I_3)
17	1	289	I1	39,638	(8,5)	(7,-7)	(51,92)
	2	578	I1	35,131	(6,9,-1)	(6,9,0)	(34,106,1),(170,242,1)
	3	867	I1	35,131	(6,9,-2)	(6,9,-1)	(51,159,1)
	4	1156	D5	33,988	(8,-8,-3)	(8,-8,-2)	(136,280,1)
	5	1445	I1	* 33,588	(8,-8,-4)	(8,-8,-3)	(170,350,1)
	6	1734	I1	* 33,588	(8,-8,-5)	(8,-8,-4)	(204,420,1)
23	1	529	I1	38,505	(-1,-14)	(11,-5)	(253,133)
	2	1058	I1	34,274	(9,12,-1)	(9,12,0)	(46,142,1)
32	1	1024	I1	39,221	(16,9)	(0,18)	(96,57),(288,57)

Tableau 15. A* en fonction de $N_1 = N_2$ et N_3 pour $P_{MIN} = -132$.

$N_1=N_2$	N_3	$N_1N_2N_3$	Dm Im	A*	coord. de e_1	coord. de e_2	(I_1,I_2) ou (I_1,I_2,I_3)
4	1	16		56,415	(2,-1)	(0,-2)	(4,7)
	2	32		* 54,355	(2,-1,-1)	(2,-1,0)	(8,14)
5	1	25		58,092	(2,2)	(2,-1)	(5,8),(10,3)
	2	50		* 53,715	(2,2,-1)	(2,2,0)	(10,14,1),(10,16,1), (20,4,1),(20,6,1)
6	1	36		67,165	(3,-1)	(0,-2)	(6,17)
	2	72		* 57,653	(3,-1,-1)	(3,-1,0)	(12,34,1)
7	1	49		56,357	(1,4)	(-3,1)	(7,23)
	2	98		* 50,134	(3,3,-1)	(3,3,0)	(14,18,1),(28,4,1),(28,38,1)
	3	147		* 50,134	(3,3,-2)	(3,3,-1)	(21,27,1),(42,57,1)
8	1	64		54,215	(4,3)	(3,-2)	(8,11)
	2	128		* 48,617	(4,3,-1)	(4,3,0)	(16,22,1),(48,22,1)
	3	192		* 48,617	(4,3,-2)	(4,3,-1)	(24,33,1),(72,33,1)
9	1	81		58,325	(3,4)	(-4,-1)	(9,34),(18,7),(36,16)
	2	162		* 48,343	(4,-4,-1)	(4,-4,0)	(36,76,1)
	3	243		* 48,343	(-4,-4,-2)	(-4,-4,-1)	(27,33,1),(54,114,1)
	4	324		* 48,343	(-4,-4,-3)	(-4,-4,-2)	(36,44,1),(72,152,1)
	5	405		* 48,343	(-4,-4,-4)	(-4,-4,-3)	(45,55,1),(90,190,1)
10	1	100		54,851	(5,3)	(-3,-4)	(10,17)
	2	200		* 52,111	(5,3,-1)	(5,3,0)	(20,34,1),(60,34,1)
11	1	121		56,520	(-5,3)	(1,6)	(33,15),(33,26),(55,29)
	2	242		* 47,269	(5,-5,-1)	(5,-5,0)	(44,92,1)
	3	363		* 47,269	(5,-5,-2)	(5,-5,-1)	(66,138,1)
12	1	144	D12	60,228	(-1,7)	(5,2)	(12,41),(12,43)
	2	288		* 46,686	(6,-5,-1)	(6,-5,0)	(120,86,1)
	3	432		* 46,686	(6,-5,-2)	(6,-5,-1)	(180,129,1)

Tableau 16. A* en fonction de $N_1 = N_2$ et N_3 pour $P_{MIN} = -140$.

$N_1=N_2$	N_3	$N_1N_2N_3$	Dm Im	A*	coord. de e_1	coord. de e_2	(I_1,I_2) ou (I_1,I_2,I_3)
16	1	256		54,883	(8,5)	(-5,-6)	(112,77)
	2	512		49,111	(-7,7,-1)	(-7,7,0)	(224,78,1)
	3	768		47,221	(5,-9,-2)	(5,-9,-1)	(144,165,1)
	4	1024		47,221	(5,-9,-3)	(5,-9,-2)	(192,220,1)
17	1	289		53,883	(8,5)	(7,-7)	(51,92)
	2	578		47,756	(6,9,-1)	(6,9,0)	(34,106,1)
	3	867		47,756	(6,9,-2)	(6,9,-1)	(51,159,1)
	4	1156		47,756	(6,9,-3)	(6,9,-2)	(68,212,1)
	5	1445	D6	47,471	(8,-8,-4)	(8,-8,-3)	(170,350,1)
	6	1734		* 45,658	(8,-8,-5)	(8,-8,-4)	(204,420,1)
23	1	529		52,431	(0,14)	(-11,5)	(230,189)
	2	1058		47,011	(10,-11,-1)	(10,-11,0)	(92,372,1),(184,520,1)
32	1	1024		53,315	(16,9)	(0,18)	(96,57),(288,57)

Tableau 17. A* en fonction de $N_1 = N_2$ et N_3 pour $P_{MIN} = -140$.

$N_1=N_2$	N_3	$N_1N_2N_3$	Dm Im	A*	coord. de e_1	coord. de e_2	(I_1,I_2) ou (I_1,I_2,I_3)
4	1	16		76,688	(2,-1)	(0,-2)	(4,7)
	2	32		* 73,889	(2,-1,-1)	(2,-1,0)	(8,14)
5	1	25	D5	83,06	(2,2)	(2,-1)	(5,8)
	2	50		* 73,018	(2,2,-1)	(2,2,0)	(10,14,1),(10,16,1)
6	1	36	D6	94,104	(3,-1)	(0,-2)	(6,17)
	2	72		* 78,371	(3,-1,-1)	(3,-1,0)	(12,34,1)
7	1	49		84,369	(3,3)	(-2,-1)	(14,19)
	2	98	D9	68,326	(3,3,-1)	(3,3,0)	(28,38,1)
	3	147		* 68,150	(3,3,-2)	(3,3,-1)	(42,57,1)
8	1	64		96,421	(3,3)	(-1,-2)	(24,19)
	2	128	D3	69,807	(4,3,-1)	(4,3,0)	(48,22,1)
	3	192		* 66,088	(4,3,-2)	(4,3,-1)	(72,33,1)
9	1	81		81,186	(0,-5)	(-4,-1)	(36,18)
	2	162		72,905	(-1,-5,-1)	(-1,-5,0)	(72,50,1)
	3	243		69,031	(2,5,-2)	(2,5,-1)	(27,87,1)
	4	324	D5	66,860	(4,-4,-3)	(4,-4,-2)	(72,152,1)
	5	405		* 65,716	(4,-4,-4)	(4,-4,-3)	(90,190,1)
10	1	100		86,932	(5,3)	(-1,-4)	(30,17)
	2	200		* 70,837	(5,3,-1)	(5,3,0)	(60,34,1)
11	1	121		78,023	(-5,3)	(3,-5)	(22,37)
	2	242	D3	67,871	(3,6,-1)	(3,6,0)	(22,70,1)
	3	363		67,731	(3,6,-2)	(3,6,-1)	(33,105,1)
	5	484		67,731	(3,6,-4)	(3,6,-3)	(55,175,1)
	11	605		* 64,256	(5,-5,-10)	(5,-5,-9)	(242,506,1)
12	1	144		93,742	(4,5)	(-3,2)	(60,19)
	2	288		70,097	(-1,7,-1)	(-1,7,0)	(24,86,1)
	3	432		70,097	(-1,7,-2)	(-1,7,-1)	(36,129,1)
	17	2448		* 63,463	(6,-5,-16)	(6,-5,-15)	(1020,731,1)

Tableau 18. A* en fonction de $N_1=N_2$ et N_3 pour $P_{MIN} = -148$.

$N_1=N_2$	N_3	$N_1N_2N_3$	Dm Im	A*	coord. de e_1	coord. de e_2	(I_1,I_2) ou (I_1,I_2,I_3)
16	1	256		79,340	(-7,5)	(-5,6)	(80,61)
	2	512		67,102	(4,9,-1)	(4,9,0)	(96,242,1)
	3	768		67,102	(4,9,-2)	(4,9,-1)	(144,363,1)
	4	1024		67,102	(4,9,-3)	(4,9,-2)	(192,484,1)
17	1	289		74,500	(7,7)	(8,-3)	(34,90)
	2	578		67,257	(-3,10,-1)	(-3,10,0)	(34,126,1)
	3	867		67,257	(-3,10,-2)	(-3,10,-1)	(51,189,1)
	4	1156		66,056	(8,7,-3)	(8,7,-2)	(204,428,1)
	5	1445		66,056	(7,-8,-4)	(7,-8,-3)	(170,690,1),(510,450,1), (255,535,1),(255,705,1),
	6	1734		66,056	(8,7,-5)	(8,7,-4)	(102,132,1),(204,828,1), (306,642,1),(306,846,1), (612,540,1)
	17			62,066	(9,-8,-16)	(8,-8,-15)	(578,1190,1)
23	1	529		79,880	(10,-6)	(-3,-12)	(184,42)
	2	1058		67,176	(10,-10,-1)	(10,-10,0)	(184,78,1)
32	1	1024		78,143	(13,13)	(13,-6)	(224,485)

Tableau 19. A* en fonction de $N_1=N_2$ et N_3 pour P_{MIN} = -148.

Les résultats des tableaux combinés au fait que les stratégies linéaires peuvent être étendues à tout le plan Z × Z rendent possible la réassignation. En effet, pour environ 1000 fréquences la longueur A* varie de 39,221 pour $N_1=N_2$ et $N_3=1$ à 33,645 pour $N_1=N_2=16$ et $N_3=4$. Il y a donc possibilité de réassigner les fréquences jusqu'à 9 fois dans une ville allant de 117 km à 101 km.

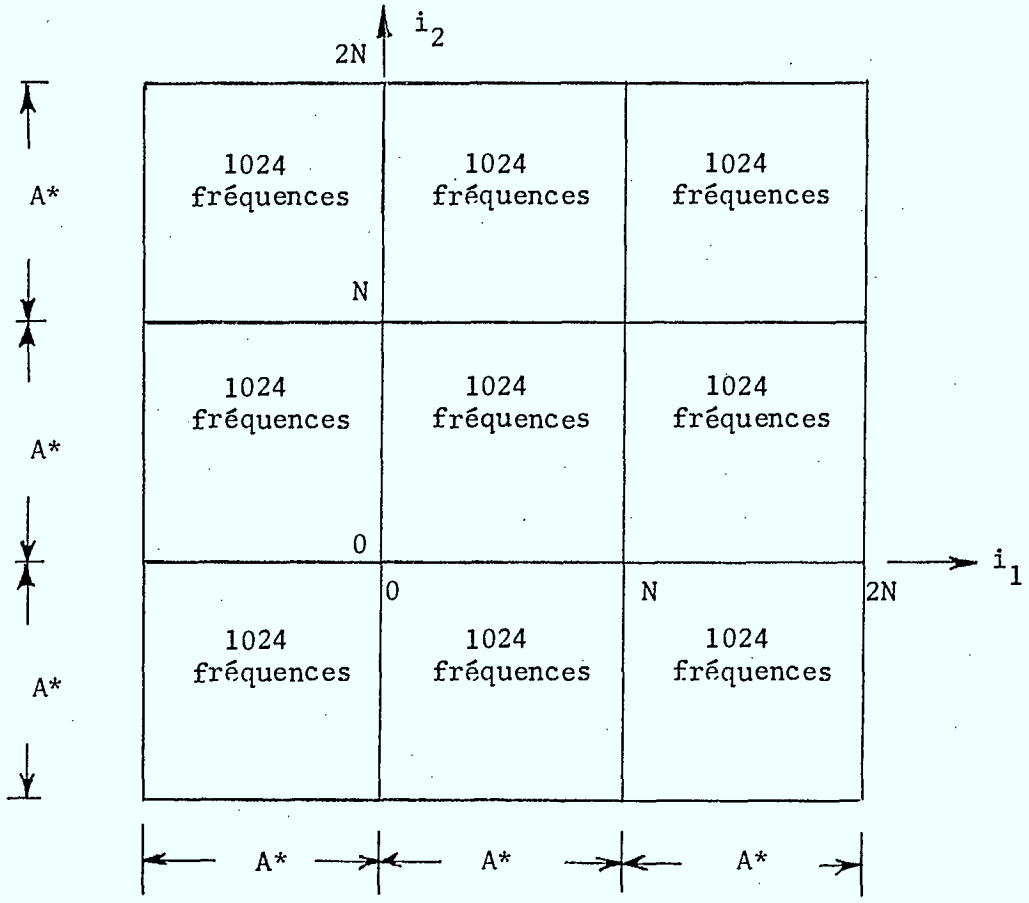


Figure 20. Réassignation 9 fois pour $N_1=N_2=32$ et $N_3=1$ ou $N_1=N_2=16$ et $N_3=4$

7.6 *Relaxation des contraintes spectrales pour les k-assignations*

En 1981-82 (voir rapport 1981-82, Chapitre 2, paragraphe 3.7) nous avons vu qu'un moyen de concentrer plus les assignations au centre-ville était de n'assigner qu'une fréquence sur 2 ou, de façon plus générale une sur k. S'il n'y avait que des conditions de non-interférence par intermodulation R_X, on pourrait alors comprimer la grille d'assignation de côté A par un facteur k et assigner le spectre

(39) $\quad \sigma(kN_1N_2,k) = \{kn \mid 0 \leq n < N_1N_2\}$

exactement k^2 fois. En présence de conditions de non interférence par désensibilisation nous ne pourrons plus comprimer A en A/k indéfiniment surtout pour $P_{MIN} = -148$.

Définition 1. Soit $N_1N_2 > 1$ et L une stratégie linéaire de la forme

(40) $\quad L(i_1,i_2,i_3) = (I_1i_1+I_2i_2+I_3i_3) \text{ Mod } (N_1N_2N_3).$

(i) Pour chaque entier $k \geq 1$, on définit la k-assignation L_k associée au couple (L,k) et définie comme suit

(41) $\quad L_k : Z\times Z\times Z \to k\mathbb{M}$

$\quad L_k(i_1,i_2,i_3) = (i_1kI_1+i_2kI_2+i_3kI_3) \text{Mod}(kN_1N_2N_3)$

où

(42) $\quad k\mathbb{M} = \{ km \mid 0 \leq m < N_1N_2N_3 \}.$ □

Si L est une stratégie linéaire telle que

(43) $\quad L(\mathbb{N}_{123}) = \mathbb{M}$

alors L_k peut aussi être considérée comme l'analogue d'une stratégie linéaire puisque

(44) $\quad L_k(\mathbb{N}_{123}) = k\mathbb{M}$

et que L_k assigne au parallélépipède rectangle $\mathbb{N}_{123}$ tout le spectre $k\mathbb{M}$.

Définition 2. On désigne par $A^*(kN_1N_2N_3,k)$ le minimum de la longueur A du côté du carré pour lequel les règles de non interférence (6a),(6b) et (6c) sont vérifiées. □

Proposition 2. Soient $N_1N_2 > 1$ et $k \geq 1$. S'il n'y avait que la règle de non interférence (6c) alors

(45) $$A^*(kN_1N_2N_3,k) = A^*(N_1N_2N_3,1)/k.$$

Démonstration. Supposons que pour $A_1 = A^*(N_1N_2N_3,1)$ la condition

$$e_m^{+\,2/3}\, e_{2m}^{+\,1/3}\, m \geq \frac{N_1}{A_1} D^R_{\Delta f}, \qquad 1 \leq m \leq \left[\frac{N^2-1}{2}\right]$$

soit vérifiée. Alors en passant aux k assignations

$$e^+_{km} = e^+_m, \qquad \forall m \geq 1,$$

où e^+_{km} est la distance correspondant à la fréquence km pour la k-assignation L_k. Alors

$$(e^+_{km})^{2/3}(e^+_{2km})^{1/3}\, km \geq \frac{N_1}{A_1/k} D^R_{\Delta f}, \qquad k \leq km \leq k\left[\frac{N^2-1}{2}\right]$$

Mais

$$k\left[\frac{N^2-1}{2}\right] \leq \left[\frac{kN^2-1}{2}\right] < k\left[\frac{N^2-1}{2}\right] + k$$

et l'on peut remplacer

$$k \leq km \leq k\left[\frac{N^2-1}{2}\right]$$

par

$$1 \leq km \leq \left[\frac{kN^2-1}{2}\right]$$

On en conclut donc que

$$A_1/k \geq A^*(kN^2,k).$$

On procède de la même façon en partant de $A^*(kN^2,k)$ pour obtenir l'autre inégalité

$$kA^*(kN^2,k) \geq A^*(N^2,1). \qquad \square$$

La présence des conditions de non interférence (6b) ne va pas permettre d'obtenir la compression à

$$A^*(N_1N_2N_3,1)/k$$

comme on le voit dans le tableau suivant pour k=2.

P_{MIN}	$A^*(2N_1^2,2)$	$A^*(N_1^2,1)/2$	$D^R_{\Delta f}$	$2d_2^{2/3}d_4^{1/3}$	Dm Im	$\bar{e}_2^+$	$\bar{e}_4^+$
-132	19,252	19,252	22,353	22,353	I2	14,036	12,083
-140	28,260	26,216	30,386	30,386	I2	12,530	12,042
-148	49,117	39,940	41,305	51,712	D8	13,038	10,440

Tableau 21. k-assignation pour $N_1=N_2=23$, $N_3=1$ et $k=2$.

La compression désirée par un facteur 2 n'est obtenue que pour $P_{MIN} = -132$. Malgré tout les distances $\bar{e}_2^+$ et $\bar{e}_4^+$ sont loin de la limite supérieure

$$\sqrt{2}\left[\frac{N_1}{2}\right] = 15,556.$$

Lorsque P_{MIN} =,-140 et -148 la condition (6b) empêche une compression plus grande de la ville. Les résultat détaillés de ces cas sont donnés aux pages suivantes. Le lecteur notera que la variable KP correspond à notre variable k.

```
 K-ASSIGNATIONS      KP =  2
 N1 =  23     N2 =  23     A1 =  19.260     A2 =  19.260     2*R =  0.000
 PMIN = -132      K =  26      A1/N1 =    .837
 DR = 22.3529      MR = 16      MLIM =  37

 GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

 I1 =   253      INDEX =      1

    I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
   133  22.362

 NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =         1


 (I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(KP)-2R)**2/3)((D(KP*2)-2R)**1/3)KP
 MAX ((D(KP)-2R)**2/3)((D(KP*2)-2R)**1/3)KP =    22.362

    I1=   I2=
   253   133

 NMAX =       1


 N1 =    23      N2 =    23      I1 =   253      I2 =   133
 A1 =   19.253      A1/N1 =     .837      2*R =    0.000
 PMIN = -132      K =  26      DR = 22.3529      MR = 16

   M      E(M)       D(M)     D(M)-2R   I1(M)  II2(M)   DMDT
   2    14.036     11.749     11.749     -1     -14     3.514
   4    12.083     10.115     10.115     11      -5     2.824
   6     4.000      3.348      3.348      0       4     2.486
   8    10.050      8.413      8.413     -1     -10     2.270
  10    11.045      9.246      9.246     11      -1     2.116
  12     8.000      6.697      6.697      0       8     1.998
  14     6.083      5.092      5.092     -1      -6     1.781
  16    11.402      9.544      9.544     11       3     1.434
  18    12.000     10.045     10.045      0      12     1.411
  20     2.236      1.872      1.872     -1      -2     1.386
  22    13.038     10.914     10.914     11       7     1.360
  24    12.207     10.218     10.218     10      -7     1.334
  26     2.236      1.872      1.872     -1       2     1.308
  28    12.166     10.184     10.184     -2     -12     1.281
  30    10.440      8.739      8.739     10      -3     1.255
  32     6.083      5.092      5.092     -1       6     1.230
  34     8.246      6.903      6.903     -2      -8     1.205
  36    10.050      8.413      8.413     10       1     1.180
  38    10.050      8.413      8.413     -1      10     1.156
  40     4.472      3.744      3.744     -2      -4     1.132
  42    11.180      9.359      9.359     10       5     1.110
  44    12.728     10.654     10.654      9      -9     1.087
  46     2.000      1.674      1.674     -2       0     1.066
  48    13.454     11.262     11.262     10       9     1.045
  50    10.296      8.618      8.618     -9      -5     1.025
  52     4.472      3.744      3.744     -2       4     1.005
  54    10.440      8.739      8.739     -3     -10      .986
  56     9.055      7.580      7.580     -9      -1      .967
  58     8.246      6.903      6.903     -2       8      .949
  60     6.708      5.615      5.615     -3      -6      .932
  62     9.487      7.941      7.941      9       3      .915
  64    12.166     10.184     10.184     -2      12      .899
  66     3.606      3.018      3.018     -3      -2      .883
  68    11.402      9.544      9.544      9       7      .867
  70    10.630      8.898      8.898      8      -7      .852
  72     3.606      3.018      3.018     -3       2      .838
  74    12.649     10.588     10.588     -4     -12      .824

   M    2M     D(M)     D(M)-2R   I2(M)   I2(M)   ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
   2     4   11.749     11.749     -1     -14                  22.354
   4     8   10.115     10.115     11      -5                  38.048
   8    16    8.413      8.413     -1     -10                  70.193
  16    32    9.544      9.544     11       3                 123.853
   6    12    3.348      3.348      0       4                  25.312
  12    24    6.697      6.697      0       8                  92.514
  10    20    9.246      9.246     11      -1                  54.290
  14    28    5.092      5.092     -1      -6                  89.814

 A1* =  19.252    ( INTERMODULATION  M =  2 )
```

```
K-ASSIGNATIONS      KP =  2
N1 =  23     N2 =  23     A1 =  28.261     A2 =  28.261     2*R =  0.000
PMIN = -140      K =  24      A1/N1 =  1.229
DR = 30.3856      MR =  4      MLIM =  41

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =   115      INDEX =      1
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
   142  30.387
I1 =   138      INDEX =      3
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
   165  30.387       188  30.387
I1 =   161      INDEX =      4
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
   234  30.387
I1 =   184      INDEX =      6
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
    73  30.387       249  30.387
I1 =   253      INDEX =      8
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
    65  30.387       111  30.387
NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =         8


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(KP)-2R)**2/3)((D(KP*2)-2R)**1/3)KP
MAX ((D(KP)-2R)**2/3)((D(KP*2)-2R)**1/3)KP =    30.387

   I1=   I2=
   115   142
   138   165
   138   188
   161   234
   184    73
   184   249
   253    65
   253   111

NMAX =       8
```

N1 = 23 N2 = 23 I1 = 115 I2 = 142

A1 = 28.261 A1/N1 = 1.229 2*R = 0.000

PMIN = -140 K = 24 DR = 30.3856 MR = 4

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	II2(M)	DMDT
2	12.530	15.396	15.396	11	6	8.826
4	12.042	14.796	14.796	-1	12	7.095
6	5.831	7.165	7.165	-3	-5	6.244
8	8.062	9.906	9.906	8	1	5.703
10	8.062	9.906	9.906	-4	7	5.316
12	11.662	14.329	14.329	-6	-10	5.019
14	6.403	7.868	7.868	5	-4	4.473
16	7.280	8.945	8.945	-7	2	3.591
18	8.944	10.990	10.990	4	8	2.959
20	9.220	11.328	11.328	2	-9	2.488
22	10.440	12.828	12.828	-10	-3	2.156
24	3.162	3.886	3.886	1	3	2.115
26	14.036	17.246	17.246	-1	-14	2.073
28	12.806	15.736	15.736	10	-8	2.031
30	2.828	3.475	3.475	-2	-2	1.990
32	9.849	12.102	12.102	9	4	1.949
34	10.440	12.828	12.828	-3	10	1.909
36	8.602	10.570	10.570	-5	-7	1.870
38	6.083	7.474	7.474	6	-1	1.832
40	7.810	9.597	9.597	-6	5	1.795
42	12.083	14.847	14.847	5	11	1.759
44	6.708	8.243	8.243	3	-6	1.723
46	9.000	11.059	11.059	-9	0	1.689
48	6.325	7.771	7.771	2	6	1.656
50	11.000	13.516	13.516	0	-11	1.624
52	12.083	14.847	14.847	11	-5	1.593
54	1.414	1.738	1.738	-1	1	1.563
56	12.207	14.999	14.999	10	7	1.533
58	12.806	15.736	15.736	8	-10	1.505
60	5.657	6.951	6.951	-4	-4	1.477
62	7.280	8.945	8.945	7	2	1.450
64	9.434	11.592	11.592	-5	8	1.424
66	11.402	14.010	14.010	-7	-9	1.399
68	5.000	6.144	6.144	4	-3	1.375
70	8.544	10.498	10.498	-8	3	1.351
72	9.487	11.657	11.657	3	9	1.328
74	8.062	9.906	9.906	1	-8	1.306
76	11.180	13.738	13.738	-11	-2	1.284
78	4.000	4.915	4.915	0	4	1.263
80	13.153	16.162	16.162	-2	-13	1.242
82	11.402	14.010	14.010	9	-7	1.222

M	2M	D(M)	D(M)-2R	I2(M)	I2(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
2	4	15.396	15.396	11	6	30.387
4	8	14.796	14.796	-1	12	51.776

A1* = 28.260 (INTERMODULATION M = 2)

```
K-ASSIGNATIONS     KP =  2
N1 =  23     N2 =  23     A1 =  49.120     A2 =  49.120     2*R =  0.000
PMIN = -148      K =  19      A1/N1 =   2.136
DR = 41.3050      MR =  2      MLIM =  36

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     46      INDEX =      1

   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
  200  51.715

I1 =     69      INDEX =      2

   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
  122  51.613

NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =         2


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(KP)-2R)**2/3)((D(KP*2)-2R)**1/3)KP
MAX ((D(KP)-2R)**2/3)((D(KP*2)-2R)**1/3)KP =    51.715

   I1=   I2=
   46   200

NMAX =       1


N1 =    23      N2 =    23      I1 =    46      I2 =   200
A1 =   49.120      A1/N1 =    2.136      2*R =    0.000
PMIN = -148      K =  19      DR = 41.3050      MR =  2

  M      E(M)       D(M)     D(M)-2R    I1(M)   II2(M)   DMDT
  2    13.038     27.845     27.845       1       13     22.170
  4    10.440     22.297     22.297      10        3     17.821
  6     8.062     17.218     17.218      -4       -7     15.684
  8     6.708     14.326     14.326      -3        6     14.326
 10     7.211     15.400     15.400       6       -4     13.353
 12    11.402     24.350     24.350       7        9     12.608
 14     7.071     15.101     15.101      -7       -1     11.237
 16    11.180     23.877     23.877       2      -11      9.021
 18     3.606      7.700      7.700       3        2      7.432
 20    13.601     29.048     29.048     -11       -8      6.249
 22    11.180     23.877     23.877     -10        5      5.342
 24     5.099     10.890     10.890      -1       -5      4.630
 26     8.000     17.085     17.085       0        8      4.059
 28     9.220     19.690     19.690       9       -2      3.593
 30    13.000     27.763     27.763      -5      -12      3.207
 32     4.123      8.806      8.806      -4        1      3.089
 34    10.296     21.988     21.988       5       -9      3.026
 36     7.211     15.400     15.400       6        4      2.964
 38    10.000     21.357     21.357      -8       -6      2.903
 40     9.899     21.142     21.142      -7        7      2.844
 42     3.606      7.700      7.700       2       -3      2.787
 44    10.440     22.297     22.297       3       10      2.732
 46    11.000     23.492     23.492     -11        0      2.677
 48    10.198     21.779     21.779      -2      -10      2.625
 50     3.162      6.754      6.754      -1        3      2.574
 52    10.630     22.702     22.702       8       -7      2.525
 54    10.817     23.101     23.101       9        6      2.477
 56     6.403     13.675     13.675      -5       -4      2.430
 58     9.849     21.034     21.034      -4       -9      2.385
 60     5.099     10.890     10.890       5       -1      2.341
 62    13.416     28.653     28.653       6       12      2.299
 64     8.246     17.611     17.611      -8        2      2.258
 66     8.062     17.218     17.218       1       -8      2.218
 68     5.385     11.501     11.501       2        5      2.179
 70    12.083     25.805     25.805      11       -5      2.141
 72    13.601     29.048     29.048     -11        8      2.105

  M   2M     D(M)    D(M)-2R   I2(M)   I2(M)   ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
  2    4   27.845    27.845       1      13                  51.715
A1* =  49.117    ( DESENSIBILISATION  M =  8 )
```

7.7 *Les géométries variables et les assignations non uniformes*

Nous avons vu comment assigner N_1N_2 fréquences dans un rectangle ou $N_1N_2N_3$ fréquences dans un parallélépipède rectangle. Nous n'avons pas fait une étude systématique des stratégies d'assignation linéaires dans ces configurations. Nous présentons seulement l'exemple

$N_1 = 5$, $N_2 = 3$, $N_3 = 1$ et 2

pour $P_{MIN} = -132$, -140 et -148 où nous avons comprimé le côté A_1

N_1	N_2	N_3	P_{MIN}	A_1^*	(I_1, I_2, I_3)
5	3	1	-132	53,842	(3,7)
5	3	2	-132	49,983	(6,10,1)
5	3	1	-140	73,191	(3,7)
5	3	2	-140	67,944	(6,10,1)
5	3	1	-148	99,493	(3,7)
5	3	2	-148	92,361	(6,10,1)

Tableau 22. Compression d'une assignation à un rectangle et un parallélépipède rectangle

```
N1 =   5    N2 =   3    A1 =  53.850    A2 =  32.310    2*R =  0.000
PMIN = -132     K =   2     A1/N1 =  10.770
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16     MLIM =   1

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     3     INDEX =     1
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
     7  22.356
GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (DEUXIEME PARTIE)

NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =        1


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   22.356

   I1=   I2=
     3     7

NMAX =       1

-------------------------------------------------------------------------------

N1 =   5    N2 =   3    A1 =  73.200    A2 =  43.920    2*R =  0.000
PMIN = -140     K =   2     A1/N1 =  14.640
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4     MLIM =   1

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     3     INDEX =     1
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
     7  30.389
GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (DEUXIEME PARTIE)

NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =        1


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   30.389

   I1=   I2=
     3     7

NMAX =       1

-------------------------------------------------------------------------------

N1 =   5    N2 =   3    A1 =  99.500    A2 =  59.700    2*R =  0.000
PMIN = -148     K =   2     A1/N1 =  19.900
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2     MLIM =   3

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     3     INDEX =     1
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
     7  41.308
GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (DEUXIEME PARTIE)

NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =        1


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   41.308

   I1=   I2=
     3     7

NMAX =       1
```

N1 = 5 N2 = 3 A1 = 53.842 A2 = 32.305

I1 = 3 I2 = 7 2*R = 0.00000

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	2	5	8	11	14	2	5	8	11	14	2	5	8	11	14	2	5
7	10	13	1	4	7	10	13	1	4	7	10	13	1	4	7	10	13
6	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6
5	11	14	2	5	8	11	14	2	5	8	11	14	2	5	8	11	14
4	4	7	10	13	1	4	7	10	13	1	4	7	10	13	1	4	7
3	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0
2	5	8	11	14	2	5	8	11	14	2	5	8	11	14	2	5	8
1	13	1	4	7	10	13	1	4	7	10	13	1	4	7	10	13	1
0	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9
-1	14	2	5	8	11	14	2	5	8	11	14	2	5	8	11	14	2
-2	7	10	13	1	4	7	10	13	1	4	7	10	13	1	4	7	10
-3	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3
-4	8	11	14	2	5	8	11	14	2	5	8	11	14	2	5	8	11
-5	1	4	7	10	13	1	4	7	10	13	1	4	7	10	13	1	4
-6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12
-7	2	5	8	11	14	2	5	8	11	14	2	5	8	11	14	2	5
-8	10	13	1	4	7	10	13	1	4	7	10	13	1	4	7	10	13

N1 = 5 N2 = 3 I1 = 3 I2 = 7

A1 = 53.842 A1/N1 = 10.768 2*R = 0.00000

PMIN = -132 K = 2

DA = 5.4435 DR = 22.3529 MR = 16

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	2.000	21.537	21.537	0	-2	4.371

M	2M	D(M)	D(M)-2R	I2(M)	I2(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	2	21.537	21.537	0	-2	22.353
2	4	24.079	24.079	1	2	41.338

A1* = 53.842 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 5 N2 = 3 I1 = 3 I2 = 7

A1 = 73.191 A1/N1 = 14.638 2*R = 0.00000

PMIN = -140 K = 2

DA = 13.6735 DR = 30.3856 MR = 4

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	2.000	29.276	29.276	0	-2	10.980

M	2M	D(M)	D(M)-2R	I2(M)	I2(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	2	29.276	29.276	0	-2	30.386
2	4	32.732	32.732	1	2	56.192

A1* = 73.191 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 5 N2 = 3 I1 = 3 I2 = 7

A1 = 99.493 A1/N1 = 19.899 2*R = 0.00000

PMIN = -148 K = 2

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	2.000	39.797	39.797	0	-2	27.580
2	2.236	44.494	44.494	1	2	22.170
3	1.000	19.899	19.899	1	0	19.512

M	2M	D(M)	D(M)-2R	I2(M)	I2(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	2	39.797	39.797	0	-2	41.305
2	4	44.494	44.494	1	2	76.386

A1* = 99.493 (INTERMODULATION M = 1)

```
N1 =     5     N2 =     3     N3 =     2
A1 =   49.990     A2 =   29.994     A3 =   19.996
PMIN = -132     K =    2     A1/N1 =    9.998     2*R =   0.00000
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16     MLIM =    1

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

I1 =     6     I2 =    10     INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  22.356
I1 =    12     I2 =     4     INDEX =     2
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  22.356
I1 =    12     I2 =     8     INDEX =     3
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  22.356

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS E)

I2 =    10     I1 =     4     INDEX =     4
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  22.356
I2 =    10     I1 =     6     INDEX =     5
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  22.356
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         5

(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   22.356

   I1=   I2=   I3=
     6    10     1
    12     4     1
    12     8     1
     4    10     1
     6    10     1

NMAX =   5


N1 =   5   N2 =   3   N3 =   2     I1 =    6   I2 =   10   I3 =    1
A1 =   49.983     A1/N1 =    9.997     2*R =    0.000
PMIN = -132     K =   2     NBAR =    1
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16

  M     E(M)      D(M)    D(M)-2R  I1(M)  I2(M)  I3(M)   DMDT
  1    2.236    22.353    22.353     2     -1     -1     4.371
  M    D(M)   D(M)-2R  I1(M)  I2(M)  I3(M)  ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
  1  22.353   22.353     2     -1     -1                  22.353
  2  22.353   22.353     2     -1      0                  38.374
A1* =  49.983   ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

```
N1 =     5      N2 =     3      N3 =     2
A1 =   67.950      A2 =   40.770      A3 =   27.180
PMIN = -140      K =   2      A1/N1 =  13.590      2*R =  0.00000
DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =  4      MLIM =   1

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

I1 =     6      I2 =    10      INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  30.388
I1 =    12      I2 =     4      INDEX =     2
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  30.388
I1 =    12      I2 =     8      INDEX =     3
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  30.388

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS E)

I2 =    10      I1 =     4      INDEX =     4
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  30.388
I2 =    10      I1 =     6      INDEX =     5
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  30.388
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =        5


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   30.388
   I1=   I2=   I3=
     6     10      1
    12      4      1
    12      8      1
     4     10      1
     6     10      1

NMAX =   5


N1 =   5   N2 =   3   N3 =   2      I1 =    6   I2 =   10   I3 =    1
A1 =   67.944      A1/N1 =   13.589      2*R =    0.000
PMIN = -140      K =   2      NBAR =    1
DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =  4

  M      E(M)       D(M)     D(M)-2R  I1(M)  I2(M)  I3(M)    DMDT
  1     2.236     30.386     30.386     2     -1     -1     10.980
  M     D(M)    D(M)-2R  I1(M)  I2(M)  I3(M)  ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
  1   30.386   30.386     2     -1     -1                  30.386
  2   30.386   30.386     2     -1      0                  52.165
A1* =  67.944  ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

```
N1 =      5      N2 =      3      N3 =      2
A1 =    92.370      A2 =    55.422      A3 =    36.948
PMIN = -148      K =    2      A1/N1 =   18.474      2*R =   0.00000
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =   2      MLIM =    4

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

I1 =      6      I2 =     10      INDEX =      1
    I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=
      1   41.309
I1 =     12      I2 =      8      INDEX =      2
    I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=
      1   41.309

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS E)

I2 =     10      I1 =      6      INDEX =      3
    I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=
      1   41.309
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         3

(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =    41.309
    I1=    I2=    I3=
      6     10      1
     12      8      1
      6     10      1

NMAX =    3


N1 =    5    N2 =    3    N3 =    2      I1 =      6    I2 =    10    I3 =      1
A1 =    92.361      A1/N1 =    18.472      2*R =     0.000
PMIN = -148      K =    2      NBAR =     1
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =   2

  M      E(M)       D(M)     D(M)-2R   I1(M)   I2(M)   I3(M)    DMDT
  1     2.236     41.305     41.305      2      -1      -1     27.580
  2     2.236     41.305     41.305      2      -1       0     22.170
  3     1.414     26.124     26.124     -1       1      -1     19.512
  4     1.414     26.124     26.124     -1       1       0     17.821
  M     D(M)    D(M)-2R   I1(M)   I2(M)   I3(M)   ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
  1   41.305    41.305      2      -1      -1                    41.305
  2   41.305    41.305      2      -1       0                    70.910
A1* =  92.361    ( INTERMODULATION  M =   1 )
```

ANNEXE 1

PROGRAMME POUR LES STRATEGIES LINEAIRES D'ASSIGNATION HORIZONTALE DANS UN RECTANGLE

(M. Lapointe)

Le programme qui suit est basé sur les conditions suffisantes faibles de non-interférence telles que décrites dans la section 4.2 intitulée "conditions de non-interférence pour le VHF".

Il permet la vérification des conditions de non-interférence pour la bande VHF (Δf = 30kHz et F = 160 MHz) et pour les valeurs de P_{MIN} égales à -132, -140 ou -148.

Pour P_{MIN} = -132 les conditions de non-interférence s'écrivent:

1) adjacence: $d_1 \geq D^A_{\Delta f} = 5{,}4435$

2) désensibilisation et intermodulation T_X:

$$d_m \geq D^{DT}_m = \begin{cases} 4{,}3710/m^{0{,}315}, & 1 \leq m \leq 13 \\ 136{,}77/m^{1{,}645}, & 14 \leq m \leq 15 \\ 300{,}339\ m^{0{,}225}/(50+m)^{1{,}425}, & 16 \leq m \end{cases}$$

the smallest integer which the condition satisfied.

3) intermodulation R_X: $d_m^{2/3} d_{2m}^{1/3} m \geq 22{,}35; \quad 1 \leq m \leq k^R$

où d_m ($m \geq 1$) est la distance minimale, exprimée en km, entre deux fréquences séparées par m canaux. On retrouvera les autres conditions suffisantes faibles de non-interférence pour P_{MIN} = -140 et -148 à la section 4.2.2.

Données à l'entrée

Les données à fournir à l'entrée sont:

1) N1 et N2 deux entiers où N1×N2 ≥ 3 est le nombre de fréquences assignées.

2) A1 et TRANS = 2r deux nombres réels. A1 et A2 = A1×N2/N1 déterminent les dimensions de la ville en km et TRANS = 2r est le diamètre

du disque dans lequel on pourra déplacer chaque antenne sans violer les conditions de non-interférence. Le diamètre du petit disque doit être inférieur à la distance minimale entre deux antennes c'est-à-dire $2r < A1/N1$.

3) Un entier 0 ou 1. Une valeur nulle supprimera l'impression de la liste des couples (I1,I2) admissibles.

4) Un entier 1,2 ou 3 représentant respectivement une valeur de P_{MIN} égale à -132, -140 ou -148.

Description des données de sortie

- N1,N2,A1,A2, PMIN ont la même signification qu'à l'entrée.
- R*A1/N1 (ou 2*R sur certains programmes) est le diamètre du petit disque dans lequel on veut déplacer les antennes.
- A1/N1 est la distance minimale entre deux antennes.
- K est un entier associé à la vérification des conditions de non-interférence par intermodulation R_X tel que $(A1/N1)(K+1) \geq D^R_{\Delta f} > (A1/N1)K$.
- DA est la distance $D^A_{\Delta f}$ associée à la condition d'adjacence $D^A_{\Delta f}$ = 5,4435, 13,6735 ou 34,3463 selon que P_{MIN} = -132, -140 ou -148.
- DR est la distance $D^R_{\Delta f}$ associée à l'intermodulation R_X. $D^R_{\Delta f}$ = 22,35, 30,38 ou 41,30 selon que P_{MIN} = -132, -140 ou -148.
- MR est l'entier M^R associé à la vérification des conditions de non-interférence par intermodulation R_X et prend pour valeur 16,4 ou 2 selon que P_{MIN} = -132, -140 ou -148. On vérifiera les inégalités $d_m^{2/3} d_{2m}^{1/3} m$ pour $1 \leq m \leq K^R$ où $K^R = \min(K, M^R)$.
- MLIM est un entier associé à la vérification des conditions de désensibilisation et d'intermodulation T_X. Ces conditions de désensibilisation

sont de la forme $d_m \geq D_m^{DT}$ et elles seront automatiquement vérifiées dès que $D_m^{DT} < A1/N1$. MLIM est donc le plus petit entier m tel que $D_m^{DT} < A1/N1$.

Si désiré, le programme fournit la liste de tous les couples admissibles (I1,I2) tels que

a) première partie:

$I1 = N2 \times J1 \qquad (J1,N1) = 1 \qquad (I2,N2) = 1$

b) deuxième partie:

$I2 = N1 \times J2 \qquad (J2,N2) = 1 \qquad (J1,N1) = 1$

- INDEX est un compteur indiquant le nombre de couples admissibles et PROD donne pour chacun de ces couples la valeur du produit $d_1^{2/3}d_2^{1/3}$.

On calcule ensuite parmi tous les couples admissibles (I1,I2) la ou les paires donnant le maximum du produit $d_1^{2/3}d_2^{1/3}$. NMAX représente le nombre de paires pour lequel le maximum est atteint. Cette valeur maximum du produit $d_1^{2/3}d_2^{1/3}$ devient très utile lorsqu'on cherche les dimensions minimales de la ville. En effet dans presque tous les cas la contraction de la ville est limitée par la contrainte $d_1^{2/3}d_2^{1/3} \geq D_{\Delta f}^R$ et de fait la ou les paires (I1,I2) maximisant ce produit sont probablement celles qui donnent les meilleurs résultats.

Remarque: Lorsqu'on déplace les antennes dans un petit disque de rayon r les nouvelles conditions de non-interférence deviennent

1) $d_1 - 2r \geq D_{\Delta f}^A$ pour l'adjacence

2) $d_m - 2r \geq D_m^{DT}$ pour la désensibilisation

3) $(d_m - 2r)^{2/3}(d_{2m} - 2r)^{1/3} m \geq D_{\Delta f}^R$ pour l'intermodulation.

La constante K sera telle que $(A1/N1 - 2r)(K+1) \geq D_{\Delta f}^R > (A1/N1 - 2r)K$ et MLIM devient le plus petit entier m tel que $D_m^{DT} < A1/N1 - 2r$.

```
10=LINUS,CM70000,T60.
20=*CODE
21=FTN5(L=0)
22=LGO.
40=*WEOR
50=*FTN
60=       PROGRAM D2D(INPUT,OUTPUT)
70=       COMMON/NOM/N1,N2,N1M1,N2M1,FN1,FN2,ALPHA1,ALPHA2,
80=      #           L11,L12,K22,K31,IR,R2,EPS
90=       INTEGER PMIN
100=      DIMENSION I1MAX(500),I2MAX(500),II(500),DK(500),PROD(500),
110=     #          DMDT(500)
120=*
130=*     LECTURE DES DONNEES ET INITIALISATIONS
140=*
150=      READ *,N1,N2
160=      READ *,A1,TRANS
170=      READ *,IMPRIME
180=      READ *,KONT
190=*
200=      IF(N1*N2.LT.2) THEN
210=      PRINT 920
220=  920 FORMAT(1H1,9X,'N1*N2 DOIT ETRE PLUS GRAND QUE UN')
230=      STOP
240=      END IF
250=      IF(KONT.LE.0.OR.KONT.GT.3) THEN
260=      PRINT 930
270=  930 FORMAT(1H1,9X,'KONT = 1, 2 OU 3')
280=      STOP
290=      END IF
300=*
310=      GO TO(1,2,3),KONT
320=*
330=*     INITIALISATIONS POUR PMIN = -132
340=*
350=    1 MR=16
360=      DT1=4.371
370=      DT2=136.78
380=      DT3=300.839
390=      DR=22.3529
400=      DA=5.4435
410=      LDT=15
420=      LDTP1=16
430=      GO TO 4
440=*
450=*     INITIALISATIONS POUR PMIN = -140
460=*
470=    2 MR=4
480=      DT1=10.9796
490=      DT2=343.57
500=      DT3=476.798
510=      DR=30.3856
520=      DA=13.6735
530=      LDT=21
540=      LDTP1=22
550=      GO TO 4
560=*
570=*     INITIALISATIONS POUR PMIN = -148
580=*
590=    3 MR=2
600=      DT1=27.5795
610=      DT2=863.009
620=      DT3=755.674
630=      DR=41.305
640=      DA=34.346
650=      LDT=30
660=      LDTP1=31
670=*
680=    4 N12=N1*N2
690=      FN1=FLOAT(N1)
700=      FN2=FLOAT(N2)
710=      A2=A1*FN2/FN1
720=      PRINT 500,N1,N2,A1,A2,TRANS
730=  500 FORMAT(1H1,9X,'N1 = ',I3,4X,'N2 = ',I3,4X,'A1 = ',F7.3,4X,
740=     #       'A2 = ',F7.3,4X,'2*R = ',F6.3/)
750=      A1=A1/FN1
760=      AB=A1-TRANS
770=      KK=INT(DR/AB)
780=      IF(AB.LE.0.) THEN
790=      PRINT 510
800=  510 FORMAT(//10X,'A1/N1-2*R DOIT ETRE POSITIF')
810=      STOP
820=      END IF
830=      PMIN=-132-(KONT-1)*8
840=      PRINT 520,PMIN,KK,A1
850=  520 FORMAT(10X,'PMIN = ',I4,5X,'K = ',I3,5X,'A1/N1 = ',F7.3/)
```

```
      N1M1=N1-1
      N2M1=N2-1
      N1S2=MAXO(1,N1/2)
      N2S2=MAXO(1,N2/2)
      N12S2=N12/2
      IR2=N1S2**2+N2S2**2
      R2=IR2
      R=SQRT(R2)
      IR=INT(R)
      EPS=1.E-8
      T13=1./3.
      T23=2./3.
      INDEX=0
      NCOUPLE=0
       PMAX=0.
      KR=MINO(KK,MR)
*
*     CALCUL DES DISTANCES ASSOCIEES AUX CONDITIONS DE
*     DESENSIBILISATION ET D'INTERMODULATION TX
*
      MLIM=0
      DO 210 M=1,13
      MLIM=MLIM+1
      T=DT1/M**0.315
      DMDT(M)=T
      IF(AB.GE.T) GO TO 200
  210 CONTINUE
*
      DO 220 M=14,LDT
      MLIM=MLIM+1
      T=DT2/M**1.645
      DMDT(M)=T
      IF(AB.GE.T) GO TO 200
  220 CONTINUE
*
      DO 230 M=LDTP1,1000
      MLIM=MLIM+1
      T=DT3*M**0.225/(50.+M)**1.425
      DMDT(M)=T
      IF(AB.GE.T) GO TO 200
  230 CONTINUE
  200 PRINT 650,DA,DR,MR,MLIM
  650 FORMAT(10X,'DA = ',F7.4,5X,'DR = ',F7.4,5X,'MR = ',I2,5X,
     #       'MLIM = ',I3//)
      LDK=MAXO(2*KR,MLIM,2)
*
*     GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)
*
      PRINT 610
  610 FORMAT(10X,'GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)'/)
      ICONT=1
*
      DO 20 J1=1,N1S2
      CALL GCD(J1,N1,IP)
      IF(IP.NE.1) GO TO 20
      I1=J1*N2
*
      DO 30 I2=1,N12S2
      CALL GCD(I2,N2,IP)
      IF(IP.NE.1) GO TO 30
*
*     CALCUL DES CONSTANTES ALPHA1, ALPHA2, NU1, NU2
*
      CALL ALPHANU(ICONT,J1,I2)
*
*     CALCUL DES DISTANCES DK-TRANS
*
      DO 15 L=1,LDK
      CALL EK(L,IEK2,ICONT)
   15 DK(L)=SQRT(FLOAT(IEK2))*A1-TRANS
*
*     VERIFICATION DE LA CONDITION D'ADJACENCE
*
   10 IF(DK(1).LT.DA) GO TO 30
*
*     VERIFICATION DES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION
*     ET D'INTERMODULATION TX
*
      DO 25 M=1,MLIM
   25 IF(DK(M).LT.DMDT(M)) GO TO 30
*
*     VERIFICATION DES CONDITIONS D'INTERMODULATION RX
*
      DO 40 K=1,KR,2
      DO 45 N=0,1000
      K1=K*2**N
```

```
1740=       IF(K1.GT.KR) GO TO 40
1750=       K2=K1*2
1760=       T=DK(K1)**T23*DK(K2)**T13*K1
1770=       IF(T.LT.DR) GO TO 30
1780=    45 CONTINUE
1790=    40 CONTINUE
1800=*
1810=*      CALCUL DU MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
1820=*
1830=       INDEX=INDEX+1
1840=       P12=DK(1)**T23*DK(2)**T13
1850=       DIFF=ABS(P12-PMAX)
1860=       IF(DIFF.LE.EPS) THEN
1870=       NMAX=NMAX+1
1880=       I1MAX(NMAX)=I1
1890=       I2MAX(NMAX)=I2
1900=       ELSE IF(P12.GT.PMAX) THEN
1910=       PMAX=P12
1920=       NMAX=1
1930=       I1MAX(NMAX)=I1
1940=       I2MAX(NMAX)=I2
1950=       END IF
1960=*
1970=       IF(IMPRIME.EQ.1) THEN
1980=       NCOUPLE=NCOUPLE+1
1990=       II(NCOUPLE)=I2
2000=       PROD(NCOUPLE)=P12
2010=       END IF
2020=    30 CONTINUE
2030=       IF(IMPRIME.EQ.0.OR.NCOUPLE.EQ.0) GO TO 20
2040=*
2050=*      IMPRESSION DE LA LISTE DES COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES
2060=*
2070=       PRINT 525,I1,INDEX
2080=   525 FORMAT(/10X,'I1 = ',I5,5X,'INDEX = ',I5/)
2090=       PRINT 530
2100=   530 FORMAT(10X,'   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=',
2110=      #                 I2=   PROD=')
2120=       PRINT 540,((II(LL),PROD(LL),LL=1,NCOUPLE)
2130=   540 FORMAT((7X,4(I9,F8.3)))
2140=       NCOUPLE=0
2150=    20 CONTINUE
2160=*
2170=*
2180=*      GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (DEUXIEME PARTIE)
2190=*
2200=*
2210=       IF(N1.EQ.N2) GO TO 1000
2220=       PRINT 620
2230=   620 FORMAT(/10X,'GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (DEUXIEME PARTIE)'/)
2240=       ICONT=2
2250=*
2260=       DO 60 J2=1,N2S2
2270=       CALL GCD(J2,N2,IP)
2280=       IF(IP.NE.1) GO TO 60
2290=       I2=J2*N1
2300=*
2310=       DO 70 I1=1,N1S2
2320=       CALL GCD(I1,N1,IP)
2330=       IF(IP.NE.1) GO TO 70
2340=*
2350=*      CALCUL DES CONSTANTES ALPHA1, ALPHA2, NU1, NU2
2360=*
2370=       CALL ALPHANU(ICONT,I1,J2)
2380=*
2390=*      CALCUL DES DISTANCES DK-TRANS
2400=*
2410=       DO 65 L=1,LDK
2420=       CALL EK(L,IEK2,ICONT)
2430=    65 DK(L)=SQRT(FLOAT(IEK2))*A1-TRANS
2440=*
2450=*      VERIFICATION DE LA CONDITION D'ADJACENCE
2460=*
2470=   100 IF(DK(1).LT.DA) GO TO 70
2480=*
2490=*      VERIFICATION DES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION
2500=*      ET D'INTERMODULATION TX
2510=*
2520=       DO 75 M=1,MLIM
2530=    75 IF(DK(M).LT.DMDT(M)) GO TO 70
2540=*
2550=*      VERIFICATION DES CONDITIONS D'INTERMODULATION RX
2560=*
2570=       DO 80 K=1,KR,2
2580=       DO 85 N=0,1000
2590=       K1=K*2**N
2600=       IF(K1.GT.KR) GO TO 80
2610=       K2=K1*2
```

```
2620=       T=DK(K1)**T23*DK(K2)**T13*K1
2630=       IF(T.LT.DR) GO TO 70
2640=    85 CONTINUE
2650=    80 CONTINUE
2660=*
2670=*      CALCUL DU MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
2680=*
2690=       INDEX=INDEX+1
2700=       P12=DK(1)**T23*DK(2)**T13
2710=       DIFF=ABS(P12-PMAX)
2720=       IF(DIFF.LE.EPS) THEN
2730=       NMAX=NMAX+1
2740=       I1MAX(NMAX)=I1
2750=       I2MAX(NMAX)=I2
2760=       ELSE IF(P12.GT.PMAX) THEN
2770=       PMAX=P12
2780=       NMAX=1
2790=       I1MAX(NMAX)=I1
2800=       I2MAX(NMAX)=I2
2810=       END IF
2820=*
2830=       IF(IMPRIME.EQ.1) THEN
2840=       NCOUPLE=NCOUPLE+1
2850=       II(NCOUPLE)=I1
2860=       PROD(NCOUPLE)=P12
2870=       END IF
2880=    70 CONTINUE
2890=       IF(NCOUPLE.EQ.0.OR.IMPRIME.EQ.0) GO TO 60
2900=*
2910=*      IMPRESSION DE LA LISTE DES COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES
2920=*
2930=       PRINT 535,I2,INDEX
2940=   535 FORMAT(/10X,'I2 = ',I5,5X,'INDEX = ',I5/)
2950=       PRINT 545
2960=   545 FORMAT(10X,'    I1=    PROD=       I1=    PROD=       I1=    PROD=',
2970=      #       '       I1=    PROD=')
2980=       PRINT 540,(II(LL),PROD(LL),LL=1,NCOUPLE)
2990=       NCOUPLE=0
3000=    60 CONTINUE
3010=*
3020=  1000 IF(INDEX.EQ.0) THEN
3030=       PRINT 600
3040=   600 FORMAT(//10X,'IL N''Y A PAS DE SOLUTION')
3050=       STOP
3060=       END IF
3070=       PRINT 550,INDEX
3080=   550 FORMAT(/10X,'NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES = ',I8/)
3090=*
3100=*      IMPRESSION DU MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
3110=*      ET DES COUPLES (I1,I2)
3120=*
3130=       PRINT 590,PMAX
3140=   590 FORMAT(//10X,'(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ',
3150=      #       '((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)'/
3160=      #       10X,'MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) = ',F8.3)
3170=       PRINT 570
3180=   570 FORMAT(/10X,'    I1=    I2=')
3190=       PRINT 580,(I1MAX(MM),I2MAX(MM),MM=1,NMAX)
3200=   580 FORMAT(10X,2I6)
3210=       PRINT 630,NMAX
3220=   630 FORMAT(//10X,'NMAX = ',I6)
3230=       STOP
3240=       END
3250=*
3260=*      TEST POUR SAVOIR SI LE PGCD DE I ET N EST EGAL A 1 OU NON
3270=*
3280=       SUBROUTINE GCD(I,N,IN)
3290=       IN=1
3300=       IF(I.EQ.1) RETURN
3310=       M=MINO(I,N)
3320=       DO 10 L=2,M
3330=       IL=MOD(I,L)
3340=       IF(IL.NE.0) GO TO 10
3350=       NL=MOD(N,L)
3360=       IF(NL.EQ.0) GO TO 20
3370=    10 CONTINUE
3380=       RETURN
3390=    20 IN=L
3400=       RETURN
3410=       END
3420=*
3430=*      CALCUL DES DISTANCES EK**2
3440=*
3450=       SUBROUTINE EK(K,IEK2,ICONT)
3460=       COMMON/NOM/N1,N2,N1M1,N2M1,FN1,FN2,ALPHA1,ALPHA2,
3470=      #           L11,L12,K22,K31,IR,R2,EPS
3480=       INTEGER D1,D2,ALPHA1,ALPHA2
3490=       IEK2=1000000
```

```
3500=       IF(ICONT.EQ.2) GO TO 100
3510=*
3520=*      TRAITEMENT DE LA PREMIERE GENERATION DE COUPLES
3530=*
3540=       K11=K*L11
3550=       K12=K*ALPHA2
3560=*
3570=*      CALCUL DES BORNES POUR D2
3580=*
3590=       LI2=(-IR-K12)/N2
3600=       R=(IR-K12)/FN2
3610=       LS2=INT(R)
3620=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS2) LS2=LS2-1
3630=*
3640=*      RECHERCHE DE EK**2
3650=*
3660=       DO 30 D2=LI2,LS2
3670=       I2=K12+D2*N2
3680=       I22=I2*I2
3690=       M=K11-D2*K31
3700=*
3710=*      CLACUL DES BORNES POUR D1
3720=*
3730=       IB=SQRT(R2-I22)
3740=       R=(-IB-M)/FN1
3750=       LI1=INT(R)
3760=       IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI1) LI1=LI1+1
3770=       R=(IB-M)/FN1
3780=       LS1=INT(R)
3790=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS1) LS1=LS1-1
3800=*
3810=       DO 40 D1=LI1,LS1
3820=       I1=D1*N1+M
3830=       ID2=I1*I1+I22
3840=       IEK2=MINO(IEK2,ID2)
3850=    40 CONTINUE
3860=    30 CONTINUE
3870=       RETURN
3880=*
3890=*      TRAITEMENT DE LA DEUXIEME GENERATION DE COUPLES
3900=*
3910=   100 K11=K*ALPHA1
3920=       K12=K*L12
3930=*
3940=*      CALCUL DES BORNES POUR D1
3950=*
3960=       LI1=(-IR-K11)/N1
3970=       R=(IR-K11)/FN1
3980=       LS1=INT(R)
3990=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS1) LS1=LS1-1
4000=*
4010=*      RECHERCHE DE EK**2
4020=*
4030=       DO 130 D1=LI1,LS1
4040=       I1=K11+D1*N1
4050=       I11=I1*I1
4060=       M=K12-D1*K22
4070=*
4080=*      CALCUL DES BORNES POUR D2
4090=*
4100=       IB=SQRT(R2-I11)
4110=       R=(-IB-M)/FN2
4120=       LI2=INT(R)
4130=       IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI2) LI2=LI2+1
4140=       R=(IB-M)/FN2
4150=       LS2=INT(R)
4160=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS2) LS2=LS2-1
4170=*
4180=       DO 140 D2=LI2,LS2
4190=       I2=D2*N2+M
4200=       ID2=I11+I2*I2
4210=       IEK2=MINO(IEK2,ID2)
4220=   140 CONTINUE
4230=   130 CONTINUE
4240=       RETURN
4250=       END
4260=*
4270=*      CALCUL DES CONSTANTES ALPHA1, ALPHA2, NU1, NU2
4280=*
4290=       SUBROUTINE ALPHANU(ICONT,K1,K2)
4300=       COMMON/NOM/N1,N2,N1M1,N2M1,FN1,FN2,ALPHA1,ALPHA2,
4310=      #           L11,L12,K22,K31,IR,R2,EPS
4320=       INTEGER ALPHA1,ALPHA2
4330=*
4340=*      CALCUL DE ALPHA1 ET NU1
4350=*
4360=       DO 10 ALPHA1=0,N1M1
4370=       R=(1-ALPHA1*K1)/FN1
```

```
4380=       DIFF=ABS(R-INT(R))
4390=       IF(DIFF.LT.EPS) GO TO 15
4400=    10 CONTINUE
4410=    15 NU1=R
4420=*
4430=*      CALCUL DE ALPHA2 ET NU2
4440=*
4450=       DO 20 ALPHA2=0,N2M1
4460=       R=(1-ALPHA2*K2)/FN2
4470=       DIFF=ABS(R-INT(R))
4480=       IF(DIFF.LT.EPS) GO TO 25
4490=    20 CONTINUE
4500=    25 NU2=R
4510=*
4520=*      CALCUL DES CONSTANTES K11, K12, K22, K31
4530=*
4540=       GO TO(100,200),ICONT
4550=*
4560=   100 L11=ALPHA1*NU2
4570=       K31=ALPHA1*K2
4580=       RETURN
4590=*
4600=   200 L12=ALPHA2*NU1
4610=       K22=ALPHA2*K1
4620=       RETURN
4630=       END
4640=*WEOR
```

ANNEXE 2

PROGRAMME POUR LA GENERATION DES GRILLES ET DES DISTANCES e_m ET d_m POUR LE CAS DU RECTANGLE

(M. Lapointe)

Ce programme permet d'obtenir la grille d'une assignation linéaire déterminée par le couple (I1,I2) pour $-8 \leq i_1, i_2 \leq 8$, autour du point (0,0).

Données à l'entrée

Les données à fournir à l'entrée sont:

1) N1 et N2 deux entiers où $N1 \times N2 \geq 3$ est le nombre de fréquences assignées.
2) Un couple d'entiers (I1,I2) déterminant une assignation linéaire. Ce couple est en général donné par le programme de l'annexe 1.
3) A1 et TRANS = 2r deux nombres réels. (Voir Annexe 1)
4) Un entier 1,2 ou 3 représentant respectivement une valeur de P_{MIN} égale à -132, -140 ou -148.

Description des données de sortie

En plus de donner la grille de l'assignation linéaire déterminée par le couple (I1,I2), ce programme fournit deux tableaux: le premier se rapporte à la vérification des conditions de non-interférence par désensibilisation et le second à la vérification des conditions d'intermodulation R_X.

- M est l'écart de fréquence exprimé en canaux.
- E(M) est la distance minimale e_m, exprimée en unités de petits carrés de côté A1/N1, entre deux fréquences séparées par m canaux.
- D(M) est la distance géographique minimale d_m, exprimée en km, entre deux fréquences séparées par m canaux. On a la relation suivante: $d_m = e_m \times A1/N1$.

- I1(M) et I2(M) sont les coordonnées du point où la fréquence m est assignée à la distance d_m.
- DMDT est la distance D_m^{DT} associée à la vérification des conditions de non-interférence par désensibilisation et intermodulation T_X. Ces conditions seront vérifiées pour tous les m tels que $D_m^{DT} > A1/N1$. Si $D_1^{DT} < A1/N1$ il n'y aura aucune condition de désensibilisation à vérifier.
- (DM**2/3)(D2M**1/3)M est la valeur du produit $d_m^{2/3} d_{2m}^{1/3} m$.

Par la suite le programme calcule les dimensions minimales (A1* et A2* = A1*×N2/N1) de la ville de façon à ce que les conditions de non-interférence soient vérifiées. On indique aussi quelle condition de non-interférence limite la contraction de la ville. Par exemple le message INTERMODULATION M=1 signifie que l'on pourra comprimer la ville jusqu'à ce que $d_1^{2/3} d_2^{1/3} = D_{\Delta f}^R$, les autres conditions de non-interférence étant toujours vérifiées.

$\geq$

```
10=DIST2C,CM75000,T10.
20=*CODE
30=FTN5(L=0)
40=LGO.
50=*WEOR
60=*FTN
70=       PROGRAM DIST2C(INPUT,OUTPUT)
80=       DIMENSION IE(600),EK(600),DK(600),IP1(600),IP2(600),MA(17),
90=      #          DMDT(500),DKMT(500)
100=        INTEGER PMIN
110=*
120=*       LECTURE DES DONNEES ET INITIALISATIONS
130=*
140=        READ *,N1,N2
150=        READ *,II1,II2
160=        READ *,A1,TRANS
170=        READ *,KONT
180=*
190=        IF(N1*N2.LT.3) THEN
200=        PRINT 700
210=   700  FORMAT(1H1,9X,'N1*N2 DOIT ETRE PLUS GRAND QUE DEUX')
220=        STOP
230=        END IF
240=        IF(KONT.LE.0.OR.KONT.GT.3) THEN
250=        PRINT 710
260=   710  FORMAT(1H1,9X,'KONT = 1, 2 OU 3')
270=        STOP
280=        END IF
290=*
300=        GO TO(1,2,3),KONT
310=*
320=*       INITIALISATIONS POUR PMIN = -132
330=*
340=     1  MR=16
350=        DT1=4.371
360=        DT2=136.78
370=        DT3=300.839
380=        DR=22.3529
390=        DA=5.4435
400=        LDT=15
410=        LDTP1=16
420=        GO TO 4
430=*
440=*       INITIALISATIONS POUR PMIN = -140
450=*
460=     2  MR=4
470=        DT1=10.9796
480=        DT2=343.57
490=        DT3=476.798
500=        DR=30.3856
510=        DA=13.6735
520=        LDT=21
530=        LDTP1=22
540=        GO TO 4
550=*
560=*       INITIALISATIONS POUR PMIN = -148
570=*
580=     3  MR=2
590=        DT1=27.5795
600=        DT2=863.009
610=        DT3=755.674
620=        DR=41.305
630=        DA=34.346
640=        LDT=30
650=        LDTP1=31
660=*
670=     4  A2=A1*N2/N1
680=        N12=N1*N2
690=        N1S2=MAXO(1,N1/2)
700=        N2S2=MAXO(1,N2/2)
710=        A1SN1=A1/FLOAT(N1)
720=        AB=A1SN1-TRANS
730=        KK=INT(DR/AB)
740=        IF(AB.LE.0.) THEN
750=        PRINT 560
760=   560  FORMAT(/10X,'A1/N1-2*R DOIIT ETRE POSITIIF')
770=        STOP
780=        END IF
790=        R2=N1S2**2+N2S2**2
800=        IR2=R2
810=        R=SQRT(R2)
820=        IR=INT(R)
821=        EPS=1.E-8
830=        T13=1./3.
840=        T23=2./3.
850=        KR=MAXO(1,MINO(KK,MR))
```

```
      NZ=0
      PMIN=-132-(KONT-1)*8
*
*     IMPRESSION DE LA GRILLE DES ASSIGNATIONS POUR -8<=I1,I2<=8
*
      PRINT 530,N1,N2,A1,A2,II1,II2,TRANS
  530 FORMAT(1H1//10X,'N1 = ',I5,5X,'N2 = ',I5,5X,
     #       'A1 = ',F8.3,5X,'A2 = ',F8.3//
     #       10X,'I1 = ',I5,5X,'I2 = ',I5,5X,'2*R = ',F8.3//)
      PRINT 540,(II-9,II=1,17)
  540 FORMAT(5X,17I4/1X,80(1H-))
*
      DO 10 I2=8,-8,-1
      DO 20 I1=-8,8
       K=II1*I1+II2*I2
       K=MOD(K,N12)
       IF(K.LT.0) K=K+N12
       MA(I1+9)=K
   20 CONTINUE
      PRINT 550,I2,(MA(L),L=1,17)
  550 FORMAT(1X,I3,' I',17I4/5X,'I'/5X,'I')
   10 CONTINUE
*
      PRINT 570,N1,N2,II1,II2
  570 FORMAT(1H1//10X,'N1 = ',I5,5X,'N2 = ',I5,5X,'I1 = ',I5,5X,
     #       'I2 = ',I5/)
      PRINT 580,A1,A1SN1,TRANS
  580 FORMAT(10X,'A1 = ',F8.3,5X,'A1/N1 = ',F8.3,5X,'2*R = ',F8.3/)
      PRINT 585,PMIN,KK
  585 FORMAT(10X,'PMIN = ',I4,5X,'K = ',I3/)
      PRINT 690,DA,DR,MR
  690 FORMAT(10X,'DA = ',F7.4,5X,'DR = ',F7.4,5X,'MR = ',I2/)
*
*     CALCUL DES DISTANCES ASSOCIEES AUX CONDITIONS DE
*     DESENSIBILISATION ET D'INTERMODULATION TX
*
      MLIM=0
      DO 210 M=1,13
      MLIM=MLIM+1
      T=DT1/M**0.315
      DMDT(M)=T
      IF(AB.GE.T) GO TO 200
  210 CONTINUE
*
      DO 220 M=14,LDT
      MLIM=MLIM+1
      T=DT2/M**1.645
      DMDT(M)=T
      IF(AB.GE.T) GO TO 200
  220 CONTINUE
*
      DO 230 M=LDTP1,1000
      MLIM=MLIM+1
      T=DT3*M**0.225/(50.+M)**1.425
      DMDT(M)=T
      IF(AB.GE.T) GO TO 200
  230 CONTINUE
  200 LDK=MAXO(2*KR,MLIM)
      DO 50 K=1,LDK
   50 IE(K)=IR2
*
*     CALCUL DES DISTANCES EK**2 ET DES COORDONNEES CORRESPONDANTES
*     IP1(K), IP2(K)
*
      DO 60 I1=-IR,IR
      DO 70 I2=-IR,IR
      ID=I1*I1+I2*I2
      IF(ID.GT.IR2) GO TO 70
      K=II1*I1+II2*I2
      K=MOD(K,N12)
      IF(K.LT.0) K=K+N12
      IF(K.GT.LDK) GO TO 70
      IF(K.EQ.0) GO TO 70
      IF(ID.GT.IE(K)) GO TO 70
      IE(K)=ID
      IP1(K)=I1
      IP2(K)=I2
   70 CONTINUE
   60 CONTINUE
*
*     CALCUL DES DISTANCES EK, DK ET DK-TRANS
*
      DO 80 K=1,LDK
      EK(K)=SQRT(FLOAT(IE(K)))
      DK(K)=EK(K)*A1SN1
   80 DKMT(K)=DK(K)-TRANS
*
```

```
1730=*
1740=*      CALCUL DE A* ET IMPRESSION DES RESULTATS
1750=*
1760=*
1770=*      VERIFICATION DE LA CONDITION D'ADJACENCE
1780=*
1790=       IF(DKMT(1).LT.DA) THEN
1800=       PRINT 730,DKMT(1)
1810=  730 FORMAT(//10X,'LA CONDITION D''ADJACENCE N''EST PAS ',
1820=     #        'RESPECTEE :  DK(1)-TRANS = ',F8.4)
1830=       STOP
1840=       ELSE
1850=       DL=1.-DA/DKMT(I)
1860=       DA1=DL
1870=       IPOS=1
1880=       END IF
1890=*
1900=*      VERIFICATION DES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION ET
1910=*      D'INTERMODULATION TX
1920=*
1930=       PRINT 660
1940=  660 FORMAT(/12X,'M',5X,'E(M)',6X,'D(M)',4X,'D(M)-2R',3X,'I1(M)',
1950=     #        2X,'I2(M)',3X,'DMDT')
1960=*
1970=       DO 100 M=1,MLIM
1980=       PRINT 630,M,EK(M),DK(M),DKMT(M),IP1(M),IP2(M),DMDT(M)
1990=  630 FORMAT(10X,I3,3F10.3,I7,I6,F10.3)
2000=       DL=(DKMT(M)-DMDT(M))/DKMT(M)
2010=       IF(DL.LT.0.) NZ=1
2020=       IF(DL.LT.DA1) THEN
2030=       MMM=M
2040=       IPOS=2
2050=       DA1=DL
2060=       END IF
2070=  100 CONTINUE
2080=*
2090=       IF(NZ.EQ.1) THEN
2100=       PRINT 640
2110=  640 FORMAT(/10X,'LES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION SONT VIOLEES')
2120=       STOP
2130=       END IF
2140=*
2150=*      VERIFICATION DES CONDITIONS D'INTERMODULATION RX
2160=*
2170=       PRINT 670
2180=  670 FORMAT(/12X,'M',3X,'2M',4X,'D(M)',3X,'D(M)-2R',2X,'I2(M)',
2190=     #        2X,'I2(M)',2X,'((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M')
2200=*
2210=       DO 90 K=1,KR,2
2220=       DO 95 N=0,1000
2230=       M=K*2**N
2240=       IF(M.GT.KR) GO TO 90
2250=       M2=2*M
2260=       T=(DK(M)**T23)*(DK(M2)**T13)*M
2270=       PRINT 600,M,M2,DK(M),DKMT(M),IP1(M),IP2(M),T
2280=  600 FORMAT(10X,I3,I5,2F9.3,2I6,F22.3)
2290=       DL=(T-DR)/T
2300=       IF(DL.LT.0.) NZ=1
2310=       IF(DL.LT.DA1) THEN
2320=       MMM=M
2330=       IPOS=3
2340=       DA1=DL
2350=       END IF
2360=   95 CONTINUE
2370=   90 CONTINUE
2380=*
2390=       IF(NZ.EQ.1) THEN
2400=       PRINT 590
2410=  590 FORMAT(/10X,'LES CONDITIONS D''INTERMODULATION SONT VIOLEES')
2420=       STOP
2430=       END IF
2440=*
2450=*      CALCUL DE LA CONTRACTION MAXIMALE
2460=*
2470=       AA=A1*(1.-DA1)
2480=*
2490=*      NOUVELLE VALEUR DE K
2500=*
2501=       A1SN1=AA/N1
2502=       AB=A1SN1-TRANS
2520=       KKK=INT(DR/AB)
2530=*
2540=  900 IF(KKK.NE.KK) THEN
2550=       ALIM=(DR/(KK+1)+TRANS)*N1
2560=       PRINT 620,ALIM
2570=  620 FORMAT(/10X,'LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE',
2580=     #        ' A1 INFERIEURES A ',F7.3)
2590=       END IF
2600=*
2610=       IF(AB+EPS.LT.DMDT(MLIM)) PRINT 625
2630=  625 FORMAT(/10X,'ON DOIT VERIFIER D''AUTRES CONDITIONS DE ',
2640=     #        'DESENSIBILISATION')
2650=*
2660=       IF(IPOS.EQ.1) PRINT 800,AA
2670=       IF(IPOS.EQ.2) PRINT 810,AA,MMM
2680=       IF(IPOS.EQ.3) PRINT 820,AA,MMM
2690=  800 FORMAT(/10X,'A1* = ',F7.3,'    ( ADJACENCE )')
2700=  810 FORMAT(/10X,'A1* = ',F7.3,'    ( DESENSIBILISATION  M = ',I2,' )')
2710=  820 FORMAT(/10X,'A1* = ',F7.3,'    ( INTERMODULATION  M = ',I2,' )')
2720=       STOP
2730=       END
2740=*WEOR
```

ANNEXE 3

PROGRAMME POUR LES STRATEGIES LINEAIRES D'ASSIGNATION VECTORIELLE DANS UN PARALLELEPIPEDE RECTANGLE

(M. Lapointe)

Ce programme est l'analogue en dimension trois de celui de l'Annexe 1.

Données à l'entrée

A l'entrée, on doit fournir trois entiers N1,N2 et N3 où N3 ≥ 2 est le nombre de fréquences assignées sur une même antenne. Les autres données d'entrée sont les mêmes que pour le programme de l'annexe 1.

Si désiré, ce programme donne la liste de tous les triplets (I1,I2,I3) tels que

a) (CAS D)

$I_1 = N_2N_3J_1 \qquad (J_1,N_1) = 1$

$I_2 = N_3J_2 \qquad (J_2,N_2) = 1 \quad \text{et} \quad I_3 = 1$

b) (CAS E)

$I_2 = N_3N_1J_2 \quad (J_2,N_2) = 1$

$I_1 = N_3J_1 \quad (J_1,N_1) = 1 \quad \text{et} \quad I_3 = 1$.

I1 est important de noter que les conditions a) et b) ne génèrent qu'une partie des triplets (I1,I2,I3) caractérisant les assignations linéaires en dimension trois. En pratique ce choix particulier des entiers (I1,I2,I3) correspond à empiler les fréquences adjacentes sur une même antenne, ce qui permet d'obtenir de meilleurs résultats. Le programme complet est cependant disponible. Les autres données de sortie sont identiques à celles du programme de l'annexe 1.

```
10=LINUS, CM75000, T60.
20=*CODE
30=FTN5(L=0)
40=LGO.
50=*WEOR
60=*FTN
70=       PROGRAM D3(INPUT, OUTPUT)
80=       COMMON/VERIFI/KR, LDK, DA, DR, ALOG2, NMAX, I1, I2, I3,
90=      #                A1, LDT, LDTP1, DT1, DT2, DT3, MLIM, IFLAG,
100=     #                 T13, T23, INDEX, IPMAX, IPROD
110=      COMMON/NOM/N1, N2, N3, FN1, FN2, FN3, N1M1, N2M1, N3M1,
120=     #             N11, N22, N12, N13, N23, N123, LIM1, LIM2,
130=     #             IR, R2, EPS
140=      COMMON/SAL/ALPHA1, ALPHA2, ALPHA3, L11, L12, L13, K21, K22, K23,
150=     #             K31, K32, NBAR
160=      DIMENSION I1MAX(1000), I2MAX(1000), I3MAX(1000), II(500),
170=     #          PROD(500)
180=       INTEGER PMIN
190=       F(X)=ALOG10(DT3/A1)+0.225*ALOG10(X)-1.425*ALOG10(50.+X)
200=       FP(X)=0.225/X-1.425/(50.+X)
210=*
220=*      LECTURE DES DONNEES ET INITIALISATIONS
230=*
240=       READ *, N1, N2, N3
250=       READ *, A1, TRANS
260=       READ *, IMPRIME
270=       READ *, KONT
280=*
290=       IF(N1*N2*N3.LT.4) THEN
300=       PRINT 920
310=   920 FORMAT(1H1, 9X, 'N1*N2 DOIT ETRE PLUS GRAND QUE UN')
320=       STOP
330=       END IF
340=       IF(KONT.LE.0.OR.KONT.GT.3) THEN
350=       PRINT 930
360=   930 FORMAT(1H1, 9X, 'KONT = 1, 2 OU 3')
370=       STOP
380=       END IF
390=*
400=       GO TO(1, 2, 3), KONT
410=*
420=*      INITIALISATIONS POUR PMIN = -132
430=*
440=     1 MR=16
450=       DT1=4.371
460=       DT2=136.78
470=       DT3=300.839
480=       DR=22.3529
490=       DA=5.4435
500=       LDT=15
510=       LDTP1=16
520=       GO TO 4
530=*
540=*      INITIALISATIONS POUR PMIN = -140
550=*
560=     2 MR=4
570=       DT1=10.9796
580=       DT2=343.57
590=       DT3=476.798
600=       DR=30.3856
610=       DA=13.6735
620=       LDT=21
630=       LDTP1=22
640=       GO TO 4
650=*
660=*      INITIALISATIONS POUR PMIN = -148
670=*
680=     3 MR=2
690=       DT1=27.5795
700=       DT2=863.009
710=       DT3=755.674
720=       DR=41.305
730=       DA=34.346
740=       LDT=30
750=       LDTP1=31
760=*
770=     4 FN1=FLOAT(N1)
780=       FN2=FLOAT(N2)
790=       FN3=FLOAT(N3)
800=       A2=A1*FN2/FN1
810=       A3=A1*FN3/FN1
820=       PRINT 525, N1, N2, N3, A1, A2, A3, TRANS
830=   525 FORMAT(1H1//10X, 'N1 = ', I5, 5X, 'N2 = ', I5, 5X, 'N3 = ', I5//
840=      #        10X, 'A1 = ', F8.3, 5X, 'A2 = ', F8.3, 5X, 'A3 = ', F8.3//
850=      #        10X, 'RA1/N1 = ', F8.3//)
860=       A1=A1/FN1
```

```
      TRANS=TRANS/A1
      AB=(1.-TRANS)*A1
      KK=INT(DR/AB)
      IF(AB.LE.0.) THEN
      PRINT 535,AB,A1
  535 FORMAT(10X,'A1/N1-TRANS = ',F8.3,5X,'A1/N1 = ',F8.3/)
      PRINT 700
      STOP
      END IF
      PMIN=-132-(KONT-1)*8
      PRINT 500,PMIN,KK,A1
  500 FORMAT(10X,'PMIN = ',I4,5X,'K = ',I3,5X,'A1/N1 = ',F7.3/)
C*
       N1S2=MAX0(1,N1/2)
       N2S2=MAX0(1,N2/2)
       N3S2=MAX0(1,N3/2)
       N12=N1*N2
       N13=N1*N3
       N23=N2*N3
       N123=N1*N2*N3
       N12S2=MAX0(1,N12/2)
       N13S2=MAX0(1,N13/2)
       N23S2=MAX0(1,N23/2)
       N123S2=N123/2
       N11=N1*N1
       N22=N2*N2
       N1M1=N1-1
       N2M1=N2-1
       N3M1=N3-1
       LIM1=N2/N1
       LIM2=N1/N2
       IR2=N1S2**2+N2S2**2
       R2=IR2
       R=SQRT(R2)
       IR=INT(R)
       EPS=1.E-8
       NITER=30
       ALOG2=ALOG10(2.)
       T13=1./3.
       T23=2./3.
       T16=1./6.
       INDEX=0
       NTRIPLE=0
       IPMAX=0
       KR=MIN0(KK,MR)
C*
C*     CALCUL DU M LIMITE
C*
       IF(A1.GE.DT1) THEN
       MLIM=0
       GO TO 5
       END IF
       MLIM=INT(10**(ALOG10(DT1/A1)/0.315))
       IF(MLIM.LE.13) GO TO 5
       MLIM=INT(10**(ALOG10(DT2/A1)/1.645))
       IF(MLIM.LE.LDT) GO TO 5
       X=LDTP1
       DO 10 L=1,NITER
   10  X=X-F(X)/FP(X)
       MLIM=INT(X)
    5  PRINT 940,DA,DR,MR,MLIM
  940 FORMAT(10X,'DA = ',F7.4,5X,'DR = ',F7.4,5X,'MR = ',I2,5X,
     #       'MLIM = ',I3//)
       LDK=MAX0(2*KR,MLIM)
C*
C*
C*     GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)
C*
C*
       PRINT 650
  650 FORMAT(//10X,'GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)'/)
       ICONT=4
C*
       DO 320 J1=1,N1S2
       CALL GCD(J1,N1,IP)
       IF(IP.NE.1) GO TO 320
       I1=J1*N23
C*
       DO 330 J2=1,N12S2
       CALL GCD(J2,N2,IP)
       IF(IP.NE.1) GO TO 330
       I2=J2*N3
C*
       DO 340 I3=1,1
       CALL GCD(I3,N3,IP)
       IF(IP.NE.1) GO TO 340
C*
       CALL VERIFI(ICONT,I1MAX,I2MAX,I3MAX,J1,J2,I3)
```

```
3030=*
3040=       IF(IMPRIME.EQ.0.OR.IFLAG.EQ.0) GO TO 340
3050=       NTRIPLE=NTRIPLE+1
3060=       II(NTRIPLE)=I3
3070=       PROD(NTRIPLE)=FLOAT(IPROD)**T16*A1
3080=   340 CONTINUE
3090=       IF(IMPRIME.EQ.0.OR.NTRIPLE.EQ.0) GO TO 330
3100=*
3110=*      IMPRESSION DE LA LISTE DES TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES
3120=*
3130=       PRINT 660,I1,I2,INDEX
3140=   660 FORMAT(/10X,'I1 = ',I5,5X,'I2 = ',I5,5X,'INDEX = ',I5/)
3150=       PRINT 670
3160=   670 FORMAT(10X,'   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=',
3170=      #       '       I3=   PROD=')
3180=       PRINT 580,(II(LL),PROD(LL),LL=1,NTRIPLE)
3181=   580 FORMAT((7X,4(I9,F8.3)))
3190=       NTRIPLE=0
3200=   330 CONTINUE
3210=   320 CONTINUE
3211=       IF(N1.EQ.N2) GO TO 1000
3220=*
3230=*
3240=*      GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8E)
3250=*
3260=*
3270=       PRINT 680
3280=   680 FORMAT(//10X,'GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8E)'/)
3290=       ICONT=5
3300=*
3310=       DO 420 J2=1,N2S2
3320=       CALL GCD(J2,N2,IP)
3330=       IF(IP.NE.1) GO TO 420
3340=       I2=J2*N13
3350=*
3360=       DO 430 J1=1,N12S2
3370=       CALL GCD(J1,N1,IP)
3380=       IF(IP.NE.1) GO TO 430
3390=       I1=J1*N3
3400=*
3410=       DO 440 I3=1,1
3420=       CALL GCD(I3,N3,IP)
3430=       IF(IP.NE.1) GO TO 440
3440=*
3450=       CALL VERIFI(ICONT,I1MAX,I2MAX,I3MAX,J1,J2,I3)
3460=*
3470=       IF(IMPRIME.EQ.0.OR.IFLAG.EQ.0) GO TO 440
3480=       NTRIPLE=NTRIPLE+1
3490=       II(NTRIPLE)=I3
3500=       PROD(NTRIPLE)=FLOAT(IPROD)**T16*A1
3510=   440 CONTINUE
3520=       IF(IMPRIME.EQ.0.OR.NTRIPLE.EQ.0) GO TO 430
3530=*
3540=*      IMPRESSION DE LA LISTE DES TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES
3560=*
3570=       PRINT 690,I2,I1,INDEX
3580=   690 FORMAT(/10X,'I2 = ',I5,5X,'I1 = ',I5,5X,'INDEX = ',I5/)
3590=       PRINT 670
3600=       PRINT 580,(II(LL),PROD(LL),LL=1,NTRIPLE)
3610=       NTRIPLE=0
3620=   430 CONTINUE
3630=   420 CONTINUE
4050=*
4060=  1000 IF(INDEX.EQ.0) THEN
4070=       PRINT 700
4080=   700 FORMAT(//10X,'IL N''Y A PAS DE SOLUTION')
4090=       STOP
4100=       END IF
4110=       PRINT 730,INDEX
4120=   730 FORMAT(/10X,'NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES = ',I8/)
4130=*
4140=*      IMPRESSION DU MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) ET
4150=*      DES TRIPLETS (I1,I2,I3)
4160=*
4170=       PMAX=FLOAT(IPMAX)**T16*A1
4180=       PRINT 740,PMAX
4190=   740 FORMAT(//10X,'(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ',
4200=      #       '(D(1)**2/3)(D(2)**1/3)'/10X,
4210=      #       'MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) = ',F8.3/)
4220=       PRINT 760
4230=   760 FORMAT(10X,'   I1=   I2=   I3=')
4240=       PRINT 770,(I1MAX(MM),I2MAX(MM),I3MAX(MM),MM=1,NMAX)
4250=   770 FORMAT(10X,3I6)
4260=       PRINT 750,NMAX
4270=   750 FORMAT(//10X,'NMAX = ',I3)
4280=       STOP
4290=       END
4300=*
```

```
4310=*      VERIFICATION DES CONDITIONS DE NON INTERFERENCE ET
4320=*      CALCUL DU MAX (E(1)**4)(E(2)**2)
4330=*
4340=       SUBROUTINE VERIFI(ICONT,I1MAX,I2MAX,I3MAX,K1,K2,K3)
4350=       COMMON/VERIFI/KR,LDK,DA,DR,ALOG2,NMAX,I1,I2,I3,
4360=      #              A1,LDT,LDTP1,DT1,DT2,DT3,MLIM,IFLAG,
4370=      #              T13,T23,INDEX,IPMAX,IPROD
4380=       COMMON/SAL/ALPHA1,ALPHA2,ALPHA3,L11,L12,L13,K21,K22,K23,
4390=      #           K31,K32,NBAR
4400=       COMMON/NOM/N1,N2,N3,FN1,FN2,FN3,N1M1,N2M1,N3M1,
4410=      #           N11,N22,N12,N13,N23,N123,LIM1,LIM2,
4420=      #           IR,R2,EPS
4430=       DIMENSION I1MAX(1),I2MAX(1),I3MAX(1),DK(500)
4440=       IFLAG=1
4450=*
4460=*      CALCUL DES CONSTANTES ALPHA1, ALPHA2, ALPHA3, NU1, NU2, NU3
4470=*
4480=       CALL ALPHANU(K1,K2,K3,ICONT)
4490=*
4500=       IF(ICONT.GT.2.AND.NBAR.LT.N3M1) THEN
4510=       PRINT 999,I1,I2,I3,ICONT
4520=  999  FORMAT(10X,4I6)
4530=       GO TO 100
4540=       END IF
4550=*
4560=*      CALCUL DE LA DISTANCE E0+**2 DANS LES CAS 8A ET 8B ET
4570=*      SEULEMENT SI LDK >= N1*N2
4580=*
4590=       IF(ICONT.LE.2.AND.LDK.GE.N12) CALL EZERO(IE02,ICONT)
4600=*
4610=*      CALCUL DU PRODUIT (E(1)**4)(E(2)**2) ET DES DISTANCES DK
4620=*
4630=       CALL EK(1,IEK2,ICONT)
4640=       DK(1)=SQRT(FLOAT(IEK2))*A1
4650=       IPROD=IEK2*IEK2
4660=       CALL EK(2,IEK2,ICONT)
4670=       DK(2)=SQRT(FLOAT(IEK2))*A1
4680=       IPROD=IPROD*IEK2
4690=       DO 10 L=3,LDK
4700=       CALL EK(L,IEK2,ICONT)
4710=       IF(IEK2.EQ.0) IEK2=IE02
4720=    10 DK(L)=SQRT(FLOAT(IEK2))*A1
4730=*
4740=*      VERIFICATION DE LA CONDITION D'ADJACENCE
4750=*
4760=       IF(DK(1).LT.DA) GO TO 100
4770=*
4780=*      VERIFICATION DES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION
4790=*      ET D'INTERMODULATION TX
4800=*
4810=       LL=MINO(13,MLIM)
4820=       DO 20 M=1,LL
4830=       T=DT1/M**0.315
4840=    20 IF(DK(M).LT.T) GO TO 100
4850=*
4860=       LL=MINO(LDT,MLIM)
4870=       DO 30 M=14,LL
4880=       T=DT2/M**1.645
4890=    30 IF(DK(M).LT.T) GO TO 100
4900=*
4910=       DO 40 M=LDTP1,MLIM
4920=       T=DT3*M**0.225/(50.+M)**1.425
4930=    40 IF(DK(M).LT.T) GO TO 100
4940=*
4950=*      VERIFICATION DES CONDITIONS D'INTERMODULATION RX
4960=*
4970=       DO 50 K=1,KR,2
4980=*
4990=*      CALCUL DE LA LIMITE SUPERIEURE POUR N
5000=*
5010=       LSN=ALOG10(KR/FLOAT(K))/ALOG2
5020=       DO 50 N=0,LSN
5030=       KF1=K*2**N
5040=       KF2=KF1*2
5050=       T=DK(KF1)**T23*DK(KF2)**T13*KF1
5060=       IF(T.LT.DR) GO TO 100
5070=    50 CONTINUE
5080=*
5090=*      CALCUL DU MAX (E(1)**4)(E(2)**2)
5100=*
5110=       INDEX=INDEX+1
5120=       IF(IPROD.GT.IPMAX) THEN
5130=       IPMAX=IPROD
5140=       NMAX=1
5150=       I1MAX(NMAX)=I1
5160=       I2MAX(NMAX)=I2
5170=       I3MAX(NMAX)=I3
5180=       ELSE IF(IPROD.EQ.IPMAX) THEN
```

```
5190=       NMAX=NMAX+1
5200=       I1MAX(NMAX)=I1
5210=       I2MAX(NMAX)=I2
5220=       I3MAX(NMAX)=I3
5230=       END IF
5240=       RETURN
5250=   100 IFLAG=0
5260=       RETURN
5270=       END
5280=*
5290=*      CALCUL DES CONSTANTES ALPHA1, ALPHA2, ALPHA3, NU1, NU2, NU3
5300=*
5310=       SUBROUTINE ALPHANU(K1,K2,K3,ICONT)
5320=       COMMON/NOM/N1,N2,N3,FN1,FN2,FN3,N1M1,N2M1,N3M1,
5330=      #           N11,N22,N12,N13,N23,N123,LIM1,LIM2,
5340=      #           IR,R2,EPS
5350=       COMMON/SAL/ALPHA1,ALPHA2,ALPHA3,L11,L12,L13,
5360=      #           K21,K22,K23,K31,K32,NBAR
5370=       INTEGER ALPHA1,ALPHA2,ALPHA3,PGCD
5380=*
5390=*      CALCUL DE ALPHA1 ET NU1
5400=*
5410=       DO 10 ALPHA1=0,N1M1
5420=       R=(1-ALPHA1*K1)/FN1
5430=       DIFF=ABS(R-INT(R))
5440=       IF(DIFF.LT.EPS) GO TO 15
5450=    10 CONTINUE
5460=    15 NU1=R
5470=*
5480=*      CALCUL DE ALPHA2 ET NU2
5490=*
5500=       DO 20 ALPHA2=0,N2M1
5510=       R=(1-ALPHA2*K2)/FN2
5520=       DIFF=ABS(R-INT(R))
5530=       IF(DIFF.LT.EPS) GO TO 25
5540=    20 CONTINUE
5550=    25 NU2=R
5560=*
5570=*      CALCUL DE ALPHA3 ET NU3
5580=*
5590=       DO 30 ALPHA3=0,N3M1
5600=       R=(1-ALPHA3*K3)/FN3
5610=       DIFF=ABS(R-INT(R))
5620=       IF(DIFF.LT.EPS) GO TO 35
5630=    30 CONTINUE
5640=    35 NU3=R
5650=*
5660=*      CALCUL DES CONSTANTES L11, L12, L13, K21, K22, K23, K31, K32, NBAR
5670=*
5680=       GO TO(100,200,300,400,500,600),ICONT
5690=*
5700=   100 L12=ALPHA2*NU1
5710=       K22=ALPHA2*K1
5720=       RETURN
5730=   200 L11=ALPHA1*NU2
5740=       K21=ALPHA1*K2
5750=       RETURN
5760=   300 L11=ALPHA1*NU2*NU3
5770=       L13=ALPHA3*NU2
5780=       K21=ALPHA1*NU3*K2
5790=       K23=ALPHA3*K2
5800=       K31=ALPHA1*K3
5810=       NBAR=MIN0(N13/PGCD(N1,K3)/2,N3M1)
5820=       RETURN
5830=   400 L11=ALPHA1*NU2*NU3
5840=       L12=ALPHA2*NU3
5850=       K21=ALPHA1*NU2*K3
5860=       K22=ALPHA2*K3
5870=       K31=ALPHA1*K2
5880=       NBAR=MIN0(N123/PGCD(N12,K3)/2,N3M1)
5890=       RETURN
5900=   500 L11=ALPHA1*NU3
5910=       L12=ALPHA2*NU1*NU3
5920=       K21=ALPHA1*K3
5930=       K22=ALPHA2*NU1*K3
5940=       K32=ALPHA2*K1
5950=       NBAR=MIN0(N123/PGCD(N12,K3)/2,N3M1)
5960=       RETURN
5970=   600 L12=ALPHA2*NU1*NU3
5980=       L13=ALPHA3*NU1
5990=       K22=ALPHA2*NU3*K1
6000=       K23=ALPHA3*K1
6010=       K32=ALPHA2*K3
6020=       NBAR=MIN0(N23/PGCD(N2,K3)/2,N3M1)
6030=       RETURN
6040=       END
6050=*
6060=*      CALCUL DES DISTANCES EK**2
```

```
6070=*
6080=       SUBROUTINE EK(K, IEK2, ICONT)
6090=       COMMON/NOM/N1, N2, N3, FN1, FN2, FN3, N1M1, N2M1, N3M1,
6100=      #           N11, N22, N12, N13, N23, N123, LIM1, LIM2,
6110=      #           IR, R2, EPS
6120=       COMMON/SAL/ALPHA1, ALPHA2, ALPHA3, L11, L12, L13,
6130=      #           K21, K22, K23, K31, K32, NBAR
6140=       INTEGER ALPHA1, ALPHA2, ALPHA3, D1, D2, D3
6150=       IEK2=1000000
6160=*
6170=       GO TO(100, 200, 300, 400, 500, 600), ICONT
6180=*
6190=*      TRAITEMENT DE LA PREMIERE GENERATION DE TRIPLETS  (CAS 8A)
6200=*
6210=  100  K11=K*ALPHA1
6220=       K12=K*L12
6230=*
6240=*      CALCUL DES BORNES POUR D1
6250=*
6260=       LI1=(-IR-K11)/N1
6270=       R=(IR-K11)/FN1
6280=       LS1=INT(R)
6290=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS1) LS1=LS1-1
6300=*
6310=*      RECHERCHE DE EK**2
6320=*
6330=       DO 130 D1=LI1, LS1
6340=       I1=K11+D1*N1
6350=       I11=I1*I1
6360=       M1=K12-D1*K22
6370=*
6380=*      CALCUL DES BORNES POUR D2
6390=*
6400=       IB=SQRT(R2-I11)
6410=       R=(-IB-M1)/FN2
6420=       LI2=INT(R)
6430=       IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI2) LI2=LI2+1
6440=       R=(IB-M1)/FN2
6450=       LS2=INT(R)
6460=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS2) LS2=LS2-1
6470=*
6480=       DO 140 D2=LI2, LS2
6490=       I2=D2*N2+M1
6500=       ID2=I11+I2*I2
6510=       IEK2=MINO(IEK2, ID2)
6520=  140  CONTINUE
6530=  130  CONTINUE
6540=       RETURN
6550=*
6560=*      TRAITEMENT DE LA DEUXIEME GENERATION DE TRIPLETS  (CAS 8B)
6570=*
6580=  200  K11=K*L11
6590=       K12=K*ALPHA2
6600=*
6610=*      CALCUL DES BORNES POUR D2
6620=*
6630=       LI2=(-IR-K12)/N2
6640=       R=(IR-K12)/FN2
6650=       LS2=INT(R)
6660=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS2) LS2=LS2-1
6670=*
6680=*      RECHERCHE DE EK**2
6690=*
6700=       DO 30 D2=LI2, LS2
6710=       I2=K12+D2*N2
6720=       I22=I2*I2
6730=       M1=K11-D2*K21
6740=*
6750=*      CLACUL DES BORNES POUR D1
6760=*
6770=       IB=SQRT(R2-I22)
6780=       R=(-IB-M1)/FN1
6790=       LI1=INT(R)
6800=       IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI1) LI1=LI1+1
6810=       R=(IB-M1)/FN1
6820=       LS1=INT(R)
6830=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS1) LS1=LS1-1
6840=*
6850=       DO 40 D1=LI1, LS1
6860=       I1=D1*N1+M1
6870=       ID2=I1*I1+I22
6880=       IEK2=MINO(IEK2, ID2)
6890=   40  CONTINUE
6900=   30  CONTINUE
6910=       RETURN
6920=*
6930=*      TRAITEMENT DE LA TROISIEME GENERATION DE TRIPLETS  (CAS 8C)
6940=*
```

```
 6950=  300 K11=K*L11
 6960=      K12=K*ALPHA2
 6970=      K13=K*L13
 6980=*
 6990=*     CALCUL DES BORNES POUR D2
 7000=*
 7010=      LI2=(-IR-K12)/N2
 7020=      R=(IR-K12)/FN2
 7030=      LS2=INT(R)
 7040=      IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS2) LS2=LS2-1
 7050=*
 7060=*     RECHERCHE DE EK**2
 7070=*
 7080=      DO 330 D2=LI2,LS2
 7090=      I2=D2*N2+K12
 7100=      I22=I2*I2
 7110=      M1=K13-D2*K23
 7120=      M2=K11-D2*K21
 7130=      IB=SQRT(R2-I22)
 7140=*
 7150=*     CALCUL DES BORNES POUR D3
 7160=*
 7170=      R=(-NBAR-M1)/FN3
 7180=      LI3=INT(R)
 7190=      IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI3) LI3=LI3+1
 7200=      R=(NBAR-M1)/FN3
 7210=      LS3=INT(R)
 7220=      IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS3) LS3=LS3-1
 7230=*
 7240=      DO 340 D3=LI3,LS3
 7250=      M3=M2-D3*K31
 7260=*
 7270=*     CALCUL DES BORNES POUR D1
 7280=*
 7290=      R=(-IB-M3)/FN1
 7300=      LI1=INT(R)
 7310=      IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI1) LI1=LI1+1
 7320=      R=(IB-M3)/FN1
 7330=      LS1=INT(R)
 7340=      IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS1) LS1=LS1-1
 7350=*
 7360=      DO 350 D1=LI1,LS1
 7370=      I1=D1*N1+M3
 7380=      ID2=I1*I1+I22
 7390=      IF(ID2.EQ.0) GO TO 350
 7400=      IEK2=MINO(IEK2,ID2)
 7410=  350 CONTINUE
 7420=  340 CONTINUE
 7430=  330 CONTINUE
 7440=      RETURN
 7450=*
 7460=*     TRAITEMENT DE LA QUATRIEME GENERATION DE TRIPLETS  (CAS 8D)
 7470=*
 7480=  400 K11=K*L11
 7490=      K12=K*L12
 7500=      K13=K*ALPHA3
 7510=*
 7520=*     CALCUL DES BORNES POUR D3
 7530=*
 7540=      LI3=(-NBAR-K13)/N3
 7550=      R=(NBAR-K13)/FN3
 7560=      LS3=INT(R)
 7570=      IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS3) LS3=LS3-1
 7580=*
 7590=*     RECHERCHE DE EK**2
 7600=*
 7610=      DO 430 D3=LI3,LS3
 7620=      M1=K12-D3*K22
 7630=      M2=K11-D3*K21
 7640=*
 7650=*     CALCUL DES BORNES POUR D2
 7660=*
 7670=      R=(-IR-M1)/FN2
 7680=      LI2=INT(R)
 7690=      IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI2) LI2=LI2+1
 7700=      R=(IR-M1)/FN2
 7710=      LS2=INT(R)
 7720=      IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS2) LS2=LS2-1
 7730=*
 7740=      DO 440 D2=LI2,LS2
 7750=      I2=D2*N2+M1
 7760=      I22=I2*I2
 7770=      M3=M2-D2*K31
 7780=*
 7790=*     CALCUL DES BORNES POUR D1
 7800=*
 7810=      IB=SQRT(R2-I22)
 7820=      R=(-IB-M3)/FN1
```

```
7830=       LI1=INT(R)
7840=       IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI1) LI1=LI1+1
7850=       R=(IB-M3)/FN1
7860=       LS1=INT(R)
7870=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS1) LS1=LS1-1
7880=*
7890=       DO 450 D1=LI1,LS1
7900=       I1=D1*N1+M3
7910=       ID2=I1*I1+I22
7920=       IF(ID2.EQ.0) GO TO 450
7930=       IEK2=MINO(IEK2,ID2)
7940=   450 CONTINUE
7950=   440 CONTINUE
7960=   430 CONTINUE
7970=       RETURN
7980=*
7990=*      TRAITEMENT DE CINQUIEME GENERATION DE TRIPLETS  (CAS 8E)
8000=*
8010=   500 K11=K*L11
8020=       K12=K*L12
8030=       K13=K*ALPHA3
8040=*
8050=*      CALCUL DES BORNES POUR D3
8060=*
8070=       LI3=(-NBAR-K13)/N3
8080=       R=(NBAR-K13)/FN3
8090=       LS3=INT(R)
8100=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS3) LS3=LS3-1
8110=*
8120=*      RECHERCHE DE EK**2
8130=*
8140=       DO 530 D3=LI3,LS3
8150=       M1=K11-D3*K21
8160=       M2=K12-D3*K22
8170=*
8180=*      CALCUL DES BORNES POUR D1
8190=*
8200=       R=(-IR-M1)/FN1
8210=       LI1=INT(R)
8220=       IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI1) LI1=LI1+1
8230=       R=(IR-M1)/FN1
8240=       LS1=INT(R)
8250=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS1) LS1=LS1-1
8260=*
8270=       DO 540 D1=LI1,LS1
8280=       I1=D1*N1+M1
8290=       I11=I1*I1
8300=       M3=M2-D1*K32
8310=*
8320=*      CALCUL DES BORNES POUR D2
8330=*
8340=       IB=SQRT(R2-I11)
8350=       R=(-IB-M3)/FN2
8360=       LI2=INT(R)
8370=       IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI2) LI2=LI2+1
8380=       R=(IB-M3)/FN2
8390=       LS2=INT(R)
8400=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS2) LS2=LS2-1
8410=*
8420=       DO 550 D2=LI2,LS2
8430=       I2=D2*N2+M3
8440=       ID2=I11+I2*I2
8450=       IF(ID2.EQ.0) GO TO 550
8460=       IEK2=MINO(IEK2,ID2)
8470=   550 CONTINUE
8480=   540 CONTINUE
8490=   530 CONTINUE
8500=       RETURN
8510=*
8520=*      TRAITEMENT DE SIXIEME GENERATION DE TRIPLETS  (CAS 8F)
8530=*
8540=   600 K11=K*ALPHA1
8550=       K12=K*L12
8560=       K13=K*L13
8570=*
8580=*      CALCUL DES BORNES POUR D1
8590=*
8600=       LI1=(-IR-K11)/N1
8610=       R=(IR-K11)/FN1
8620=       LS1=INT(R)
8630=       IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS1) LS1=LS1-1
8640=*
8650=*      RECHERCHE DE EK**2
8660=*
8670=       DO 630 D1=LI1,LS1
8680=       I1=D1*N1+K11
8690=       I11=I1*I1
8700=       M1=K13-D1*K23
```

```
      M2=K12-D1*K22
      IB=SQRT(R2-I11)
C
C     CALCUL DES BORNES POUR D3
C
      R=(-NBAR-M1)/FN3
      LI3=INT(R)
      IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI3) LI3=LI3+1
      R=(NBAR-M1)/FN3
      LS3=INT(R)
      IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS3) LS3=LS3-1
C
      DO 640 D3=LI3,LS3
      M3=M2-D3*K32
C
C     CALCUL DES BORNES POUR D2
C
      R=(-IB-M3)/FN2
      LI2=INT(R)
      IF(R.GT.0..AND.R.NE.LI2) LI2=LI2+1
      R=(IB-M3)/FN2
      LS2=INT(R)
      IF(R.LT.0..AND.R.NE.LS2) LS2=LS2-1
C
      DO 650 D2=LI2,LS2
      I2=D2*N2+M3
      ID2=I11+I2*I2
      IF(ID2.EQ.0) GO TO 650
      IEK2=MINO(IEK2,ID2)
  650 CONTINUE
  640 CONTINUE
  630 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C     CALCUL DE LA DISTANCE E0+**2
C
      SUBROUTINE EZERO(IE02,ICONT)
      COMMON/NOM/N1,N2,N3,FN1,FN2,FN3,N1M1,N2M1,N3M1,
     #           N11,N22,N12,N13,N23,N123,LIM1,LIM2,
     #           IR,R2,EPS
      COMMON/SAL/ALPHA1,ALPHA2,ALPHA3,L11,L12,L13,
     #           K21,K22,K23,K31,K32,NBAR
      INTEGER D1,D2
C
      IF(ICONT.EQ.2) GO TO 200
C
C     TRAITEMENT DE LA PREMIERE GENERATION DE TRIPLETS  (CAS 8A)
C
      IE02=N22
      IF(N1.GE.N2) RETURN
C
C     RECHERCHE DE E0+**2
C
      DO 120 D1=1,LIM1
      M1=D1*K22
      M1=MOD(M1,N2)
      IF(M1.LT.0) M1=M1+N2
      I2=MINO(M1,N2-M1)
      ID2=D1*D1*N11+I2*I2
      IE02=MINO(IE02,ID2)
      IDS=(D1+1)**2*N11
      IF(IE02.LE.IDS) RETURN
  120 CONTINUE
C
C     TRAITEMENT DE LA DEUXIEME GENERATION DE TRIPLETS  (CAS 8B)
C
  200 IE02=N11
      IF(N1.LE.N2) RETURN
C
C     RECHERCHE DE E0+**2
      DO 220 D2=1,LIM2
      M1=D2*K21
      M1=MOD(M1,N1)
      IF(M1.LT.0) M1=M1+N1
      I1=MINO(M1,N1-M1)
      ID2=D2*D2*N22+I1*I1
      IE02=MINO(IE02,ID2)
      IDS=(D2+1)**2*N22
      IF(IE02.LE.IDS) RETURN
  220 CONTINUE
      END
C
C     TEST POUR SAVOIR SI LE PGCD DE I ET N EST EGAL A 1 OU NON
C
      SUBROUTINE GCD(I,N,IN)
      IN=1
      IF(I.EQ.1) RETURN
```

```
9590=       M=MINO(I,N)
9600=       DO 10 L=2,M
9610=       IL=MOD(I,L)
9620=       IF(IL.NE.0) GO TO 10
9630=       NL=MOD(N,L)
9640=       IF(NL.EQ.0) GO TO 20
9650=    10 CONTINUE
9660=       RETURN
9670=    20 IN=L
9680=       RETURN
9690=       END
9700=*
9710=*      CALCUL DU PGCD DE I ET J
9720=*
9730=       INTEGER FUNCTION PGCD(I,J)
9740=       PGCD=1
9750=       M=MINO(I,J)
9760=       IF(M.EQ.1) RETURN
9770=       DO 10 L=2,M
9780=       IL=MOD(I,L)
9790=       IF(IL.NE.0) GO TO 10
9800=       JL=MOD(J,L)
9810=       IF(JL.NE.0) GO TO 10
9820=       PGCD=L
9830=    10 CONTINUE
9840=       RETURN
9850=       END
```

ANNEXE 4

PROGRAMME POUR LA GENERATION DES GRILLES ET DES DISTANCES e_m ET d_m DANS LE CAS DU PARALLELEPIPEDE RECTANGLE

(M. Lapointe)

Ce programme est l'analogue en dimension trois de celui de l'annexe 2.

Données à l'entrée

Les données à fournir à l'entrée sont:

1) trois entiers N1 N2 et N3 où $N3 \geq 2$ est le nombre de fréquences assignées sur une même antenne.

2) Un triplet d'entiers (I1,I2,I3) caractérisant une assignation linéaire vectorielle. Ce triplet est en général donné par le programme de l'annexe 3.

3) A1 et TRANS = 2r deux nombres réels. (Voir Annexe 1)

4) Deux entiers; le premier détermine la valeur de P_{MIN} comme dans les autres programmes et le deuxième contrôle l'impression des grilles. Une valeur nulle pour ce deuxième nombre supprimera la génération des grilles.

Le programme permet d'obtenir les grilles d'une assignation linéaire vectorielle déterminée par le triplet (I1,I2,I3) pour $-8 \leq i_1, i_2 \leq 8$ et $-(N3-1) \leq i_3 \leq N_3-1$, autout du point (0,0,0). Le reste du programme est identique à celui de l'annexe 2.

```
10=DIST3C,CM75000,T10.
20=*CODE
30=FTN5(L=0)
40=LGO.
50=*WEOR
60=*FTN
70=       PROGRAM DIST3C(INPUT,OUTPUT)
80=       DIMENSION IE(600),EK(600),DK(600),IP1(600),IP2(600),
90=      *          IP3(600),MA(17)
100=        INTEGER PMIN,PGCD
110=        F(X)=ALOG10(DT3/A1SN1)+0.225*ALOG10(X)-1.425*ALOG10(50.+X)
120=        FP(X)=0.225/X-1.425/(50.+X)
130=*
140=*       LECTURE DES DONNEES ET INITIALISATIONS
150=*
160=        READ *,N1,N2,N3
170=        READ *,II1,II2,II3
180=        READ *,A1,TRANS
190=        READ *,KONT,IGRILLE
200=*
210=        IF(N1*N2.LT.3) THEN
220=        PRINT 700
230=  700 FORMAT(1H1,9X,'N1*N2 DOIT ETRE PLUS GRAND QUE DEUX')
240=        STOP
250=        END IF
260=        IF(KONT.LE.0.OR.KONT.GT.3) THEN
270=        PRINT 710
280=  710 FORMAT(1H1,9X,'KONT = 1, 2 OU 3')
290=        STOP
300=        END IF
310=*
320=        GO TO(1,2,3),KONT
330=*
340=*       INITIALISATIONS POUR PMIN = -132
350=*
360=     1  MR=16
370=        DT1=4.371
380=        DT2=136.78
390=        DT3=300.839
400=        DR=22.3529
410=        DA=5.4435
420=        LDT=15
430=        LDTP1=16
440=        GO TO 4
450=*
460=*       INITIALISATIONS POUR PMIN = -140
470=*
480=     2  MR=4
490=        DT1=10.9796
500=        DT2=343.57
510=        DT3=476.798
520=        DR=30.3856
530=        DA=13.6735
540=        LDT=21
550=        LDTP1=22
560=        GO TO 4
570=*
580=*       INITIALISATIONS POUR PMIN = -148
590=*
600=     3  MR=2
610=        DT1=27.5795
620=        DT2=863.009
630=        DT3=755.674
640=        DR=41.305
650=        DA=34.346
660=        LDT=30
670=        LDTP1=31
680=*
690=     4  A2=A1*N2/N1
700=        A3=A1*N3/N1
710=        N123=N1*N2*N3
720=        A1SN1=A1/FLOAT(N1)
730=        AB=A1SN1-TRANS
740=        KK=INT(DR/AB)
750=        IF(AB.LE.0.) THEN
760=        PRINT 560
770=   560 FORMAT(//10X,'A1/N1-TRANS DOIT ETRE PLUS GRAND QUE ZERO')
780=        PRINT 720
790=   720 FORMAT(//10X,'IL N''Y A PAS DE SOLUTION')
800=        STOP
810=        END IF
820=        ALOG2=ALOG10(2.)
830=        T13=1./3.
840=        T23=2./3.
850=        KR=MAXO(1,MINO(KK,MR))
860=        NITER=30
```

```
870=       DRPT=DR+TRANS
880=       NZ=0
890=       PMIN=-132-(KONT-1)*8
900=*
910=*      CALCUL DE NBAR
920=*
930=       NBAR=N123/PGCD(N123,II3)
940=       NBAR=MINO(NBAR/2,N3-1)
950=*
960=       IF(IGRILLE.EQ.0) GO TO 1000
970=*
980=*      IMPRESSION DE LA GRILLE DES ASSIGNATIONS POUR -8<=I1,I2<=8
990=*
1000=       PRINT 530,N1,N2,N3,A1,A2,A3,II1,II2,II3
1010=  530 FORMAT(1H1/10X,'N1 = ',I3,5X,'N2 = ',I3,5X,'N3 = ',I3//
1020=     #        10X,'A1 = ',F7.3,5X,'A2 = ',F7.3,5X,'A3 = ',F7.3//
1030=     #        10X,'I1 = ',I4,5X,'I2 = ',I4,5X,'I3 = ',I4/)
1040=*
1050=       DO 10 I3=-NBAR,NBAR
1060=       KI3=II3*I3
1070=       PRINT 545,I3
1080=  545 FORMAT(1H1//37X,'I3 =',I3)
1090=       PRINT 540,(II-9,II=1,17)
1100=  540 FORMAT(//5X,17I4/1X,80(1H-))
1110=       DO 20 I2=8,-8,-1
1120=       DO 30 I1=-8,8
1130=       K=II1*I1+II2*I2+KI3
1140=       K=MOD(K,N123)
1150=       IF(K.LT.0) K=K+N123
1160=       MA(I1+9)=K
1170=    30 CONTINUE
1180=       PRINT 550,I2,(MA(L),L=1,17)
1190=  550 FORMAT(1X,I3,' I',17I4/5X,'I'/5X,'I')
1200=    20 CONTINUE
1210=    10 CONTINUE
1220=*
1230= 1000 PRINT 570,N1,N2,N3,II1,II2,II3
1240=  570 FORMAT(1H1/10X,'N1 = ',I3,3X,'N2 = ',I3,3X,'N3 = ',I3,5X,
1250=     #       'I1 = ',I4,3X,'I2 = ',I4,3X,'I3 = ',I4/)
1260=       PRINT 580,A1,A1SN1,TRANS
1270=  580 FORMAT(10X,'A1 = ',F8.3,5X,'A1/N1 = ',F8.3,5X,'R*A1/N1 = ',F8.3/)
1280=       PRINT 585,PMIN,KK,NBAR
1290=  585 FORMAT(10X,'PMIN = ',I4,5X,'K = ',I3,5X,'NBAR = ',I4/)
1300=       PRINT 690,DA,DR,MR
1310=  690 FORMAT(10X,'DA = ',F7.4,5X,'DR = ',F7.4,5X,'MR = ',I2/)
1320=*
1330=**     CALCUL DE M LIMITE
1340=*      ( PLUS GRAND M TEL QUE DMDT > A1/N1 )
1350=*
1360=       IF(A1SN1.GE.DT1) THEN
1370=       MLIM=0
1380=       GO TO 200
1390=       END IF
1400=       MLIM=INT(10**(ALOG10(DT1/A1SN1)/0.315))
1410=       IF(MLIM.LE.13) GO TO 200
1420=       MLIM=INT(10**(ALOG10(DT2/A1SN1)/1.645))
1430=       IF(MLIM.LE.LDT) GO TO 200
1440=       X=LDTP1
1450=       DO 210 L=1,NITER
1460=  210 X=X-F(X)/FP(X)
1470=       MLIM=INT(X)
1480=  200 LDK=MAXO(2*KR,MLIM)
1490=       DO 50 K=1,LDK
1500=    50 IE(K)=1000000
1510=*
1520=*      CALCUL DES DISTANCES EK**2 ET DES COORDONNEES CORRESPONDANTES
1530=*      IP1(K), IP2(K), IP3(K)
1540=*
1550=       DO 60 I1=-N1,N1
1560=       DO 70 I2=-N2,N2
1570=       ID=I1*I1+I2*I2
1580=       IF(ID.EQ.0) GO TO 70
1590=       IP=II1*I1+II2*I2
1600=       DO 75 I3=-NBAR,NBAR
1610=       K=IP+II3*I3
1620=       K=MOD(K,N123)
1630=       IF(K.LT.0) K=K+N123
1640=       IF(K.GT.LDK) GO TO 75
1650=       IF(K.EQ.0) GO TO 75
1660=       IF(ID.GT.IE(K)) GO TO 75
1670=       IE(K)=ID
1680=       IP1(K)=I1
1690=       IP2(K)=I2
1700=       IP3(K)=I3
1710=    75 CONTINUE
1720=    70 CONTINUE
1730=    60 CONTINUE
1740=*
```

```
C
C     CALCUL DES DISTANCES EK ET DK
C
      DO 80 K=1,LDK
      EK(K)=SQRT(FLOAT(IE(K)))
   80 DK(K)=EK(K)*A1SN1
C
C
C     CALCUL DE A* ET IMPRESSION DES RESULTATS
C
C
C     VERIFICATION DE LA CONDITION D'ADJACENCE
C
      IF(DK(1).LT.DA) THEN
      PRINT 730,DK(1)
  730 FORMAT(//10X,'LA CONDITION D''ADJACENCE N''EST PAS ',
     #       'RESPECTEE :  DK(1) = ',F8.4)
      STOP
      ELSE
      DL=1.-DA/DK(1)
      DA1=DL
      IPOS=1
      END IF
C
C     VERIFICATION DES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION ET
C     D'INTERMODULATION TX
C
      IF(MLIM.EQ.0) THEN
      PRINT 655,DT1
  655 FORMAT(/10X,'IL N''Y A PAS DE CONDITION DE DESENSIBILISATION ',
     #       'A VERIFIER :  D1DT = ',F7.4/)
      ELSE
      PRINT 660
  660 FORMAT(/15X,'M',5X,'E(M)',6X,'D(M)',3X,'I1(M)',2X,'I2(M)',
     #       2X,'I3(M)',4X,'DMDT'/)
      END IF
      LL=MINO(13,MLIM)
      DO 100 M=1,LL
      T=DT1/M**0.315
      PRINT 630,M,EK(M),DK(M),IP1(M),IP2(M),IP3(M),T
  630 FORMAT(10X,I6,2F10.3,I6,2I7,F10.3)
      DL=(DK(M)-T)/DK(M)
      IF(DL.LT.0.) NZ=1
      IF(DL.LT.DA1) THEN
      MMM=M
      IPOS=2
      DA1=DL
      END IF
  100 CONTINUE
C
      LL=MINO(LDT,MLIM)
      DO 110 M=14,LL
      T=DT2/M**1.645
      PRINT 630,M,EK(M),DK(M),IP1(M),IP2(M),IP3(M),T
      DL=(DK(M)-T)/DK(M)
      IF(DL.LT.0.) NZ=1
      IF(DL.LT.DA1) THEN
      MMM=M
      IPOS=2
      DA1=DL
      END IF
  110 CONTINUE
C
      DO 120 M=LDTP1,MLIM
      T=DT3*M**0.225/(50.+M)**1.425
      PRINT 630,M,EK(M),DK(M),IP1(M),IP2(M),IP3(M),T
      DL=(DK(M)-T)/DK(M)
      IF(DL.LT.0.) NZ=1
      IF(DL.LT.DA1) THEN
      MMM=M
      IPOS=2
      DA1=DL
      END IF
  120 CONTINUE
C
      IF(NZ.EQ.1) THEN
      PRINT 640
  640 FORMAT(/10X,'LES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION SONT VIOLEES')
      STOP
      END IF
C
C     VERIFICATION DES CONDITIONS D'INTERMODULATION RX
C
      PRINT 670
  670 FORMAT(/11X,'M',4X,'2M',5X,'E(M)',6X,'D(M)',3X,'I1(M)',
     #       2X,'I2(M)',2X,'I3(M)',2X,'(DM**2/3)(D2M**1/3)M'/)
C
      DO 90 K=1,KR,2
C
```

```
2630=*      CALCUL DE LA LIMITE SUPERIEURE POUR N
2640=*
2650=       LSN=ALOG10(KR/FLOAT(K))/ALOG2
2660=       DO 90 N=0,LSN
2670=       M=K*2**N
2680=       M2=2*M
2690=       T=(DK(M)**T23)*(DK(M2)**T13)*M
2700=       PRINT 600,M,M2,EK(M),DK(M),IP1(M),IP2(M),IP3(M),T
2710=  600 FORMAT(6X,2I6,2F10.3,I6,2I7,F16.3)
2720=       DL=(T-DRPT)/T
2730=       IF(DL.LT.0.) NZ=1
2740=       IF(DL.LT.DA1) THEN
2750=       MMM=M
2760=       IPOS=3
2770=       DA1=DL
2780=       END IF
2790=   90 CONTINUE
2800=*
2810=       IF(NZ.EQ.1) THEN
2820=       PRINT 590
2830=  590 FORMAT(/10X,'LES CONDITIONS D''INTERMODULATION SONT VIOLEES')
2840=       STOP
2850=       END IF
2860=*
2870=*      CALCUL DE LA CONTRACTION MAXIMALE
2880=*
2890=       AA=A1*(1.-DA1)
2900=*
2910=*      NOUVELLE VALEUR DE K
2920=*
2930=       AB=AA/N1-TRANS
2940=       KKK=INT(DR/AB)
2950=*
2960=*      NOUVELLE VALEUR DE M LIMITE
2970=*
2980=       A1SN1=AA/N1
2990=       IF(A1SN1.GE.DT1) THEN
3000=       MLIM2=0
3010=       GO TO 900
3020=       END IF
3030=       MLIM2=INT(10**(ALOG10(DT1/A1SN1)/0.315))
3040=       IF(MLIM2.LE.13) GO TO 900
3050=       MLIM2=INT(10**(ALOG10(DT2/A1SN1)/1.645))
3060=       IF(MLIM2.LE.LDT) GO TO 900
3070=       X=LDTP1
3080=       DO 910 L=1,NITER
3090=  910 X=X-F(X)/FP(X)
3100=       MLIM2=INT(X)
3110=*
3120=  900 IF(KKK.NE.KK) THEN
3130=       ALIM=(DR/(KK+1)+TRANS)*N1
3140=       PRINT 620,ALIM
3150=  620 FORMAT(/10X,'LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE',
3160=      #       ' A1 INFERIEURES A ',F7.3)
3170=       END IF
3180=*
3190=       IF(MLIM2.NE.MLIM) THEN
3200=       PRINT 625,MLIM2
3210=  625 FORMAT(/10X,'ON DOIT VERIFIER LES CONDITIONS DE ',
3220=      #       'DESENSIBILISATION JUSQU''A  M = ',I3)
3230=       END IF
3231=*
3240=       IF(IPOS.EQ.1) PRINT 800,AA
3250=       IF(IPOS.EQ.2) PRINT 810,AA,MMM
3260=       IF(IPOS.EQ.3) PRINT 820,AA,MMM
3270=  800 FORMAT(/10X,'A1* = ',F7.3,'    ( ADJACENCE )')
3280=  810 FORMAT(/10X,'A1* = ',F7.3,'    ( DESENSIBILISATION  M = ',I2,' )')
3290=  820 FORMAT(/10X,'A1* = ',F7.3,'    ( INTERMODULATION  M = ',I2,' )')
3300=       STOP
3310=       END
3320=       INTEGER FUNCTION PGCD(I,J)
3330=       PGCD=1
3340=       M=MIN0(I,J)
3350=       IF(M.EQ.1) RETURN
3360=       DO 10 L=2,M
3370=       IL=MOD(I,L)
3380=       IF(IL.NE.0) GO TO 10
3390=       JL=MOD(J,L)
3400=       IF(JL.NE.0) GO TO 10
3410=       PGCD=L
3420=    10 CONTINUE
3430=       RETURN
3440=       END
3450=*WEOR
```

ANNEXE 5

STRATEGIES LINEAIRES POUR LES CAS
$(N_1=N_2,N_3)$ = (32,1),(23,2),(19,3) et (16,4)
EN FONCTION DE P_{MIN} POUR UNE VILLE CARREE
DE COTE A = 100 KM

```
N1 =  32    N2 =  32    A1 = 100.000    A2 = 100.000    2*R =  0.000
PMIN = -132     K =   7     A1/N1 =   3.125
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16     MLIM =   3

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =      1760


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =    57.525

   I1=   I2=
  416   195

NMAX =       1
```

```
N1 =  32    N2 =  32    A1 = 100.000    A2 = 100.000    2*R =  0.000
PMIN = -140     K =   9     A1/N1 =   3.125
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4     MLIM =  18

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =      1413


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =    57.357

   I1=   I2=
  480   419

NMAX =       1
```

```
N1 =  32    N2 =  32    A1 = 100.000    A2 = 100.000    2*R =  0.000
PMIN = -148     K =  13     A1/N1 =   3.125
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2     MLIM =  31

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =       180


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =    56.785

   I1=   I2=
  352    57

NMAX =       1
```

N1 = 32 N2 = 32 A1 = 100.000 A2 = 100.000

I1 = 416 I2 = 195 2*R = 0.00000

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	280	696	88	504	920	312	728	120	536	952	344	760	152	568	984	376	792
7	85	501	917	309	725	117	533	949	341	757	149	565	981	373	789	181	597
6	914	306	722	114	530	946	338	754	146	562	978	370	786	178	5941010		402
5	719	111	527	943	335	751	143	559	975	367	783	175	5911007		399	815	207
4	524	940	332	748	140	556	972	364	780	172	5881004		396	812	204	620	12
3	329	745	137	553	969	361	777	169	5851001		393	809	201	617	9	425	841
2	134	550	966	358	774	166	582	998	390	806	198	614	6	422	838	230	646
1	963	355	771	163	579	995	387	803	195	611	3	419	835	227	643	35	451
0	768	160	576	992	384	800	192	608	0	416	832	224	640	32	448	864	256
-1	573	989	381	797	189	6051021		413	829	221	637	29	445	861	253	669	61
-2	378	794	186	6021018		410	826	218	634	26	442	858	250	666	58	474	890
-3	183	5991015		407	823	215	631	23	439	855	247	663	55	471	887	279	695
-4	1012	404	820	212	628	20	436	852	244	660	52	468	884	276	692	84	500
-5	817	209	625	17	433	849	241	657	49	465	881	273	689	81	497	913	305
-6	622	14	430	846	238	654	46	462	878	270	686	78	494	910	302	718	110
-7	427	843	235	651	43	459	875	267	683	75	491	907	299	715	107	523	939
-8	232	648	40	456	872	264	680	72	488	904	296	712	104	520	936	328	744

N1 = 32 N2 = 32 I1 = 416 I2 = 195

A1 = 100.000 A1/N1 = 3.125 2*R = 0.00000

PMIN = -132 K = 7

DA = 5.4435 DR = 22.3529 MR = 16

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	18.601	58.128	58.128	-15	11	4.371
2	18.028	56.337	56.337	-15	-10	3.514
3	2.236	6.988	6.988	2	1	3.092

M	2M	D(M)	D(M)-2R	I2(M)	I2(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	2	58.128	58.128	-15	11	57.525
2	4	56.337	56.337	-15	-10	111.969
4	8	55.287	55.287	-13	12	202.591
3	6	6.988	6.988	2	1	26.412
6	12	13.975	13.975	4	2	105.648
5	10	49.411	49.411	-13	-9	251.312
7	14	53.217	53.217	-11	13	303.611

LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A 89.412

ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION

A1* = 84.632 (INTERMODULATION M = 3)

N1 = 32 N2 = 32 A1 = 100.000 A2 = 100.000
I1 = 480 I2 = 419 2*R = 0.00000

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	5361016	472	952	408	888	344	824	280	760	216	696	152	632	88	568	24	
7	117	597	53	5331013	469	949	405	885	341	821	277	757	213	693	149	629	
6	722	178	658	114	594	50	5301010	466	946	402	882	338	818	274	754	210	
5	303	783	239	719	175	655	111	591	47	5271007	463	943	399	879	335	815	
4	908	364	844	300	780	236	716	172	652	108	588	44	5241004	460	940	396	
3	489	969	425	905	361	841	297	777	233	713	169	649	105	585	41	5211001	
2	70	550	6	486	966	422	902	358	838	294	774	230	710	166	646	102	582
1	675	131	611	67	547	3	483	963	419	899	355	835	291	771	227	707	163
0	256	736	192	672	128	608	64	544	0	480	960	416	896	352	832	288	768
-1	861	317	797	253	733	189	669	125	605	61	5411021	477	957	413	893	349	
-2	442	922	378	858	314	794	250	730	186	666	122	602	58	5381018	474	954	
-3	23	503	983	439	919	375	855	311	791	247	727	183	663	119	599	55	535
-4	628	84	564	20	500	980	436	916	372	852	308	788	244	724	180	660	116
-5	209	689	145	625	81	561	17	497	977	433	913	369	849	305	785	241	721
-6	814	270	750	206	686	142	622	78	558	14	494	974	430	910	366	846	302
-7	395	875	331	811	267	747	203	683	139	619	75	555	11	491	971	427	907
-8	1000	456	936	392	872	328	808	264	744	200	680	136	616	72	552	8	488

N1 = 32 N2 = 32 I1 = 480 I2 = 419
A1 = 100.000 A1/N1 = 3.125 2*R = 0.00000
PMIN = -140 K = 9
DA = 13.6735 DR = 30.3856 MR = 4

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	19.416	60.677	60.677	16	11	10.980
2	16.401	51.254	51.254	13	-10	8.826
3	3.162	9.882	9.882	-3	1	7.768
4	17.692	55.287	55.287	13	12	7.095
5	13.454	42.043	42.043	10	-9	6.613
6	6.325	19.764	19.764	-6	2	6.244
7	16.401	51.254	51.254	10	13	5.948
8	10.630	33.219	33.219	7	-8	5.703
9	9.487	29.646	29.646	-9	3	5.495
10	15.652	48.914	48.914	7	14	5.316
11	8.062	25.195	25.195	4	-7	5.159
12	12.649	39.528	39.528	-12	4	5.019
13	15.524	48.513	48.513	4	15	4.894
14	6.083	19.009	19.009	1	-6	4.473
15	15.811	49.411	49.411	-15	5	3.993
16	16.031	50.098	50.098	1	16	3.591
17	5.385	16.829	16.829	-2	-5	3.250
18	15.232	47.599	47.599	14	6	2.959

M	2M	D(M)	D(M)-2R	I2(M)	I2(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	2	60.677	60.677	16	11	57.357
2	4	51.254	51.254	13	-10	105.129
4	8	55.287	55.287	13	12	186.611
3	6	9.882	9.882	-3	1	37.352

LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A 97.234
ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION
A1* = 81.349 (INTERMODULATION M = 3)

N1 = 32 N2 = 32 A1 = 100.000 A2 = 100.000

I1 = 352 I2 = 57 2*R = 0.00000

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	712	40	392	744	72	424	776	104	456	808	136	488	840	168	520	872	200
7	655	1007	335	687	15	367	719	47	399	751	79	431	783	111	463	815	143
6	598	950	278	630	982	310	662	1014	342	694	22	374	726	54	406	758	86
5	541	893	221	573	925	253	605	957	285	637	989	317	669	1021	349	701	29
4	484	836	164	516	868	196	548	900	228	580	932	260	612	964	292	644	996
3	427	779	107	459	811	139	491	843	171	523	875	203	555	907	235	587	939
2	370	722	50	402	754	82	434	786	114	466	818	146	498	850	178	530	882
1	313	665	1017	345	697	25	377	729	57	409	761	89	441	793	121	473	825
0	256	608	960	288	640	992	320	672	0	352	704	32	384	736	64	416	768
-1	199	551	903	231	583	935	263	615	967	295	647	999	327	679	7	359	711
-2	142	494	846	174	526	878	206	558	910	238	590	942	270	622	974	302	654
-3	85	437	789	117	469	821	149	501	853	181	533	885	213	565	917	245	597
-4	28	380	732	60	412	764	92	444	796	124	476	828	156	508	860	188	540
-5	995	323	675	3	355	707	35	387	739	67	419	771	99	451	803	131	483
-6	938	266	618	970	298	650	1002	330	682	10	362	714	42	394	746	74	426
-7	881	209	561	913	241	593	945	273	625	977	305	657	1009	337	689	17	369
-8	824	152	504	856	184	536	888	216	568	920	248	600	952	280	632	984	312

N1 = 32 N2 = 32 I1 = 352 I2 = 57

A1 = 100.000 A1/N1 = 3.125 2*R = 0.00000

PMIN = -148 K = 13

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	18.358	57.367	57.367	16	9	27.580
2	17.804	55.639	55.639	11	-14	22.170
3	7.071	22.097	22.097	-5	-5	19.512
4	11.705	36.577	36.577	11	4	17.821
5	13.928	43.526	43.526	-5	13	16.612
6	14.142	44.194	44.194	-10	-10	15.684
7	6.083	19.009	19.009	6	-1	14.941
8	12.806	40.020	40.020	-10	8	14.326
9	18.028	56.337	56.337	6	17	13.804
10	6.083	19.009	19.009	1	-6	13.353
11	15.297	47.803	47.803	-15	3	12.958
12	12.042	37.630	37.630	1	12	12.608
13	11.705	36.577	36.577	-4	-11	12.294
14	12.166	38.017	38.017	12	-2	11.237
15	8.062	25.195	25.195	-4	7	10.031
16	18.358	57.367	57.367	-9	-16	9.021
17	9.899	30.936	30.936	7	-7	8.164
18	9.220	28.811	28.811	-9	2	7.432
19	13.038	40.745	40.745	7	11	6.799
20	12.166	38.017	38.017	2	-12	6.249
21	14.318	44.743	44.743	-14	-3	5.767
22	6.325	19.764	19.764	2	6	5.342
23	17.263	53.946	53.946	-3	-17	4.966
24	15.264	47.701	47.701	13	-8	4.630
25	3.162	9.882	9.882	-3	1	4.329
26	16.401	51.254	51.254	13	10	4.059
27	15.264	47.701	47.701	8	-13	3.814
28	8.944	27.951	27.951	-8	-4	3.593
29	9.434	29.481	29.481	8	5	3.391
30	16.125	50.389	50.389	-8	14	3.207
31	15.811	49.411	49.411	-13	-9	3.121

M	2M	D(M)	D(M)-2R	I2(M)	I2(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	2	57.367	57.367	16	9	56.785
2	4	55.639	55.639	11	-14	96.758

LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A 94.411

ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION

A1* = 88.299 (DESENSIBILISATION M = 3)

```
N1 =    23      N2 =    23      N3 =     2
A1 =  100.000     A2 =  100.000     A3 =    8.696
PMIN = -132      K =   5      A1/N1 =   4.348      2*R =  0.00000
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16     MLIM =   2

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =     2343

(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   67.636

   I1=   I2=   I3=
    46    50     1
    92   188     1

NMAX =   2

N1 =  23     N2 =  23     N3 =   2
A1 = 100.000     A2 = 100.000     A3 =   8.696
I1 =   92     I2 =  188     I3 =    1

                              I3 = -1

     -8  -7  -6  -5  -4  -3  -2  -1   0   1   2   3   4   5   6   7   8
 8 I 767 859 9511043  77 169 261 353 445 537 629 721 813 905 997  31 123
 7 I 579 671 763 855 9471039  73 165 257 349 441 533 625 717 809 901 993
 6 I 391 483 575 667 759 851 9431035  69 161 253 345 437 529 621 713 805
 5 I 203 295 387 479 571 663 755 847 9391031  65 157 249 341 433 525 617
 4 I  15 107 199 291 383 475 567 659 751 843 9351027  61 153 245 337 429
 3 I 885 977  11 103 195 287 379 471 563 655 747 839 9311023  57 149 241
 2 I 697 789 881 973   7  99 191 283 375 467 559 651 743 835 9271019  53
 1 I 509 601 693 785 877 969   3  95 187 279 371 463 555 647 739 831 923
 0 I 321 413 505 597 689 781 873 9651057  91 183 275 367 459 551 643 735
-1 I 133 225 317 409 501 593 685 777 869 9611053  87 179 271 363 455 547
-2 I1003  37 129 221 313 405 497 589 681 773 865 9571049  83 175 267 359
-3 I 815 907 999  33 125 217 309 401 493 585 677 769 861 9531045  79 171
-4 I 627 719 811 903 995  29 121 213 305 397 489 581 673 765 857 9491041
-5 I 439 531 623 715 807 899 991  25 117 209 301 393 485 577 669 761 853
-6 I 251 343 435 527 619 711 803 895 987  21 113 205 297 389 481 573 665
-7 I  63 155 247 339 431 523 615 707 799 891 983  17 109 201 293 385 477
-8 I 9331025  59 151 243 335 427 519 611 703 795 887 979  13 105 197 289
```

I3 = 0

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	768	860	952	1044	78	170	262	354	446	538	630	722	814	906	998	32	124
7	580	672	764	856	948	1040	74	166	258	350	442	534	626	718	810	902	994
6	392	484	576	668	760	852	944	1036	70	162	254	346	438	530	622	714	806
5	204	296	388	480	572	664	756	848	940	1032	66	158	250	342	434	526	618
4	16	108	200	292	384	476	568	660	752	844	936	1028	62	154	246	338	430
3	886	978	12	104	196	288	380	472	564	656	748	840	932	1024	58	150	242
2	698	790	882	974	8	100	192	284	376	468	560	652	744	836	928	1020	54
1	510	602	694	786	878	970	4	96	188	280	372	464	556	648	740	832	924
0	322	414	506	598	690	782	874	966	0	92	184	276	368	460	552	644	736
-1	134	226	318	410	502	594	686	778	870	962	1054	88	180	272	364	456	548
-2	1004	38	130	222	314	406	498	590	682	774	866	958	1050	84	176	268	360
-3	816	908	1000	34	126	218	310	402	494	586	678	770	862	954	1046	80	172
-4	628	720	812	904	996	30	122	214	306	398	490	582	674	766	858	950	1042
-5	440	532	624	716	808	900	992	26	118	210	302	394	486	578	670	762	854
-6	252	344	436	528	620	712	804	896	988	22	114	206	298	390	482	574	666
-7	64	156	248	340	432	524	616	708	800	892	984	18	110	202	294	386	478
-8	934	1026	60	152	244	336	428	520	612	704	796	888	980	14	106	198	290

I3 = 1

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	769	861	953	1045	79	171	263	355	447	539	631	723	815	907	999	33	125
7	581	673	765	857	949	1041	75	167	259	351	443	535	627	719	811	903	995
6	393	485	577	669	761	853	945	1037	71	163	255	347	439	531	623	715	807
5	205	297	389	481	573	665	757	849	941	1033	67	159	251	343	435	527	619
4	17	109	201	293	385	477	569	661	753	845	937	1029	63	155	247	339	431
3	887	979	13	105	197	289	381	473	565	657	749	841	933	1025	59	151	243
2	699	791	883	975	9	101	193	285	377	469	561	653	745	837	929	1021	55
1	511	603	695	787	879	971	5	97	189	281	373	465	557	649	741	833	925
0	323	415	507	599	691	783	875	967	1	93	185	277	369	461	553	645	737
-1	135	227	319	411	503	595	687	779	871	963	1055	89	181	273	365	457	549
-2	1005	39	131	223	315	407	499	591	683	775	867	959	1051	85	177	269	361
-3	817	909	1001	35	127	219	311	403	495	587	679	771	863	955	1047	81	173
-4	629	721	813	905	997	31	123	215	307	399	491	583	675	767	859	951	1043
-5	441	533	625	717	809	901	993	27	119	211	303	395	487	579	671	763	855
-6	253	345	437	529	621	713	805	897	989	23	115	207	299	391	483	575	667
-7	65	157	249	341	433	525	617	709	801	893	985	19	111	203	295	387	479
-8	935	1027	61	153	245	337	429	521	613	705	797	889	981	15	107	199	291

```
N1 =  23   N2 =  23   N3 =   2     I1 =   92   I2 =  188   I3 =    1
A1 =  100.000      A1/N1 =    4.348      2*R =    0.000
PMIN = -132      K =   5      NBAR =    1
DA =  5.4435      DR = 22.3529      MR = 16

  M      E(M)       D(M)     D(M)-2R   I1(M)   I2(M)   I3(M)    DMDT
  1    15.556     67.636     67.636     11     -11      -1     4.371
  2    15.556     67.636     67.636     11     -11       0     3.514

  M      D(M)     D(M)-2R   I1(M)   I2(M)   I3(M)   ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
  1    67.636     67.636     11     -11      -1                 67.636
  2    67.636     67.636     11     -11       0                 70.860
  4     9.722      9.722     -2       1       0                 48.996
  3     9.722      9.722     -2       1      -1                 53.047
  5     9.722      9.722     -2       1       1                 83.667
LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A  85.686
ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION
A1* =  45.622   ( INTERMODULATION  M =  4 )
```

```
N1 =    23      N2 =    23      N3 =      2
A1 =  100.000      A2 =  100.000      A3 =    8.696
PMIN = -140      K =   6      A1/N1 =   4.348      2*R =  0.00000
DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =  4      MLIM =  15

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =      1955

(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =    67.636
   I1=   I2=   I3=
    92   188     1

NMAX =   1
```

```
N1 =  23   N2 =  23   N3 =   2     I1 =   92   I2 =  188   I3 =    1
A1 =  100.000      A1/N1 =    4.348      2*R =    0.000
PMIN = -140      K =   6      NBAR =    1
DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =  4

  M      E(M)       D(M)     D(M)-2R   I1(M)   I2(M)   I3(M)    DMDT
  1    15.556     67.636     67.636     11     -11      -1    10.980
  2    15.556     67.636     67.636     11     -11       0     8.826
  3     2.236      9.722      9.722     -2       1      -1     7.768
  4     2.236      9.722      9.722     -2       1       0     7.095
  5     2.236      9.722      9.722     -2       1       1     6.613
  6    13.454     58.494     58.494      9     -10       0     6.244
  7     4.472     19.444     19.444     -4       2      -1     5.948
  8     4.472     19.444     19.444     -4       2       0     5.703
  9     4.472     19.444     19.444     -4       2       1     5.495
 10    11.402     49.573     49.573      7      -9       0     5.316
 11     6.708     29.166     29.166     -6       3      -1     5.159
 12     6.708     29.166     29.166     -6       3       0     5.019
 13     6.708     29.166     29.166     -6       3       1     4.894
 14     9.434     41.017     41.017      5      -8       0     4.473
 15     8.944     38.888     38.888     -8       4      -1     3.993

  M      D(M)     D(M)-2R   I1(M)   I2(M)   I3(M)   ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
  1    67.636     67.636     11     -11      -1                 67.636
  2    67.636     67.636     11     -11       0                 70.860
  4     9.722      9.722     -2       1       0                 48.996
  3     9.722      9.722     -2       1      -1                 53.047
LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A  99.838
ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION
A1* =  79.898   ( DESENSIBILISATION  M =  3 )
```

```
N1 =    23      N2 =    23      N3 =     2
A1 =  100.000     A2 =  100.000     A3 =    8.696
PMIN = -148      K =   9      A1/N1 =   4.348      2*R =  0.00000
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =  2      MLIM =  25

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =      717

(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   64.195

   I1=   I2=   I3=
   184   308     1

NMAX =   1
```

```
N1 =  23   N2 =  23   N3 =   2      I1 =  184   I2 =  308   I3 =    1
A1 =  100.000      A1/N1 =    4.348      2*R =    0.000
PMIN = -148      K =   9      NBAR =    1
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =  2
```

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	14.765	64.195	64.195	7	13	-1	27.580
2	14.765	64.195	64.195	7	13	0	22.170
3	5.831	25.352	25.352	-5	3	-1	19.512
4	5.831	25.352	25.352	-5	3	0	17.821
5	5.831	25.352	25.352	-5	3	1	16.612
6	9.220	40.085	40.085	6	-7	0	15.684
7	9.220	40.085	40.085	6	-7	1	14.941
8	11.662	50.704	50.704	-10	6	0	14.326
9	4.123	17.927	17.927	1	-4	-1	13.804
10	4.123	17.927	17.927	1	-4	0	13.353
11	4.123	17.927	17.927	1	-4	1	12.958
12	12.042	52.355	52.355	8	9	0	12.608
13	4.123	17.927	17.927	-4	-1	-1	12.294
14	4.123	17.927	17.927	-4	-1	0	11.237
15	4.123	17.927	17.927	-4	-1	1	10.031
16	12.369	53.780	53.780	3	12	0	9.021
17	9.220	40.085	40.085	-9	2	-1	8.164
18	9.220	40.085	40.085	-9	2	0	7.432
19	8.246	35.853	35.853	2	-8	-1	6.799
20	8.246	35.853	35.853	2	-8	0	6.249
21	8.246	35.853	35.853	2	-8	1	5.767
22	10.296	44.764	44.764	9	5	0	5.342
23	5.831	25.352	25.352	-3	-5	-1	4.966
24	5.831	25.352	25.352	-3	-5	0	4.630
25	5.831	25.352	25.352	-3	-5	1	4.329

M	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	64.195	64.195	7	13	-1	64.195
2	64.195	64.195	7	13	0	94.196

```
LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A  95.002
ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION
A1* =  77.002   ( DESENSIBILISATION  M =   9 )
```

```
N1 =    19      N2 =    19      N3 =     3
A1 =  100.000     A2 =  100.000     A3 =   15.789
PMIN = -132     K =    4      A1/N1 =    5.263      2*R =   0.00000
DA =   5.4435     DR =  22.3529     MR =  16      MLIM =    1

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =      1296

(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =    66.989

    I1=    I2=    I3=
    57     63      1
   114    234      1

NMAX =    2
```

```
N1 =  19   N2 =  19   N3 =   3      I1 =   57    I2 =   63    I3 =    1
A1 =  100.000      A1/N1 =     5.263      2*R =     0.000
PMIN = -132      K =    4      NBAR =     2
DA =   5.4435      DR =  22.3529      MR =  16
```

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	12.728	66.989	66.989	-9	-9	-2	4.371

M	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	66.989	66.989	-9	-9	-2	66.989
2	66.989	66.989	-9	-9	-1	64.410
4	7.443	7.443	-1	1	-2	29.773
3	66.989	66.989	-9	-9	0	96.615

```
LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A  84.941
ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION
A1* =  75.078   ( INTERMODULATION  N =  4 )
```

```
N1 =  19   N2 =  19   N3 =   3      I1 =  114    I2 =  234    I3 =    1
A1 =  100.000      A1/N1 =     5.263      2*R =     0.000
PMIN = -132      K =    4      NBAR =     2
DA =   5.4435      DR =  22.3529      MR =  16
```

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	12.728	66.989	66.989	9	-9	-2	4.371

M	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	66.989	66.989	9	-9	-2	66.989
2	66.989	66.989	9	-9	-1	75.037
4	11.769	11.769	-2	1	-2	47.075
3	66.989	66.989	9	-9	0	112.556

```
LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A  84.941
ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION
A1* =  47.483   ( INTERMODULATION  N =  4 )
```

```
N1 =    19     N2 =    19     N3 =     3
A1 =  100.000     A2 =  100.000     A3 =   15.789
PMIN = -140     K =   5     A1/N1 =   5.263     2*R =  0.00000
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4     MLIM =  11

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =     1091

(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   66.989

   I1=   I2=   I3=
   114   234     1

NMAX =   1
```

```
N1 =  19   N2 =  19   N3 =   3     I1 =  114   I2 =  234   I3 =    1
A1 =  100.000     A1/N1 =    5.263     2*R =    0.000
PMIN = -140     K =   5     NBAR =    2
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4
```

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	12.728	66.989	66.989	9	-9	-2	10.980
2	12.728	66.989	66.989	9	-9	-1	8.826
3	12.728	66.989	66.989	9	-9	0	7.768
4	2.236	11.769	11.769	-2	1	-2	7.095
5	2.236	11.769	11.769	-2	1	-1	6.613
6	2.236	11.769	11.769	-2	1	0	6.244
7	2.236	11.769	11.769	-2	1	1	5.948
8	2.236	11.769	11.769	-2	1	2	5.703
9	10.630	55.948	55.948	7	-8	0	5.495
10	4.472	23.538	23.538	-4	2	-2	5.316
11	4.472	23.538	23.538	-4	2	-1	5.159

M	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	66.989	66.989	9	-9	-2	66.989
2	66.989	66.989	9	-9	-1	75.037
4	11.769	11.769	-2	1	-2	47.075
3	66.989	66.989	9	-9	0	112.556

```
LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A  96.221
ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION
A1* =  64.547   ( INTERMODULATION  M =  4 )
```

N1 = 19 N2 = 19 N3 = 3

A1 = 100.000 A2 = 100.000 A3 = 15.789

PMIN = -148 K = 7 A1/N1 = 5.263 2*R = 0.00000

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2 MLIM = 23

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3) (CAS D)

NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES = 496

(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) = 63.377

I1=	I2=	I3=
114	462	1
171	192	1
228	150	1
399	93	1
513	36	1

NMAX = 5

N1 = 19 N2 = 19 N3 = 3 I1 = 114 I2 = 462 I3 = 1

A1 = 100.000 A1/N1 = 5.263 2*R = 0.000

PMIN = -148 K = 7 NBAR = 2

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	12.042	63.377	63.377	8	-9	-2	27.580
2	12.042	63.377	63.377	8	-9	-1	22.170
3	12.042	63.377	63.377	8	-9	0	19.512
4	4.123	21.701	21.701	-4	1	-2	17.821
5	4.123	21.701	21.701	-4	1	-1	16.612
6	4.123	21.701	21.701	-4	1	0	15.684
7	4.123	21.701	21.701	-4	1	1	14.941
8	4.123	21.701	21.701	-4	1	2	14.326
9	8.944	47.075	47.075	4	-8	0	13.804
10	8.246	43.401	43.401	-8	2	-2	13.353
11	8.246	43.401	43.401	-8	2	-1	12.958
12	8.246	43.401	43.401	-8	2	0	12.608
13	7.000	36.842	36.842	0	-7	-2	12.294
14	7.000	36.842	36.842	0	-7	-1	11.237
15	7.000	36.842	36.842	0	-7	0	10.031
16	7.000	36.842	36.842	0	-7	1	9.021
17	7.000	36.842	36.842	0	-7	2	8.164
18	7.616	40.083	40.083	7	3	0	7.432
19	7.211	37.953	37.953	-4	-6	-2	6.799
20	7.211	37.953	37.953	-4	-6	-1	6.249
21	7.211	37.953	37.953	-4	-6	0	5.767
22	5.000	26.316	26.316	3	4	-2	5.342
23	5.000	26.316	26.316	3	4	-1	4.966

M	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	63.377	63.377	8	-9	-2	63.377
2	63.377	63.377	8	-9	-1	88.676

LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A 98.099

ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION

A1* = 82.123 (DESENSIBILISATION M = 4)

```
N1 =    16      N2 =    16      N3 =     4
A1 =  100.000     A2 =  100.000     A3 =   25.000
PMIN = -132      K =    3      A1/N1 =   6.250      2*R =  0.00000
DA =  5.4435      DR = 22.3529      MR = 16      MLIM =   1

GENERATION DES TRIPLETS (I1, I2, I3)  (CAS D)

NOMBRE DE TRIPLETS (I1, I2, I3) ADMISSIBLES =      216

(I1, I2, I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   66.438

   I1=   I2=   I3=
   448   220     1

NMAX =   1
```

```
N1 =    16      N2 =    16      N3 =     4
A1 =  100.000     A2 =  100.000     A3 =   25.000
PMIN = -140      K =    4      A1/N1 =   6.250      2*R =  0.00000
DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =  4      MLIM =   6

GENERATION DES TRIPLETS (I1, I2, I3)  (CAS D)

NOMBRE DE TRIPLETS (I1, I2, I3) ADMISSIBLES =      192

(I1, I2, I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   66.438

   I1=   I2=   I3=
   448   220     1

NMAX =   1
```

```
N1 =    16      N2 =    16      N3 =     4
A1 =  100.000     A2 =  100.000     A3 =   25.000
PMIN = -148      K =    6      A1/N1 =   6.250      2*R =  0.00000
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =  2      MLIM =  20

GENERATION DES TRIPLETS (I1, I2, I3)  (CAS D)

NOMBRE DE TRIPLETS (I1, I2, I3) ADMISSIBLES =       98

(I1, I2, I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   64.348

   I1=   I2=   I3=
   192   220     1

NMAX =   1
```

N1 = 16 N2 = 16 N3 = 4 I1 = 448 I2 = 220 I3 = 1

A1 = 100.000 A1/N1 = 6.250 2*R = 0.000

PMIN = -132 K = 3 NBAR = 3

DA = 5.4435 DR = 22.3529 MR = 16

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	10.630	66.438	66.438	8	7	-3	4.371

M	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	66.438	66.438	8	7	-3	66.438
2	66.438	66.438	8	7	-2	132.877
3	66.438	66.438	8	7	-1	118.537

LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A 89.412

ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION

A1* = 33.645 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 16 N2 = 16 N3 = 4 I1 = 448 I2 = 220 I3 = 1

A1 = 100.000 A1/N1 = 6.250 2*R = 0.000

PMIN = -140 K = 4 NBAR = 3

DA = 13.6735 DR = 30.3856 MR = 4

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	10.630	66.438	66.438	8	7	-3	10.980
2	10.630	66.438	66.438	8	7	-2	8.826
3	10.630	66.438	66.438	8	7	-1	7.768
4	10.630	66.438	66.438	8	7	0	7.095
5	2.236	13.975	13.975	1	-2	-3	6.613
6	2.236	13.975	13.975	1	-2	-2	6.244

M	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	66.438	66.438	8	7	-3	66.438
2	66.438	66.438	8	7	-2	132.877
4	66.438	66.438	8	7	0	158.050
3	66.438	66.438	8	7	-1	118.537

LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A 97.234

ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION

A1* = 47.320 (DESENSIBILISATION M = 5)

N1 = 16 N2 = 16 N3 = 4 I1 = 192 I2 = 220 I3 = 1

A1 = 100.000 A1/N1 = 6.250 2*R = 0.000

PMIN = -148 K = 6 NBAR = 3

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	10.296	64.348	64.348	5	-9	-3	27.580
2	10.296	64.348	64.348	5	-9	-2	22.170
3	10.296	64.348	64.348	5	-9	-1	19.512
4	10.296	64.348	64.348	5	-9	0	17.821
5	3.606	22.535	22.535	-3	-2	-3	16.612
6	3.606	22.535	22.535	-3	-2	-2	15.684
7	3.606	22.535	22.535	-3	-2	-1	14.941
8	3.606	22.535	22.535	-3	-2	0	14.326
9	3.606	22.535	22.535	-3	-2	1	13.804
10	3.606	22.535	22.535	-3	-2	2	13.353
11	3.606	22.535	22.535	-3	-2	3	12.958
12	7.071	44.194	44.194	5	5	0	12.608
13	7.071	44.194	44.194	5	5	1	12.294
14	7.071	44.194	44.194	5	5	2	11.237
15	7.071	44.194	44.194	5	5	3	10.031
16	7.211	45.069	45.069	-6	-4	0	9.021
17	3.606	22.535	22.535	2	3	-3	8.164
18	3.606	22.535	22.535	2	3	-2	7.432
19	3.606	22.535	22.535	2	3	-1	6.799
20	3.606	22.535	22.535	2	3	0	6.249

M	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	64.348	64.348	5	-9	-3	64.348
2	64.348	64.348	5	-9	-2	128.695

LA VALEUR DE K AUGMENTE POUR LES VALEURS DE A1 INFERIEURES A 94.411

ON DOIT VERIFIER D'AUTRES CONDITIONS DE DESENSIBILISATION

A1* = 73.716 (DESENSIBILISATION M = 5)

ANNEXE 6

COMPRESSION DE LA VILLE POUR LES CAS
$(N_1=N_2, N_3) = (32,1),(23,2),(19,3)$ et $(16,4)$
CORRESPONDANT AUX DIFFERENTS P_{MIN}

```
N1 =  32     N2 =  32     A1 =  39.230     A2 =  39.230     R*A1/N1 =  0.000
PMIN = -132      K =  18      A1/N1 =   1.226
DA =  5.4435      DR = 22.3529      MR = 16      MLIM =  32

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =    96      INDEX =      1
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
    57  22.358
I1 =   288      INDEX =      2
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
    57  22.358
NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =         2


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   22.358

   I1=   I2=
    96    57
   288    57

NMAX =       2
```

```
N1 =  32     N2 =  32     A1 =  53.320     A2 =  53.320     R*A1/N1 =  0.000
PMIN = -140      K =  18      A1/N1 =   1.666
DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =  4      MLIM =  47

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =    96      INDEX =      1
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
    57  30.388
I1 =   288      INDEX =      2
   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
    57  30.388
NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =         2


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   30.388

   I1=   I2=
    96    57
   288    57

NMAX =       2
```

```
N1 =  32     N2 =  32     A1 =  80.000     A2 =  80.000     R*A1/N1 =  0.000
PMIN = -148      K =  16      A1/N1 =  2.500
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =  2      MLIM =  53

GENERATION DES COUPLES (I1, I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =   160      INDEX =      1

   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
   419  41.583

I1 =   224      INDEX =      2

   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
   485  42.287

NOMBRE DE COUPLES (I1, I2) ADMISSIBLES =         2


(I1, I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   42.287

   I1=   I2=
   224   485

NMAX =       1

         N1 =    32      N2 =    32      A1 =   39.221      A2 =   39.221
         I1 =    96      I2 =    57      R*A1/N1 =     0.000

      -8  -7  -6  -5  -4  -3  -2  -1   0   1   2   3   4   5   6   7   8
  8 I 712 808 9041000  72 168 264 360 456 552 648 744 840 936   8 104 200
  7 I 655 751 847 943  15 111 207 303 399 495 591 687 783 879 975  47 143
  6 I 598 694 790 886 982  54 150 246 342 438 534 630 726 822 9181014  86
  5 I 541 637 733 829 9251021  93 189 285 381 477 573 669 765 861 957  29
  4 I 484 580 676 772 868 964  36 132 228 324 420 516 612 708 804 900 996
  3 I 427 523 619 715 811 9071003  75 171 267 363 459 555 651 747 843 939
  2 I 370 466 562 658 754 850 946  18 114 210 306 402 498 594 690 786 882
  1 I 313 409 505 601 697 793 889 985  57 153 249 345 441 537 633 729 825
  0 I 256 352 448 544 640 736 832 928   0  96 192 288 384 480 576 672 768
 -1 I 199 295 391 487 583 679 775 871 967  39 135 231 327 423 519 615 711
 -2 I 142 238 334 430 526 622 718 814 9101006  78 174 270 366 462 558 654
 -3 I  85 181 277 373 469 565 661 757 853 949  21 117 213 309 405 501 597
 -4 I  28 124 220 316 412 508 604 700 796 892 988  60 156 252 348 444 540
 -5 I 995  67 163 259 355 451 547 643 739 835 931   3  99 195 291 387 483
 -6 I 938  10 106 202 298 394 490 586 682 778 874 970  42 138 234 330 426
 -7 I 881 977  49 145 241 337 433 529 625 721 817 9131009  81 177 273 369
 -8 I 824 9201016  88 184 280 376 472 568 664 760 856 952  24 120 216 312
```

N1 = 32 N2 = 32 I1 = 96 I2 = 57

A1 = 39.221 A1/N1 = 1.226 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -132 K = 18

DA = 5.4435 DR = 22.3529 MR = 16

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	18.358	22.500	16	9	4.371
2	18.000	22.062	0	18	3.514
3	5.831	7.147	3	-5	3.092
4	13.601	16.671	-13	4	2.824
5	13.342	16.352	3	13	2.633
6	11.662	14.293	6	-10	2.486
7	10.050	12.318	-10	-1	2.368
8	10.000	12.257	6	8	2.270
9	17.493	21.440	9	-15	2.188
10	9.220	11.300	-7	-6	2.116
11	9.487	11.628	9	3	2.054
12	13.892	17.027	-7	12	1.998
13	11.705	14.346	-4	-11	1.948
14	12.166	14.911	12	-2	1.781
15	8.062	9.882	-4	7	1.590
16	16.031	19.649	-1	-16	1.434
17	16.553	20.288	15	-7	1.422
18	2.236	2.741	-1	2	1.411
19	18.601	22.799	15	11	1.399
20	18.439	22.600	-14	-12	1.386
21	3.606	4.419	2	-3	1.373
22	15.232	18.669	-14	6	1.360
23	15.133	18.548	2	15	1.347
24	9.434	11.563	5	-8	1.334
25	11.045	13.538	-11	1	1.321
26	11.180	13.703	5	10	1.308
27	15.264	18.709	-8	-13	1.295
28	8.944	10.963	-8	-4	1.281
29	9.434	11.563	8	5	1.268
30	16.125	19.763	-8	14	1.255
31	10.296	12.619	-5	-9	1.243
32	11.000	13.482	11	0	1.230

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	18.358	22.500	16	9	22.353
2	4	18.000	22.062	0	18	40.189
4	8	13.601	16.671	-13	4	60.185
8	16	10.000	12.257	6	8	114.757
16	32	16.031	19.649	-1	-16	277.288
3	6	5.831	7.147	3	-5	27.013
6	12	11.662	14.293	6	-10	90.913
12	24	13.892	17.027	-7	12	179.598
5	10	13.342	16.352	3	13	72.285
10	20	9.220	11.300	-7	-6	142.371
7	14	10.050	12.318	-10	-1	91.893
14	28	12.166	14.911	12	-2	188.408
9	18	17.493	21.440	9	-15	97.203
11	22	9.487	11.628	9	3	149.770
13	26	11.705	14.346	-4	-11	183.670
15	30	8.062	9.882	-4	7	186.750

A1* = 39.221 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 32 N2 = 32 I1 = 96 I2 = 57

A1 = 53.500 A1/N1 = 1.672 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -140 K = 18

DA = 13.6735 DR = 30.3856 MR = 4

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	18.358	30.692	16	9	10.980
2	18.000	30.094	0	18	8.826
3	5.831	9.749	3	-5	7.768
4	13.601	22.740	-13	4	7.095
5	13.342	22.306	3	13	6.613
6	11.662	19.497	6	-10	6.244
7	10.050	16.802	-10	-1	5.948
8	10.000	16.719	6	8	5.703
9	17.493	29.246	9	-15	5.495
10	9.220	15.414	-7	-6	5.316
11	9.487	15.861	9	3	5.159
12	13.892	23.226	-7	12	5.019
13	11.705	19.569	-4	-11	4.894
14	12.166	20.339	12	-2	4.473
15	8.062	13.479	-4	7	3.993
16	16.031	26.802	-1	-16	3.591
17	16.553	27.674	15	-7	3.250
18	2.236	3.738	-1	2	2.959
19	18.601	31.099	15	11	2.707
20	18.439	30.828	-14	-12	2.488
21	3.606	6.028	2	-3	2.296
22	15.232	25.465	-14	6	2.136
23	15.133	25.300	2	15	2.135
24	9.434	15.772	5	-8	2.115
25	11.045	18.466	-11	1	2.094
26	11.180	18.692	5	10	2.073
27	15.264	25.520	8	-13	2.052
28	8.944	14.954	-8	-4	2.031
29	9.434	15.772	8	5	2.010
30	16.125	26.958	-8	14	1.990
31	10.296	17.213	-5	-9	1.969
32	11.000	18.391	11	0	1.949
33	10.296	17.213	-5	9	1.929
34	14.142	23.644	-2	-14	1.909
35	14.866	24.854	14	-5	1.889
36	4.472	7.477	-2	4	1.870
37	19.026	31.810	1	-19	1.851
38	18.028	30.140	-15	-10	1.832
39	1.414	2.364	1	-1	1.813
40	17.000	28.422	-15	8	1.795
41	17.029	28.471	1	17	1.777
42	7.211	12.056	4	-6	1.759
43	12.369	20.680	-12	3	1.741
44	12.649	21.148	4	12	1.723
45	13.038	21.799	7	-11	1.706
46	9.220	15.414	-9	-2	1.689
47	9.899	16.551	7	7	1.673

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	18.358	30.692	16	9	30.491
2	4	18.000	30.094	0	18	54.821
4	8	13.601	22.740	-13	4	82.096
3	6	5.831	9.749	3	-5	36.847

A* = 53.315112 MMM = 1

N1 = 32 N2 = 32 I1 = 224 I2 = 485

A1 = 78.143 A1/N1 = 2.442 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -148 K = 16

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	18.385	44.895	13	13	27.580
2	14.318	34.964	13	-6	22.170
3	9.220	22.514	-6	7	19.512
4	13.416	32.762	-6	-12	17.821
5	7.071	17.267	7	1	16.612
6	18.439	45.028	-12	14	15.684
7	13.000	31.746	-12	-5	14.941
8	8.062	19.688	1	8	14.326
9	11.045	26.972	1	-11	13.804
10	14.142	34.535	14	2	13.353
11	15.811	38.611	-5	15	12.958
12	6.403	15.636	-5	-4	12.608
13	12.042	29.405	8	9	12.294
14	12.806	31.272	8	-10	11.237
15	11.402	27.843	-11	3	10.031
16	16.125	39.376	2	16	9.021
17	3.606	8.805	2	-3	8.164
18	18.028	44.023	15	10	7.432
19	17.493	42.717	15	-9	6.799
20	5.657	13.814	-4	4	6.249
21	15.524	37.910	-4	-15	5.767
22	9.220	22.514	9	-2	5.342
23	14.866	36.302	-10	11	4.966
24	12.806	31.272	-10	-8	4.630
25	5.831	14.239	3	5	4.329
26	14.318	34.964	3	-14	4.059
27	16.031	39.148	16	-1	3.814
28	12.369	30.205	-3	12	3.593
29	7.616	18.597	-3	-7	3.391
30	11.662	28.478	10	6	3.207
31	16.401	40.051	10	-13	3.121
32	9.000	21.978	-9	0	3.089
33	13.601	33.214	4	13	3.057
34	7.211	17.609	4	-6	3.026
35	16.553	40.422	-15	7	2.995
36	19.209	46.909	-15	-12	2.964
37	2.236	5.460	-2	1	2.933
38	17.804	43.478	11	14	2.903
39	12.083	29.506	11	-5	2.874
40	11.314	27.628	-8	8	2.844
41	13.601	33.214	-8	-11	2.816
42	5.385	13.150	5	2	2.787
43	17.720	43.272	5	-17	2.759
44	14.560	35.556	-14	-4	2.732
45	9.055	22.113	-1	9	2.704
46	10.050	24.541	-1	-10	2.677
47	12.369	30.205	12	3	2.651
48	17.464	42.647	-7	16	2.625
49	7.616	18.597	-7	-3	2.599
50	11.662	28.478	6	10	2.574
51	10.817	26.414	6	-9	2.549
52	13.601	33.214	-13	4	2.525
53	17.000	41.513	0	17	2.500
54	2.000	4.884	0	-2	2.477
55	17.029	41.585	13	11	2.453

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	18.385	44.895	13	13	41.305
2	4	14.318	34.964	13	-6	68.428

A1* = 78.143 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 32 N2 = 32 A1 = 78.143 A2 = 78.143

I1 = 224 I2 = 485 R*A1/N1 = 0.000

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	40	264	488	712	936	136	360	584	808	8	232	456	680	904	104	328	552
7	579	803	3	227	451	675	899	99	323	547	771	995	195	419	643	867	67
6	94	318	542	766	990	190	414	638	862	62	286	510	734	958	158	382	606
5	633	857	57	281	505	729	953	153	377	601	825	25	249	473	697	921	121
4	148	372	596	820	20	244	468	692	916	116	340	564	788	1012	212	436	660
3	687	911	111	335	559	783	1007	207	431	655	879	79	303	527	751	975	175
2	202	426	650	874	74	298	522	746	970	170	394	618	842	42	266	490	714
1	741	965	165	389	613	837	37	261	485	709	933	133	357	581	805	5	229
0	256	480	704	928	128	352	576	800	0	224	448	672	896	96	320	544	768
-1	795	1019	219	443	667	891	91	315	539	763	987	187	411	635	859	59	283
-2	310	534	758	982	182	406	630	854	54	278	502	726	950	150	374	598	822
-3	849	49	273	497	721	945	145	369	593	817	17	241	465	689	913	113	337
-4	364	588	812	12	236	460	684	908	108	332	556	780	1004	204	428	652	876
-5	903	103	327	551	775	999	199	423	647	871	71	295	519	743	967	167	391
-6	418	642	866	66	290	514	738	962	162	386	610	834	34	258	482	706	930
-7	957	157	381	605	829	29	253	477	701	925	125	349	573	797	1021	221	445
-8	472	696	920	120	344	568	792	1016	216	440	664	888	88	312	536	760	984

```
N1 =    23      N2 =    23      N3 =     2
A1 =   34.275     A2 =   34.275     A3 =    2.980
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -132      K =  14      A1/N1 =   1.490
DA =  5.4435      DR = 22.3529      MR = 16      MLIM =  15


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =    46      I2 =   142      INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  22.353
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   22.353

   I1=   I2=   I3=
    46   142     1

NMAX =   1


 N1 =  23   N2 =  23   N3 =   2     I1 =   46   I2 =  142   I3 =     1
 A1 =   34.280      A1/N1 =    1.490      R*A1/N1 =    0.000
 PMIN = -132      K =  14      NBAR =    1
 DA =  5.4435      DR = 22.3529      MR = 16

       M      E(M)       D(M)    I1(M)   I2(M)   I3(M)    DMDT

       1    15.000    22.357       9      12      -1     4.371
       2    15.000    22.357       9      12       0     3.514
       3     3.162     4.713      -3       1      -1     3.092
       4     3.162     4.713      -3       1       0     2.824
       5     3.162     4.713      -3       1       1     2.633
       6    12.806    19.087       8     -10       0     2.486
       7     6.325     9.426      -6       2      -1     2.368
       8     6.325     9.426      -6       2       0     2.270
       9     6.325     9.426      -6       2       1     2.188
      10    10.296    15.345       5      -9       0     2.116
      11     9.487    14.140      -9       3      -1     2.054
      12     9.487    14.140      -9       3       0     1.998
      13     8.246    12.290       2      -8      -1     1.948
      14     8.246    12.290       2      -8       0     1.781
      15     8.246    12.290       2      -8       1     1.590

 M     2M      E(M)       D(M)    I1(M)   I2(M)   I3(M)   (DM**2/3)(D2M**1/3)M

 1      2    15.000    22.357       9      12      -1            22.357
 2      4    15.000    22.357       9      12       0            26.612
 4      8     3.162     4.713      -3       1       0            23.753
 8     16     6.325     9.426      -6       2       0            92.586
 3      6     3.162     4.713      -3       1      -1            22.538
 6     12    12.806    19.087       8     -10       0           103.622
12     24     9.487    14.140      -9       3       0           159.024
 5     10     3.162     4.713      -3       1       1            34.927
10     20    10.296    15.345       5      -9       0           149.044
 7     14     6.325     9.426      -6       2      -1            72.086
14     28     8.246    12.290       2      -8       0           165.066
 9     18     6.325     9.426      -6       2       1            88.052
11     22     9.487    14.140      -9       3      -1           141.945
13     26     8.246    12.290       2      -8      -1           162.043

 A* =     34.274447      MMM =       1
```

```
N1 =    23      N2 =    23      N3 =     2
A1 =   47.012      A2 =   47.012      A3 =    4.088
RA1/N1 =    0.000

PMIN = -140      K =  14      A1/N1 =   2.044
DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =  4      MLIM =  27


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =    92      I2 =   372      INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  30.386
I1 =   184      I2 =   520      INDEX =     2
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  30.386
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =        2


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   30.386

   I1=   I2=   I3=
   92   372     1
  184   520     1

NMAX =   2


 N1 =  23   N2 =  23   N3 =   2      I1 =   92   I2 =  372   I3 =    1
 A1 =   47.020      A1/N1 =    2.044      R*A1/N1 =    0.000
 PMIN = -140      K =  14      NBAR =    1
 DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =  4

      M      E(M)       D(M)    I1(M)   I2(M)   I3(M)   DMDT
      1    14.866     30.391      10     -11      -1   10.980
      2    14.866     30.391      10     -11       0    8.826
      3     4.123      8.429      -4       1      -1    7.768
      4     4.123      8.429      -4       1       0    7.095
      5     4.123      8.429      -4       1       1    6.613
      6    11.662     23.841       6     -10       0    6.244
      7     8.246     16.858      -8       2      -1    5.948
      8     8.246     16.858      -8       2       0    5.703
      9     8.246     16.858      -8       2       1    5.495
     10     9.220     18.848       2      -9       0    5.316
     11     9.220     18.848       2      -9       1    5.159
     12    11.402     23.309      11       3       0    5.019
     13     8.246     16.858      -2      -8      -1    4.894
     14     8.246     16.858      -2      -8       0    4.473
     15     8.062     16.482       7       4      -1    3.993
     16     8.062     16.482       7       4       0    3.591
     17     8.062     16.482       7       4       1    3.250
     18     9.220     18.848      -6      -7       0    2.959
     19     5.831     11.920       3       5      -1    2.707
     20     5.831     11.920       3       5       0    2.488
     21     5.831     11.920       3       5       1    2.296
     22    11.662     23.841     -10      -6       0    2.156
     23     6.083     12.435      -1       6      -1    2.135
     24     6.083     12.435      -1       6       0    2.115
     25     6.083     12.435      -1       6       1    2.094
     26    10.296     21.048       9      -5       0    2.073
     27     8.602     17.586      -5       7      -1    2.052

 M    2M      E(M)       D(M)    I1(M)   I2(M)   I3(M)   (DM**2/3)(D2M**1/3)M
 1     2    14.866     30.391      10     -11      -1            30.391
 2     4    14.866     30.391      10     -11       0            39.639
 4     8     4.123      8.429      -4       1       0            42.480
 3     6     4.123      8.429      -4       1      -1            35.761

 A* =     47.011003      MMM =      1
```

```
N1 =    23     N2 =    23     N3 =     2
A1 =   68.000     A2 =   68.000     A3 =    5.913
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -148     K =  13     A1/N1 =   2.957
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2     MLIM =  36


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =   184     I2 =    78     INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  41.812

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8E)

I2 =   184     I1 =    78     INDEX =     2
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  41.812

NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         2


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   41.812

   I1=   I2=   I3=
  184    78     1
   78   184     1

NMAX =   2


N1 =  23   N2 =  23   N3 =   2     I1 =  184   I2 =   78   I3 =    1
A1 =   67.180     A1/N1 =    2.921     R*A1/N1 =    0.000
PMIN = -148     K =  14     NBAR =    1
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2

     M      E(M)      D(M)   I1(M)  I2(M)  I3(M)   DMDT
     1    14.142    41.307     10    -10     -1   27.580
     2    14.142    41.307     10    -10      0   22.170
     3     7.616    22.245     -7      3     -1   19.512
     4     7.616    22.245     -7      3      0   17.821
     5     7.616    22.245      3     -7     -1   16.612
     6     7.616    22.245      3     -7      0   15.684
     7     7.616    22.245      3     -7      1   14.941
     8    10.817    31.594      9      6      0   14.326
     9     5.657    16.523     -4     -4     -1   13.804
    10     5.657    16.523     -4     -4      0   13.353
    11     5.657    16.523     -4     -4      1   12.958
    12     9.220    26.929      2      9      0   12.608
    13     9.220    26.929      2      9      1   12.294
    14    11.045    32.262    -11     -1      0   11.237
    15    11.045    32.262     -1    -11     -1   10.031
    16    11.045    32.262     -1    -11      0    9.021
    17     5.385    15.729      5      2     -1    8.164
    18     5.385    15.729      5      2      0    7.432
    19     5.385    15.729      5      2      1    6.799
    20    11.314    33.046     -8     -8      0    6.249
    21     5.385    15.729     -2      5     -1    5.767
    22     5.385    15.729     -2      5      0    5.342
    23     5.385    15.729     -2      5      1    4.966
    24     9.434    27.555      8     -5      0    4.630
    25     9.434    27.555      8     -5      1    4.329
    26    12.042    35.172     -9      8      0    4.059
    27     2.236     6.531      1     -2     -1    3.814
    28     2.236     6.531      1     -2      0    3.593
    29     2.236     6.531      1     -2      1    3.391
    30    13.038    38.083      7     11      0    3.207
    31     6.083    17.767     -6      1     -1    3.121
    32     6.083    17.767     -6      1      0    3.089
    33     6.083    17.767     -6      1      1    3.057
    34     9.849    28.767      4     -9      0    3.026
    35     9.849    28.767      4     -9      1    2.995
    36    10.770    31.459     10      4      0    2.964
    37     6.708    19.594     -3     -6     -1    2.933

M    2M      E(M)      D(M)   I1(M)  I2(M)  I3(M)  (DM**2/3)(D2M**1/3)M
1     2    14.142    41.307     10    -10     -1           41.307
2     4    14.142    41.307     10    -10      0           67.214

A* =    67.176205     MMM =     1
```

```
N1 =    19      N2 =    19      N3 =     3
A1 =   34.800     A2 =   34.800     A3 =    5.495
PMIN = -132      K =  12      A1/N1 =   1.832      2*R =  0.00000
DA =  5.4435      DR = 22.3529      MR = 16      MLIM =  14

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

I1 =    57      I2 =   177      INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  22.357
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1

(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =   22.357
   I1=   I2=   I3=
    57   177     1

NMAX =   1
```

```
N1 =  19   N2 =  19   N3 =   3     I1 =   57   I2 =  177   I3 =    1
A1 =   34.793     A1/N1 =    1.831     2*R =    0.000
PMIN = -132      K =  12      NBAR =    2
DA =  5.4435      DR = 22.3529      MR = 16
```

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	12.207	22.353	22.353	7	10	-2	4.371
2	12.207	22.353	22.353	7	10	-1	3.514
3	12.207	22.353	22.353	7	10	0	3.092
4	3.162	5.791	5.791	-3	1	-2	2.824
5	3.162	5.791	5.791	-3	1	-1	2.633
6	3.162	5.791	5.791	-3	1	0	2.486
7	3.162	5.791	5.791	-3	1	1	2.368
8	3.162	5.791	5.791	-3	1	2	2.270
9	10.000	18.312	18.312	6	-8	0	2.188
10	6.325	11.582	11.582	-6	2	-2	2.116
11	6.325	11.582	11.582	-6	2	-1	2.054
12	6.325	11.582	11.582	-6	2	0	1.998
13	6.325	11.582	11.582	-6	2	1	1.948
14	6.325	11.582	11.582	-6	2	2	1.781

M	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	22.353	22.353	7	10	-2	22.353
2	22.353	22.353	7	10	-1	28.499
4	5.791	5.791	-3	1	-2	23.163
8	5.791	5.791	-3	1	2	62.097
3	22.353	22.353	7	10	0	42.749
6	5.791	5.791	-3	1	0	43.776
12	11.582	11.582	-6	2	0	150.694
5	5.791	5.791	-3	1	-1	36.480
10	11.582	11.582	-6	2	-2	113.801
7	5.791	5.791	-3	1	1	51.072
9	18.312	18.312	6	-8	0	161.942
11	11.582	11.582	-6	2	-1	125.181

```
A1* =  34.793   ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

```
N1 =     19      N2 =     19      N3 =      3
A1 =    47.300      A2 =    47.300      A3 =     7.468
PMIN = -140      K =   12      A1/N1 =    2.489      2*R =   0.00000
DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =   4      MLIM =   20

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

I1 =     57      I2 =    177      INDEX =      1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  30.388
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1

(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) =    30.388
   I1=   I2=   I3=
    57   177     1

NMAX =    1

N1 =  19   N2 =  19   N3 =   3      I1 =   57   I2 =  177   I3 =    1
A1 =    47.296      A1/N1 =     2.489      2*R =     0.000
PMIN = -140      K =   12      NBAR =     2
DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =   4

  M      E(M)       D(M)     D(M)-2R   I1(M)   I2(M)   I3(M)    DMDT
  1     12.207     30.386     30.386      7      10      -2     10.980
  2     12.207     30.386     30.386      7      10      -1      8.826
  3     12.207     30.386     30.386      7      10       0      7.768
  4      3.162      7.872      7.872     -3       1      -2      7.095
  5      3.162      7.872      7.872     -3       1      -1      6.613
  6      3.162      7.872      7.872     -3       1       0      6.244
  7      3.162      7.872      7.872     -3       1       1      5.948
  8      3.162      7.872      7.872     -3       1       2      5.703
  9     10.000     24.893     24.893      6      -8       0      5.495
 10      6.325     15.744     15.744     -6       2      -2      5.316
 11      6.325     15.744     15.744     -6       2      -1      5.159
 12      6.325     15.744     15.744     -6       2       0      5.019
 13      6.325     15.744     15.744     -6       2       1      4.894
 14      6.325     15.744     15.744     -6       2       2      4.473
 15      7.616     18.958     18.958      3      -7       0      3.993
 16      7.616     18.958     18.958      3      -7       1      3.591
 17      7.616     18.958     18.958      3      -7       2      3.250
 18      9.487     23.615     23.615     -9       3       0      2.959
 19      6.000     14.936     14.936      0      -6      -2      2.707
 20      6.000     14.936     14.936      0      -6      -1      2.488

  M     D(M)    D(M)-2R   I1(M)   I2(M)   I3(M)   ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
  1   30.386    30.386      7       10      -2                    30.386
  2   30.386    30.386      7       10      -1                    38.741
  4    7.872     7.872     -3        1      -2                    31.487
  3   30.386    30.386      7       10       0                    58.111

A1* =  47.296    ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

N1 = 19 N2 = 19 N3 = 3

A1 = 67.050 A2 = 67.050 A3 = 10.587

PMIN = -148 K = 11 A1/N1 = 3.529 2*R = 0.00000

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2 MLIM = 29

GENERATION DES TRIPLETS (I1, I2, I3) (CAS D)

I1 = 513 I2 = 306 INDEX = 1

I3=	PROD=	I3=	PROD=	I3=	PROD=	I3=	PROD=
1	41.305						

NOMBRE DE TRIPLETS (I1, I2, I3) ADMISSIBLES = 1

(I1, I2, I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3)
MAX ((D(1)-2R)**2/3)((D(2)-2R)**1/3) = 41.305

I1=	I2=	I3=
513	306	1

NMAX = 1

N1 = 19 N2 = 19 N3 = 3 I1 = 513 I2 = 306 I3 = 1

A1 = 67.050 A1/N1 = 3.529 2*R = 0.000

PMIN = -148 K = 11 NBAR = 2

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	11.705	41.305	41.305	4	11	-2	27.580
2	11.705	41.305	41.305	4	11	-1	22.170
3	11.705	41.305	41.305	4	11	0	19.512
4	6.708	23.673	23.673	-6	3	-2	17.821
5	6.708	23.673	23.673	-6	3	-1	16.612
6	6.708	23.673	23.673	-6	3	0	15.684
7	5.831	20.577	20.577	3	-5	-2	14.941
8	5.831	20.577	20.577	3	-5	-1	14.326
9	5.831	20.577	20.577	3	-5	0	13.804
10	5.831	20.577	20.577	3	-5	1	13.353
11	5.831	20.577	20.577	3	-5	2	12.958
12	9.220	32.535	32.535	7	6	0	12.608
13	3.606	12.724	12.724	-3	-2	-2	12.294
14	3.606	12.724	12.724	-3	-2	-1	11.237
15	3.606	12.724	12.724	-3	-2	0	10.031
16	3.606	12.724	12.724	-3	-2	1	9.021
17	3.606	12.724	12.724	-3	-2	2	8.164
18	9.055	31.956	31.956	1	9	0	7.432
19	9.055	31.956	31.956	1	9	1	6.799
20	9.055	31.956	31.956	1	9	2	6.249
21	9.055	31.956	31.956	-9	1	-0	5.767
22	7.000	24.703	24.703	0	-7	-2	5.342
23	7.000	24.703	24.703	0	-7	-1	4.966
24	7.000	24.703	24.703	0	-7	0	4.630
25	5.657	19.963	19.963	4	4	-2	4.329
26	5.657	19.963	19.963	4	4	-1	4.059
27	5.657	19.963	19.963	4	4	0	3.814
28	5.657	19.963	19.963	4	4	1	3.593
29	5.657	19.963	19.963	4	4	2	3.391

M	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	I3(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	41.305	41.305	4	11	-2	41.305
2	41.305	41.305	4	11	-1	68.620

A1* = 67.050 (INTERMODULATION M = 1)

```
N1 =    16     N2 =    16     N3 =     4
A1 =   33.650     A2 =   33.650     A3 =    8.413
RA1/N1 =    0.000

PMIN = -132     K =  10     A1/N1 =   2.103
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16     MLIM =  10


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

I1 =   448     I2 =   220     INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  22.357
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   22.357
   I1=   I2=   I3=
  448   220     1

NMAX =   1


N1 =  16   N2 =  16   N3 =   4     I1 =  448   I2 =  220   I3 =    1
A1 =   33.645     A1/N1 =    2.103     2*R =    0.000
PMIN = -132     K =  10     NBAR =    3
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16

  M     E(M)      D(M)    D(M)-2R  I1(M)  I2(M)  I3(M)   DMDT
  1   10.630    22.353    22.353      8      7     -3    4.371
  2   10.630    22.353    22.353      8      7     -2    3.514
  3   10.630    22.353    22.353      8      7     -1    3.092
  4   10.630    22.353    22.353      8      7      0    2.824
  5    2.236     4.702     4.702      1     -2     -3    2.633
  6    2.236     4.702     4.702      1     -2     -2    2.486
  7    2.236     4.702     4.702      1     -2     -1    2.368
  8    2.236     4.702     4.702      1     -2      0    2.270
  9    2.236     4.702     4.702      1     -2      1    2.188
 10    2.236     4.702     4.702      1     -2      2    2.116
 11    2.236     4.702     4.702      1     -2      3    2.054

  M    D(M)   D(M)-2R  I1(M)  I2(M)  I3(M)  ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
  1  22.353   22.353      8      7     -3                  22.353
  2  22.353   22.353      8      7     -2                  44.706
  4  22.353   22.353      8      7      0                  53.176
  8   4.702    4.702      1     -2      0                  47.394
  3  22.353   22.353      8      7     -1                  39.882
  6   4.702    4.702      1     -2     -2                  44.206
  5   4.702    4.702      1     -2     -3                  23.510
 10   4.702    4.702      1     -2      2                  67.815
  7   4.702    4.702      1     -2     -1                  41.469
  9   4.702    4.702      1     -2      1                  53.318

A1* =  33.645   ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

```
N1 =    16     N2 =    16     N3 =     4
A1 =   47.230     A2 =   47.230     A3 =   11.808
RA1/N1 =    0.000

PMIN = -140     K =  10     A1/N1 =   2.952
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4     MLIM =  18


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

I1 =   192     I2 =   220     INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  30.391
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   30.391
   I1=   I2=   I3=
  192   220     1

NMAX =   1


N1 =  16   N2 =  16   N3 =   4     I1 =  192   I2 =  220   I3 =    1
A1 =   47.221     A1/N1 =    2.951     2*R =    0.000
PMIN = -140     K =  10     NBAR =    3
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4

  M      E(M)       D(M)     D(M)-2R  I1(M)  I2(M)  I3(M)    DMDT
  1    10.296     30.386     30.386      5     -9     -3    10.980
  2    10.296     30.386     30.386      5     -9     -2     8.826
  3    10.296     30.386     30.386      5     -9     -1     7.768
  4    10.296     30.386     30.386      5     -9      0     7.095
  5     3.606     10.641     10.641     -3     -2     -3     6.613
  6     3.606     10.641     10.641     -3     -2     -2     6.244
  7     3.606     10.641     10.641     -3     -2     -1     5.948
  8     3.606     10.641     10.641     -3     -2      0     5.703
  9     3.606     10.641     10.641     -3     -2      1     5.495
 10     3.606     10.641     10.641     -3     -2      2     5.316
 11     3.606     10.641     10.641     -3     -2      3     5.159
 12     7.071     20.869     20.869      5      5      0     5.019
 13     7.071     20.869     20.869      5      5      1     4.894
 14     7.071     20.869     20.869      5      5      2     4.473
 15     7.071     20.869     20.869      5      5      3     3.993
 16     7.211     21.282     21.282     -6     -4      0     3.591
 17     3.606     10.641     10.641      2      3     -3     3.250
 18     3.606     10.641     10.641      2      3     -2     2.959
 19     3.606     10.641     10.641      2      3     -1     2.707

  M     D(M)    D(M)-2R  I1(M)  I2(M)  I3(M)  ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
  1   30.386    30.386      5     -9     -3                  30.386
  2   30.386    30.386      5     -9     -2                  60.771
  4   30.386    30.386      5     -9      0                  85.671
  3   30.384    30.384      5     -9     -1                  64.253

A1* =  47.221   ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

```
N1 =    16     N2 =    16     N3 =     4
A1 =   67.110     A2 =   67.110     A3 =   16.778
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -148     K =   9     A1/N1 =   4.194
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2     MLIM =  25


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS D)

I1 =   192     I2 =   484     INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  41.310
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   41.310
   I1=   I2=   I3=
   192   484     1

NMAX =   1


N1 =  16   N2 =  16   N3 =   4     I1 =  192   I2 =  484   I3 =    1
A1 =   67.102     A1/N1 =    4.194     2*R =    0.000
PMIN = -148     K =   9     NBAR =    3
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2

  M      E(M)       D(M)     D(M)-2R  I1(M)  I2(M)  I3(M)    DMDT
  1     9.849     41.305     41.305     4      9     -3     27.580
  2     9.849     41.305     41.305     4      9     -2     22.170
  3     9.849     41.305     41.305     4      9     -1     19.512
  4     9.849     41.305     41.305     4      9      0     17.821
  5     5.385     22.585     22.585    -5      2     -3     16.612
  6     5.385     22.585     22.585    -5      2     -2     15.684
  7     5.385     22.585     22.585    -5      2     -1     14.941
  8     5.385     22.585     22.585    -5      2      0     14.326
  9     5.385     22.585     22.585    -5     -3     -3     13.804
 10     5.385     22.585     22.585    -5     -3     -2     13.353
 11     5.385     22.585     22.585    -5     -3     -1     12.958
 12     5.385     22.585     22.585    -5     -3      0     12.608
 13     5.385     22.585     22.585    -5     -3      1     12.294
 14     5.385     22.585     22.585    -5     -3      2     11.237
 15     5.385     22.585     22.585    -5     -3      3     10.031
 16     7.211     30.243     30.243    -6      4      0      9.021
 17     4.243     17.793     17.793    -3     -3     -3      8.164
 18     4.243     17.793     17.793    -3     -3     -2      7.432
 19     4.243     17.793     17.793    -3     -3     -1      6.799
 20     4.243     17.793     17.793    -3     -3      0      6.249
 21     4.243     17.793     17.793    -3     -3      1      5.767
 22     4.243     17.793     17.793    -3     -3      2      5.342
 23     4.243     17.793     17.793    -3     -3      3      4.966
 24     6.083     25.510     25.510     1      6      0      4.630
 25     6.083     25.510     25.510     1      6      1      4.329
 26     6.083     25.510     25.510     1      6      2      4.059

  M     D(M)    D(M)-2R  I1(M)  I2(M)  I3(M)  ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
  1   41.305    41.305     4      9     -3                    41.305
  2   41.305    41.305     4      9     -2                    82.610
A1* =  67.102   ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

ANNEXE 7

EXEMPLES DE STRATEGIES VECTORIELLES ET DE COMPRESSIONS

POUR $N_1 = N_2 = 4,5$ ET 9

```
N1 =   4    N2 =   4    A1 = 100.000    A2 = 100.000    R*A1/N1 =  0.000
PMIN = -132     K =   0     A1/N1 =  25.000
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16     MLIM =   0

GENERATION DES COUPLES (I1, I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     4     INDEX =     4

   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
     1  31.498         3  41.189         5  41.189         7  53.861
NOMBRE DE COUPLES (I1, I2) ADMISSIBLES =         4


(I1, I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   53.861

   I1=   I2=
    4     7

NMAX =       1
```

```
N1 =   4    N2 =   4    A1 = 100.000    A2 = 100.000    R*A1/N1 =  0.000
PMIN = -140     K =   1     A1/N1 =  25.000
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4     MLIM =   0

GENERATION DES COUPLES (I1, I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     4     INDEX =     4

   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
     1  31.498         3  41.189         5  41.189         7  53.861
NOMBRE DE COUPLES (I1, I2) ADMISSIBLES =         4


(I1, I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   53.861

   I1=   I2=
    4     7

NMAX =       1
```

```
N1 =   4    N2 =   4    A1 = 100.000    A2 = 100.000    R*A1/N1 =  0.000
PMIN = -148     K =   1     A1/N1 =  25.000
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2     MLIM =   1

GENERATION DES COUPLES (I1, I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     4     INDEX =     1

   I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=       I2=   PROD=
     7  53.861
NOMBRE DE COUPLES (I1, I2) ADMISSIBLES =         1


(I1, I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   53.861

   I1=   I2=
    4     7

NMAX =       1
```

N1 = 4 N2 = 4 A1 = 42.000 A2 = 42.000
I1 = 4 I2 = 7 R*A1/N1 = 0.000

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8
7	1	5	9	13	1	5	9	13	1	5	9	13	1	5	9	13	1
6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10
5	3	7	11	15	3	7	11	15	3	7	11	15	3	7	11	15	3
4	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12
3	5	9	13	1	5	9	13	1	5	9	13	1	5	9	13	1	5
2	14	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	14
1	7	11	15	3	7	11	15	3	7	11	15	3	7	11	15	3	7
0	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0
-1	9	13	1	5	9	13	1	5	9	13	1	5	9	13	1	5	9
-2	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	14	2
-3	11	15	3	7	11	15	3	7	11	15	3	7	11	15	3	7	11
-4	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4
-5	13	1	5	9	13	1	5	9	13	1	5	9	13	1	5	9	13
-6	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6
-7	15	3	7	11	15	3	7	11	15	3	7	11	15	3	7	11	15
-8	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8

N1 = 4 N2 = 4 I1 = 4 I2 = 7
A1 = 42.000 A1/N1 = 10.500 R*A1/N1 = 0.000
PMIN = -132 K = 2
DA = 5.4435 DR = 22.3529 MR = 16

IL N'Y A PAS DE CONDITION DE DESENSIBILISATION A VERIFIER : D1DT = 4.3710

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	2.236	23.479	2	-1	22.622
2	4	2.000	21.000	0	-2	33.335

A* = 41.501188 MMM = 1

```
N1 =     4      N2 =     4      I1 =     4      I2 =     7
A1 =   57.000     A1/N1 =   14.250     R*A1/N1 =    0.000
PMIN = -140     K =   2
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4

IL N'Y A PAS DE CONDITION DE DESENSIBILISATION A VERIFIER :  DIDT = 10.9796

M    2M      E(M)       D(M)    I1(M)  I2(M)  (DM**2/3)(D2M**1/3)M
1     2     2.236     31.864      2     -1            30.701
2     4     2.000     28.500      0     -2            45.241
A* =    56.414985     MMM =      1
```

```
N1 =     4      N2 =     4      I1 =     4      I2 =     7
A1 =   77.000     A1/N1 =   19.250     R*A1/N1 =    0.000
PMIN = -148     K =   2
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2

     M      E(M)       D(M)    I1(M)  I2(M)   DMDT
     1     2.236     43.044      2     -1    27.580
     2     2.000     38.500      0     -2    22.170
     3     1.414     27.224     -1      1    19.512
M    2M      E(M)       D(M)    I1(M)  I2(M)  (DM**2/3)(D2M**1/3)M
1     2     2.236     43.044      2     -1            41.473
2     4     2.000     38.500      0     -2            61.115
A* =    76.688331     MMM =      1
```

```
N1 =     4      N2 =     4      N3 =     2
A1 =   39.990     A2 =   39.990     A3 =   19.995
RA1/N1 =    0.000

PMIN = -132     K =   2     A1/N1 =   9.998
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16     MLIM =   0


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =     8      I2 =    14      INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  22.355
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   22.355
   I1=   I2=   I3=
     8    14     1

NMAX =   1
```

```
N1 =      4      N2 =      4      N3 =      2
A1 =    54.360      A2 =    54.360      A3 =    27.180
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -140      K =    2      A1/N1 =  13.590
DA = 13.6735      DR = 30.3856      MR =  4      MLIM =   0


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =      9      I2 =     14      INDEX =      1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  30.388
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =    30.388
   I1=    I2=    I3=
     3     13      1

NMAX =    1
```

```
N1 =      4      N2 =      4      N3 =      2
A1 =    73.900      A2 =    73.900      A3 =    36.950
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -148      K =    2      A1/N1 =  18.475
DA = 24.3460      DR = 41.3050      MR =  2      MLIM =   3


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =      8      I2 =     14      INDEX =      1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  41.311
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =    41.311
   I1=    I2=    I3=
     8     14      1

NMAX =    1
```

N1 = 4 N2 = 4 N3 = 2
A1 = 54.360 A2 = 54.360 A3 = 27.180
I1 = 8 I2 = 14 I3 = 1

I3 = -1

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15
7	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1
6	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19
5	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5
4	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23
3	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9
2	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27
1	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13
0	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31
-1	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17
-2	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3
-3	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21
-4	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7
-5	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25
-6	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11
-7	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29
-8	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15

I3 = 0

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	16	24	0	8	16	24	0	8	16	24	0	8	16	24	0	8	16
7	2	10	18	26	2	10	18	26	2	10	18	26	2	10	18	26	2
6	20	28	4	12	20	28	4	12	20	28	4	12	20	28	4	12	20
5	6	14	22	30	6	14	22	30	6	14	22	30	6	14	22	30	6
4	24	0	8	16	24	0	8	16	24	0	8	16	24	0	8	16	24
3	10	18	26	2	10	18	26	2	10	18	26	2	10	18	26	2	10
2	28	4	12	20	28	4	12	20	28	4	12	20	28	4	12	20	28
1	14	22	30	6	14	22	30	6	14	22	30	6	14	22	30	6	14
0	0	8	16	24	0	8	16	24	0	8	16	24	0	8	16	24	0
-1	18	26	2	10	18	26	2	10	18	26	2	10	18	26	2	10	18
-2	4	12	20	28	4	12	20	28	4	12	20	28	4	12	20	28	4
-3	22	30	6	14	22	30	6	14	22	30	6	14	22	30	6	14	22
-4	8	16	24	0	8	16	24	0	8	16	24	0	8	16	24	0	8
-5	26	2	10	18	26	2	10	18	26	2	10	18	26	2	10	18	26
-6	12	20	28	4	12	20	28	4	12	20	28	4	12	20	28	4	12
-7	30	6	14	22	30	6	14	22	30	6	14	22	30	6	14	22	30
-8	16	24	0	8	16	24	0	8	16	24	0	8	16	24	0	8	16

I3 = 1

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17
7	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3
6	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21
5	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7
4	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25
3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11
2	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29
1	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15
0	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1
-1	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19
-2	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5
-3	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23
-4	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9
-5	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27	3	11	19	27
-6	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13	21	29	5	13
-7	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31	7	15	23	31
-8	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17	25	1	9	17

N1 = 4 N2 = 4 N3 = 2 I1 = 8 I2 = 14 I3 = 1
A1 = 40.000 A1/N1 = 10.000 R*A1/N1 = 0.000
PMIN = -132 K = 2 NBAR = 1
DA = 5.4435 DR = 22.3529 MR = 16

IL N'Y A PAS DE CONDITION DE DESENSIBILISATION A VERIFIER : D1DT = 4.3710

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	2.236	22.361	2	-1	-1	22.361
2	4	2.236	22.361	2	-1	0	43.089

A1* = 39.986 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 4 N2 = 4 N3 = 2 I1 = 8 I2 = 14 I3 = 1
A1 = 54.360 A1/N1 = 13.590 R*A1/N1 = 0.000
PMIN = -140 K = 2 NBAR = 1
DA = 13.6735 DR = 30.3856 MR = 4

IL N'Y A PAS DE CONDITION DE DESENSIBILISATION A VERIFIER : D1DT = 10.9796

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	2.236	30.388	2	-1	-1	30.388
2	4	2.236	30.388	2	-1	0	58.558

A1* = 54.355 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 4 N2 = 4 N3 = 2 I1 = 8 I2 = 14 I3 = 1
A1 = 73.900 A1/N1 = 18.475 R*A1/N1 = 0.000
PMIN = -148 K = 2 NBAR = 1
DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	2.236	41.311	2	-1	-1	27.580
2	2.236	41.311	2	-1	0	22.170
3	2.000	36.950	0	-2	-1	19.512

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	2.236	41.311	2	-1	-1	41.311
2	4	2.236	41.311	2	-1	0	79.606

A1* = 73.889 (INTERMODULATION M = 1)

```
N1 =   5    N2 =   5    A1 =  45.000    A2 =  45.000    R*A1/N1 =  0.000
PMIN = -132     K =   2     A1/N1 =   9.000
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16     MLIM =   0

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     5     INDEX =     1
   I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=
     8 23.538
I1 =    10     INDEX =     2
   I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=
     3 23.538
NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =        2


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   23.538

   I1=   I2=
    5     8
   10     3

NMAX =      2
```

```
N1 =   5    N2 =   5    A1 =  60.000    A2 =  60.000    R*A1/N1 =  0.000
PMIN = -140     K =   2     A1/N1 =  12.000
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4     MLIM =   0

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     5     INDEX =     1
   I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=
     8 31.384
I1 =    10     INDEX =     2
   I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=
     3 31.384
NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =        2


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   31.384

   I1=   I2=
    5     8
   10     3

NMAX =      2
```

N1 = 5 N2 = 5 A1 = 100.000 A2 = 100.000 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -149 K = 2 A1/N1 = 20.000

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2 MLIM = 2

GENERATION DES COUPLES (I1, I2) (PREMIERE PARTIE)

I1 = 5 INDEX = 5

I2=	PROD=	I2=	PROD=	I2=	PROD=	I2=	PROD=
7	44.898	8	52.306	9	44.721	11	44.721
12	41.516						

I1 = 10 INDEX = 9

I2=	PROD=	I2=	PROD=	I2=	PROD=	I2=	PROD=
3	52.306	4	44.721	6	44.721	7	44.721

NOMBRE DE COUPLES (I1, I2) ADMISSIBLES = 9

(I1, I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) = 52.306

I1=	I2=
5	8
10	3

NMAX = 2

N1 = 5 N2 = 5 A1 = 42.740 A2 = 42.740

I1 = 5 I2 = 8 R*A1/N1 = 0.000

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	24	4	9	14	19	24	4	9	14	19	24	4	9	14	19	24	4
7	16	21	1	6	11	16	21	1	6	11	16	21	1	6	11	16	21
6	8	13	18	23	3	8	13	18	23	3	8	13	18	23	3	8	13
5	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20	0	5
4	17	22	2	7	12	17	22	2	7	12	17	22	2	7	12	17	22
3	9	14	19	24	4	9	14	19	24	4	9	14	19	24	4	9	14
2	1	6	11	16	21	1	6	11	16	21	1	6	11	16	21	1	6
1	18	23	3	8	13	18	23	3	8	13	18	23	3	8	13	18	23
0	10	15	20	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20	0	5	10	15
-1	2	7	12	17	22	2	7	12	17	22	2	7	12	17	22	2	7
-2	19	24	4	9	14	19	24	4	9	14	19	24	4	9	14	19	24
-3	11	16	21	1	6	11	16	21	1	6	11	16	21	1	6	11	16
-4	3	8	13	18	23	3	8	13	18	23	3	8	13	18	23	3	8
-5	20	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20	0
-6	12	17	22	2	7	12	17	22	2	7	12	17	22	2	7	12	17
-7	4	9	14	19	24	4	9	14	19	24	4	9	14	19	24	4	9
-8	21	1	6	11	16	21	1	6	11	16	21	1	6	11	16	21	1

```
N1 =     5     N2 =     5     I1 =     5     I2 =     8
A1 =  42.740     A1/N1 =   8.548     R*A1/N1 =   0.000
PMIN = -132     K =   2
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16

IL N'Y A PAS DE CONDITION DE DESENSIBILISATION A VERIFIER :  D1DT =  4.3710

 M    2M      E(M)       D(M)    I1(M)  I2(M)  (DM**2/3)(D2M**1/3)M
 1     2     2.828     24.177      2      2            22.356
 2     4     2.236     19.114      2     -1            38.228
A1* =  42.735   ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

```
N1 =     5     N2 =     5     I1 =     5     I2 =     8
A1 =  58.100     A1/N1 =  11.620     R*A1/N1 =   0.000
PMIN = -140     K =   2
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4

IL N'Y A PAS DE CONDITION DE DESENSIBILISATION A VERIFIER :  D1DT = 10.9796

 M    2M      E(M)       D(M)    I1(M)  I2(M)  (DM**2/3)(D2M**1/3)M
 1     2     2.828     32.866      2      2            30.390
 2     4     2.236     25.983      2     -1            51.966
A1* =  58.092   ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

```
N1 =     5     N2 =     5     I1 =     5     I2 =     8
A1 =  83.060     A1/N1 =  16.612     2*R =   0.000
PMIN = -148     K =   2
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2

 M      E(M)       D(M)     D(M)-2R   I1(M)  I2(M)    DMDT
 1     2.828     46.986     46.986      2      2     27.580
 2     2.236     37.146     37.146      2     -1     22.170
 3     1.414     23.493     23.493     -1      1     19.512
 4     2.236     37.146     37.146     -1     -2     17.821
 5     1.000     16.612     16.612      1      0     16.612

 M   2M     D(M)     D(M)-2R  I2(M)  I2(M)  ((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
 1    2   46.986    46.986      2      2                43.446
 2    4   37.146    37.146      2     -1                74.291
A1* =  83.058   ( DESENSIBILISATION  M =  5 )
```

```
N1 =      5     N2 =      5     N3 =      2
A1 =   39.520     A2 =   39.520     A3 =   15.808
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -132     K =   2     A1/N1 =   7.904
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16     MLIM =   0


GENERATION DES TRIPLETS (I1, I2, I3)  (CAS 8D)

I1 =    10     I2 =    14     INDEX =     1
   I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=
     1  22.356
I1 =    10     I2 =    16     INDEX =     2
   I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=
     1  22.356
I1 =    20     I2 =     4     INDEX =     3
   I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=
     1  22.356
I1 =    20     I2 =     6     INDEX =     4
   I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=
     1  22.356
NOMBRE DE TRIPLETS (I1, I2, I3) ADMISSIBLES =         4


(I1, I2, I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   22.356
   I1=   I2=   I3=
    10    14     1
    10    16     1
    20     4     1
    20     6     1

NMAX =   4
```

```
N1 =      5     N2 =      5     N3 =      2
A1 =   53.720     A2 =   53.720     A3 =   21.488
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -140     K =   2     A1/N1 =  10.744
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4     MLIM =   1


GENERATION DES TRIPLETS (I1, I2, I3)  (CAS 8D)

I1 =    10     I2 =    14     INDEX =     1
   I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=
     1  30.389
I1 =    10     I2 =    16     INDEX =     2
   I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=
     1  30.389
I1 =    20     I2 =     4     INDEX =     3
   I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=
     1  30.389
I1 =    20     I2 =     6     INDEX =     4
   I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=      I3=   PROD=
     1  30.389
NOMBRE DE TRIPLETS (I1, I2, I3) ADMISSIBLES =         4


(I1, I2, I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   30.389
   I1=   I2=   I3=
    10    14     1
    10    16     1
    20     4     1
    20     6     1

NMAX =   4
```

```
N1 =      5      N2 =      5      N3 =      2
A1 =   73.020      A2 =   73.020      A3 =   29.208
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -148      K =    2      A1/N1 =   14.604
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =   2      MLIM =    7


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS BD)

I1 =     10      I2 =     14      INDEX =      1
   I3=    PROD=       I3=    PROD=       I3=    PROD=       I3=    PROD=
     1   41.306
I1 =     10      I2 =     16      INDEX =      2
   I3=    PROD=       I3=    PROD=       I3=    PROD=       I3=    PROD=
     1   41.306
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         2


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =    41.306

   I1=    I2=    I3=
    10     14      1
    10     16      1

NMAX =    2
```

N1 = 5 N2 = 5 N3 = 2

A1 = 39.520 A2 = 39.520 A3 = 15.808

I1 = 10 I2 = 16 I3 = 1

I3 = -1

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	47	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7
7	31	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41
6	15	25	35	45	5	15	25	35	45	5	15	25	35	45	5	15	25
5	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9
4	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43
3	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27
2	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11
1	35	45	5	15	25	35	45	5	15	25	35	45	5	15	25	35	45
0	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29
-1	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13
-2	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47
-3	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31
-4	5	15	25	35	45	5	15	25	35	45	5	15	25	35	45	5	15
-5	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49
-6	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33
-7	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17
-8	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1

I3 = 0

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	48	8	18	28	38	48	8	18	28	38	48	8	18	28	38	48	8
7	32	42	2	12	22	32	42	2	12	22	32	42	2	12	22	32	42
6	16	26	36	46	6	16	26	36	46	6	16	26	36	46	6	16	26
5	0	10	20	30	40	0	10	20	30	40	0	10	20	30	40	0	10
4	34	44	4	14	24	34	44	4	14	24	34	44	4	14	24	34	44
3	18	28	38	48	8	18	28	38	48	8	18	28	38	48	8	18	28
2	2	12	22	32	42	2	12	22	32	42	2	12	22	32	42	2	12
1	36	46	6	16	26	36	46	6	16	26	36	46	6	16	26	36	46
0	20	30	40	0	10	20	30	40	0	10	20	30	40	0	10	20	30
-1	4	14	24	34	44	4	14	24	34	44	4	14	24	34	44	4	14
-2	38	48	8	18	28	38	48	8	18	28	38	48	8	18	28	38	48
-3	22	32	42	2	12	22	32	42	2	12	22	32	42	2	12	22	32
-4	6	16	26	36	46	6	16	26	36	46	6	16	26	36	46	6	16
-5	40	0	10	20	30	40	0	10	20	30	40	0	10	20	30	40	0
-6	24	34	44	4	14	24	34	44	4	14	24	34	44	4	14	24	34
-7	8	18	28	38	48	8	18	28	38	48	8	18	28	38	48	8	18
-8	42	2	12	22	32	42	2	12	22	32	42	2	12	22	32	42	2

I3 = 1

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9
7	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43
6	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27
5	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11
4	35	45	5	15	25	35	45	5	15	25	35	45	5	15	25	35	45
3	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29
2	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13
1	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47
0	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31
-1	5	15	25	35	45	5	15	25	35	45	5	15	25	35	45	5	15
-2	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49
-3	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33
-4	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17	27	37	47	7	17
-5	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1	11	21	31	41	1
-6	25	35	45	5	15	25	35	45	5	15	25	35	45	5	15	25	35
-7	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9	19	29	39	49	9	19
-8	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43	3	13	23	33	43	3

N1 = 5 N2 = 5 N3 = 2 I1 = 10 I2 = 16 I3 = 1

A1 = 39.520 A1/N1 = 7.904 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -132 K = 2 NBAR = 1

DA = 5.4435 DR = 22.3529 MR = 16

IL N'Y A PAS DE CONDITION DE DESENSIBILISATION A VERIFIER : D1DT = 4.3710

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	2.828	22.356	2	2	-1	22.356
2	4	2.828	22.356	2	2	0	41.343

A1* = 39.515 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 5 N2 = 5 N3 = 2 I1 = 10 I2 = 16 I3 = 1

A1 = 53.720 A1/N1 = 10.744 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -140 K = 2 NBAR = 1

DA = 13.6735 DR = 30.3856 MR = 4

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	2.828	30.389	2	2	-1	10.980

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	2.828	30.389	2	2	-1	30.389
2	4	2.828	30.389	2	2	0	56.198

A1* = 53.715 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 5 N2 = 5 N3 = 2 I1 = 10 I2 = 16 I3 = 1

A1 = 73.020 A1/N1 = 14.604 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -148 K = 2 NBAR = 1

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	2.828	41.306	2	2	-1	27.580
2	2.828	41.306	2	2	0	22.170
3	2.236	32.656	2	-1	-1	19.512
4	2.236	32.656	2	-1	0	17.821
5	1.414	20.653	-1	1	-1	16.612
6	1.414	20.653	-1	1	0	15.684
7	1.414	20.653	-1	1	1	14.941

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	2.828	41.306	2	2	-1	41.306
2	4	2.828	41.306	2	2	0	76.388

A1* = 73.018 (INTERMODULATION M = 1)

```
N1 =   9    N2 =   9    A1 =  42.910    A2 =  42.910    R*A1/N1 =  0.000
PMIN = -132     K =   4     A1/N1 =   4.768
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16     MLIM =   0

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     9     INDEX =     1
   I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=
    34  22.355

I1 =    18     INDEX =     2
   I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=
     7  22.355

I1 =    36     INDEX =     3
   I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=
    16  22.355

NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =        3


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   22.355

   I1=   I2=
    9     34
   18      7
   36     16

NMAX =      3
```

```
N1 =   9    N2 =   9    A1 =  58.330    A2 =  58.330    R*A1/N1 =  0.000
PMIN = -140     K =   4     A1/N1 =   6.481
DA = 13.6735     DR = 30.3856     MR =  4     MLIM =   5

GENERATION DES COUPLES (I1,I2)  (PREMIERE PARTIE)

I1 =     9     INDEX =     1
   I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=
    34  30.388

I1 =    18     INDEX =     2
   I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=
     7  30.388

I1 =    36     INDEX =     3
   I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=      I2=   PROD=
    16  30.388

NOMBRE DE COUPLES (I1,I2) ADMISSIBLES =        3


(I1,I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   30.388

   I1=   I2=
    9     34
   18      7
   36     16

NMAX =      3
```

N1 = 9 N2 = 9 I1 = 36 I2 = 16

A1 = 42.910 A1/N1 = 4.768 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -132 K = 4

DA = 5.4435 DR = 22.3529 MR = 16

IL N'Y A PAS DE CONDITION DE DESENSIBILISATION A VERIFIER : D1DT = 4.3710

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	5.000	23.839	0	-5	22.355
2	4	4.123	19.658	-4	-1	32.062
4	8	2.236	10.661	1	-2	53.728
3	6	3.162	15.077	1	3	49.886

A1* = 42.906 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 9 N2 = 9 A1 = 58.330 A2 = 58.330

I1 = 18 I2 = 7 R*A1/N1 = 0.000

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	74	11	29	47	65	2	20	38	56	74	11	29	47	65	2	20	38
7	67	4	22	40	58	76	13	31	49	67	4	22	40	58	76	13	31
6	60	78	15	33	51	69	6	24	42	60	78	15	33	51	69	6	24
5	53	71	8	26	44	62	80	17	35	53	71	8	26	44	62	80	17
4	46	64	1	19	37	55	73	10	28	46	64	1	19	37	55	73	10
3	39	57	75	12	30	48	66	3	21	39	57	75	12	30	48	66	3
2	32	50	68	5	23	41	59	77	14	32	50	68	5	23	41	59	77
1	25	43	61	79	16	34	52	70	7	25	43	61	79	16	34	52	70
0	18	36	54	72	9	27	45	63	0	18	36	54	72	9	27	45	63
-1	11	29	47	65	2	20	38	56	74	11	29	47	65	2	20	38	56
-2	4	22	40	58	76	13	31	49	67	4	22	40	58	76	13	31	49
-3	78	15	33	51	69	6	24	42	60	78	15	33	51	69	6	24	42
-4	71	8	26	44	62	80	17	35	53	71	8	26	44	62	80	17	35
-5	64	1	19	37	55	73	10	28	46	64	1	19	37	55	73	10	28
-6	57	75	12	30	48	66	3	21	39	57	75	12	30	48	66	3	21
-7	50	68	5	23	41	59	77	14	32	50	68	5	23	41	59	77	14
-8	43	61	79	16	34	52	70	7	25	43	61	79	16	34	52	70	7

N1 = 9 N2 = 9 I1 = 18 I2 = 7

A1 = 58.330 A1/N1 = 6.481 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -140 K = 4

DA = 13.6735 DR = 30.3856 MR = 4

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	5.000	32.406	3	4	10.980
2	4.123	26.722	-4	-1	8.826
3	3.162	20.495	-1	3	7.768
4	2.236	14.492	1	-2	7.095
5	4.472	28.984	4	2	6.613

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M.
1	2	5.000	32.406	3	4	30.388
2	4	4.123	26.722	-4	-1	43.584
4	8	2.236	14.492	1	-2	73.036
3	6	3.162	20.495	-1	3	67.813

A1* = 58.325 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 9 N2 = 9 A1 = 81.190 A2 = 81.190

I1 = 36 I2 = 16 2*R = 0.000

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	2	38	74	29	65	20	56	11	47	2	38	74	29	65	20	56	11
7	67	22	58	13	49	4	40	76	31	67	22	58	13	49	4	40	76
6	51	6	42	78	33	69	24	60	15	51	6	42	78	33	69	24	60
5	35	71	26	62	17	53	8	44	80	35	71	26	62	17	53	8	44
4	19	55	10	46	1	37	73	28	64	19	55	10	46	1	37	73	28
3	3	39	75	30	66	21	57	12	48	3	39	75	30	66	21	57	12
2	68	23	59	14	50	5	41	77	32	68	23	59	14	50	5	41	77
1	52	7	43	79	34	70	25	61	16	52	7	43	79	34	70	25	61
0	36	72	27	63	18	54	9	45	0	36	72	27	63	18	54	9	45
-1	20	56	11	47	2	38	74	29	65	20	56	11	47	2	38	74	29
-2	4	40	76	31	67	22	58	13	49	4	40	76	31	67	22	58	13
-3	69	24	60	15	51	6	42	78	33	69	24	60	15	51	6	42	78
-4	53	8	44	80	35	71	26	62	17	53	8	44	80	35	71	26	62
-5	37	73	28	64	19	55	10	46	1	37	73	28	64	19	55	10	46
-6	21	57	12	48	3	39	75	30	66	21	57	12	48	3	39	75	30
-7	5	41	77	32	68	23	59	14	50	5	41	77	32	68	23	59	14
-8	70	25	61	16	52	7	43	79	34	70	25	61	16	52	7	43	79

N1 = 9 N2 = 9 A1 = 90.000 A2 = 90.000 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -143 K = 4 A1/N1 = 10.000

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2 MLIM = 15

GENERATION DES COUPLES (I1, I2) (PREMIERE PARTIE)

I1 = 18 INDEX = 1

I2=	PROD=	I2=	PROD=	I2=	PROD=	I2=	PROD=
38	41.516						

I1 = 36 INDEX = 3

I2=	PROD=	I2=	PROD=	I2=	PROD=	I2=	PROD=
16	46.887	25	43.483				

NOMBRE DE COUPLES (I1, I2) ADMISSIBLES = 3

(I1, I2) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) = 46.887

I1=	I2=
36	16

NMAX = 1

N1 = 9 N2 = 9 A1 = 42.910 A2 = 42.910

I1 = 36 I2 = 16 R*A1/N1 = 0.000

	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	2	38	74	29	65	20	56	11	47	2	38	74	29	65	20	56	11
7	67	22	58	13	49	4	40	76	31	67	22	58	13	49	4	40	76
6	51	6	42	78	33	69	24	60	15	51	6	42	78	33	69	24	60
5	35	71	26	62	17	53	8	44	80	35	71	26	62	17	53	8	44
4	19	55	10	46	1	37	73	28	64	19	55	10	46	1	37	73	28
3	3	39	75	30	66	21	57	12	48	3	39	75	30	66	21	57	12
2	68	23	59	14	50	5	41	77	32	68	23	59	14	50	5	41	77
1	52	7	43	79	34	70	25	61	16	52	7	43	79	34	70	25	61
0	36	72	27	63	18	54	9	45	0	36	72	27	63	18	54	9	45
-1	20	56	11	47	2	38	74	29	65	20	56	11	47	2	38	74	29
-2	4	40	76	31	67	22	58	13	49	4	40	76	31	67	22	58	13
-3	69	24	60	15	51	6	42	78	33	69	24	60	15	51	6	42	78
-4	53	8	44	80	35	71	26	62	17	53	8	44	80	35	71	26	62
-5	37	73	28	64	19	55	10	46	1	37	73	28	64	19	55	10	46
-6	21	57	12	48	3	39	75	30	66	21	57	12	48	3	39	75	30
-7	5	41	77	32	68	23	59	14	50	5	41	77	32	68	23	59	14
-8	70	25	61	16	52	7	43	79	34	70	25	61	16	52	7	43	79

N1 = 9 N2 = 9 I1 = 36 I2 = 16

A1 = 81.190 A1/N1 = 9.021 2*R = 0.000

PMIN = -148 K = 4

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2

M	E(M)	D(M)	D(M)-2R	I1(M)	I2(M)	DMDT
1	5.000	45.106	45.106	0	-5	27.580
2	4.123	37.195	37.195	-4	-1	22.170
3	3.162	28.527	28.527	1	3	19.512
4	2.236	20.172	20.172	1	-2	17.821
5	3.606	32.526	32.526	-3	2	16.612
6	4.243	38.273	38.273	-3	-3	15.684
7	2.236	20.172	20.172	2	1	14.941
8	4.472	40.344	40.344	2	-4	14.326
9	2.000	18.042	18.042	-2	0	13.804
10	5.000	45.106	45.106	3	4	13.353
11	3.162	28.527	28.527	3	-1	12.958
12	3.162	28.527	28.527	-1	3	12.608
13	2.236	20.172	20.172	-1	-2	12.294
14	4.472	40.344	40.344	4	2	11.237
15	5.000	45.106	45.106	4	-3	10.031
16	1.000	9.021	9.021	0	1	9.021

M	2M	D(M)	D(M)-2R	I2(M)	I2(M)	((DM-2R)**2/3)((D2M-2R)**1/3)M
1	2	45.106	45.106	0	-5	42.298
2	4	37.195	37.195	-4	-1	60.665

A1* = 81.186 (DESENSIBILISATION M = 16)

```
N1 =      9      N2 =      9      N3 =      2
A1 =    35.570      A2 =    35.570      A3 =     7.904
RA1/N1 =      0.000

PMIN = -132      K =    5      A1/N1 =    3.952
DA =   5.4435      DR = 22.3529      MR = 18      MLIM =    1


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =     18      I2 =     22      INDEX =      1
    I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=
      1   22.357
I1 =     36      I2 =     76      INDEX =      2
    I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=
      1   22.357
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =          2


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =    22.357

    I1=    I2=    I3=
     18     22      1
     36     76      1

NMAX =    2


N1 =      9      N2 =      9      N3 =      2
A1 =    48.350      A2 =    48.350      A3 =    10.744
RA1/N1 =      0.000

PMIN = -140      K =    5      A1/N1 =    5.372
DA = 13.8735      DR = 30.3856      MR =  4      MLIM =    9


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =     36      I2 =     76      INDEX =      1
    I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=        I3=    PROD=
      1   30.390
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =          1


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =    30.390

    I1=    I2=    I3=
     36     76      1

NMAX =    1
```

```
N1 =     9     N2 =     9     N3 =     2
A1 =   72.910     A2 =   72.910     A3 =   16.202
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -148     K =    5     A1/N1 =    8.101
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2     MLIM =  17


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =     72     I2 =     50     INDEX =      1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  41.308

GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8E)

I2 =     72     I1 =     50     INDEX =      2
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  41.308
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         2


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   41.308

   I1=   I2=   I3=
    72    50     1
    50    72     1

NMAX =   2
```

```
N1 =   9   N2 =   9   N3 =   2     I1 =   18   I2 =   22   I3 =    1
A1 =   35.570     A1/N1 =    3.952     R*A1/N1 =    0.000
PMIN = -132     K =   5     NBAR =    1
DA =  5.4435     DR = 22.3529     MR = 16

     M      E(M)      D(M)   I1(M)  I2(M)  I3(M)     DMDT
     1     5.657    22.357     -4     -4     -1     4.371

 M    2M      E(M)      D(M)   I1(M)  I2(M)  I3(M)  (DM**2/3)(D2M**1/3)M
 1     2     5.657    22.357     -4     -4     -1           22.357
 2     4     5.657    22.357     -4     -4      0           28.168
 4     8     1.414     5.589     -1      1      0           28.168
 3     6     1.414     5.589     -1      1     -1           25.544
 5    10     1.414     5.589     -1      1      1           38.178

A1* =  35.563   ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

N1 = 9 N2 = 9 N3 = 2 I1 = 36 I2 = 76 I3 = 1

A1 = 48.350 A1/N1 = 5.372 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -140 K = 5 NBAR = 1

DA = 13.6735 DR = 30.3856 MR = 4

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	5.657	30.390	4	-4	-1	10.980
2	5.657	30.390	4	-4	0	8.826
3	2.236	12.013	-2	1	-1	7.768
4	2.236	12.013	-2	1	0	7.095
5	2.236	12.013	-2	1	1	6.613
6	3.606	19.370	2	-3	0	6.244
7	3.606	19.370	2	-3	1	5.948
8	4.472	24.025	-4	2	0	5.703
9	2.000	10.744	0	-2	-1	5.495

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	5.657	30.390	4	-4	-1	30.390
2	4	5.657	30.390	4	-4	0	44.606
4	8	2.236	12.013	-2	1	0	60.540
3	6	2.236	12.013	-2	1	-1	42.259

A1* = 48.343 (INTERMODULATION M = 1)

N1 = 9 N2 = 9 N3 = 2 I1 = 72 I2 = 50 I3 = 1

A1 = 72.910 A1/N1 = 8.101 R*A1/N1 = 0.000

PMIN = -148 K = 5 NBAR = 1

DA = 34.3460 DR = 41.3050 MR = 2

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	5.099	41.308	-1	-5	-1	27.580
2	5.099	41.308	-1	-5	0	22.170
3	3.162	25.618	3	-1	-1	19.512
4	3.162	25.618	3	-1	0	17.821
5	3.162	25.618	3	-1	1	16.612
6	3.606	29.209	-2	3	0	15.684
7	3.606	29.209	-2	3	1	14.941
8	3.606	29.209	-3	2	0	14.326
9	2.236	18.115	1	2	-1	13.804
10	2.236	18.115	1	2	0	13.353
11	2.236	18.115	1	2	1	12.958
12	3.000	24.303	0	-3	0	12.608
13	3.000	24.303	0	-3	1	12.294
14	4.123	33.402	4	1	0	11.237
15	4.123	33.402	4	1	1	10.031
16	5.000	40.506	3	-4	0	9.021
17	2.000	16.202	-2	0	-1	8.164

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	5.099	41.308	-1	-5	-1	41.308
2	4	5.099	41.308	-1	-5	0	70.453

A1* = 72.905 (INTERMODULATION M = 1)

```
N1 =     9     N2 =     9     N3 =     3
A1 =   69.040     A2 =   69.040     A3 =   23.013
RA1/N1 =    0.000

PMIN = -148     K =    5     A1/N1 =   7.671
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2     MLIM =  17


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =    27     I2 =    87     INDEX =     1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  41.310
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =   41.310
   I1=   I2=   I3=
    27    87     1

NMAX =   1
```

```
N1 =   9   N2 =   9   N3 =   3     I1 =   27   I2 =   87   I3 =    1
A1 =   69.040     A1/N1 =    7.671     R*A1/N1 =    0.000
PMIN = -148     K =    5     NBAR =    2
DA = 34.3460     DR = 41.3050     MR =  2
```

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	5.385	41.310	2	5	-2	27.580
2	5.385	41.310	2	5	-1	22.170
3	5.385	41.310	2	5	0	19.512
4	3.162	24.258	-3	1	-2	17.821
5	3.162	24.258	-3	1	-1	16.612
6	3.162	24.258	-3	1	0	15.684
7	3.162	24.258	1	-3	-2	14.941
8	3.162	24.258	1	-3	-1	14.326
9	3.162	24.258	1	-3	0	13.804
10	3.162	24.258	1	-3	1	13.353
11	3.162	24.258	1	-3	2	12.958
12	3.606	27.659	3	-2	0	12.608
13	2.828	21.697	-2	-2	-2	12.294
14	2.828	21.697	-2	-2	-1	11.237
15	2.828	21.697	-2	-2	0	10.031
16	2.828	21.697	-2	-2	1	9.021
17	2.828	21.697	-2	-2	2	8.164

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	5.385	41.310	2	5	-2	41.310
2	4	5.385	41.310	2	5	-1	69.186

```
A1* =  69.031    ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

```
N1 =      9      N2 =      9      N3 =      4
A1 =    69.500      A2 =    69.500      A3 =    30.889
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -148      K =    5      A1/N1 =    7.722
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =  2      MLIM =  17


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =     36      I2 =    116      INDEX =      1
   I3=    PROD=       I3=    PROD=       I3=    PROD=       I3=    PROD=
     1  41.585
I1 =     72      I2 =    152      INDEX =      2
   I3=    PROD=       I3=    PROD=       I3=    PROD=       I3=    PROD=
     1  43.683
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         2


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =    43.683
   I1=    I2=    I3=
   72    152      1

NMAX =    1
```

```
N1 =   9   N2 =   9   N3 =   4      I1 =   72   I2 =  152   I3 =     1
A1 =   66.870      A1/N1 =    7.430      R*A1/N1 =    0.000
PMIN = -148      K =   5      NBAR =    3
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =  2
```

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	5.657	42.030	4	-4	-3	27.580
2	5.657	42.030	4	-4	-2	22.170
3	5.657	42.030	4	-4	-1	19.512
4	5.657	42.030	4	-4	0	17.821
5	2.236	16.614	-2	1	-3	16.612
6	2.236	16.614	-2	1	-2	15.684
7	2.236	16.614	-2	1	-1	14.941
8	2.236	16.614	-2	1	0	14.326
9	2.236	16.614	-2	1	1	13.804
10	2.236	16.614	-2	1	2	13.353
11	2.236	16.614	-2	1	3	12.958
12	3.606	26.789	2	-3	0	12.608
13	3.606	26.789	2	-3	1	12.294
14	3.606	26.789	2	-3	2	11.237
15	3.606	26.789	2	-3	3	10.031
16	4.472	33.228	-4	2	0	9.021
17	2.000	14.860	0	-2	-3	8.164
18	2.000	14.860	0	-2	-2	7.432

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	5.657	42.030	4	-4	-3	42.030
2	4	5.657	42.030	4	-4	-2	84.061

```
A1* =  66.860   ( DESENSIBILISATION  M =  5 )
```

```
N1 =      9      N2 =      9      N3 =      5
A1 =    65.730      A2 =    65.730      A3 =    36.517
RA1/N1 =     0.000

PMIN = -148      K =    5      A1/N1 =    7.303
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =   2      MLIM =   18


GENERATION DES TRIPLETS (I1,I2,I3)  (CAS 8D)

I1 =    90      I2 =    190      INDEX =      1
   I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=       I3=   PROD=
     1  41.314
NOMBRE DE TRIPLETS (I1,I2,I3) ADMISSIBLES =         1


(I1,I2,I3) DONNANT LE MAXIMUM DU PRODUIT (D(1)**2/3)(D(2)**1/3)
MAX (D(1)**2/3)(D(2)**1/3) =    41.314

   I1=    I2=    I3=
    90    190      1

NMAX =    1
```

```
N1 =   9   N2 =   9   N3 =   5      I1 =   90   I2 =  190   I3 =    1
A1 =   65.720      A1/N1 =    7.302      R*A1/N1 =    0.000
PMIN = -148      K =   5      NBAR =    4
DA = 34.3460      DR = 41.3050      MR =  2
```

M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	DMDT
1	5.657	41.308	4	-4	-4	27.580
2	5.657	41.308	4	-4	-3	22.170
3	5.657	41.308	4	-4	-2	19.512
4	5.657	41.308	4	-4	-1	17.821
5	5.657	41.308	4	-4	0	16.612
6	2.236	16.328	-2	1	-4	15.684
7	2.236	16.328	-2	1	-3	14.941
8	2.236	16.328	-2	1	-2	14.326
9	2.236	16.328	-2	1	-1	13.804
10	2.236	16.328	-2	1	0	13.353
11	2.236	16.328	-2	1	1	12.958
12	2.236	16.328	-2	1	2	12.608
13	2.236	16.328	-2	1	3	12.294
14	2.236	16.328	-2	1	4	11.237
15	3.606	26.329	2	-3	0	10.031
16	3.606	26.329	2	-3	1	9.021
17	3.606	26.329	2	-3	2	8.164
18	3.606	26.329	2	-3	3	7.432

M	2M	E(M)	D(M)	I1(M)	I2(M)	I3(M)	(DM**2/3)(D2M**1/3)M
1	2	5.657	41.308	4	-4	-4	41.308
2	4	5.657	41.308	4	-4	-3	82.615

```
A1* =  65.716   ( INTERMODULATION  M =  1 )
```

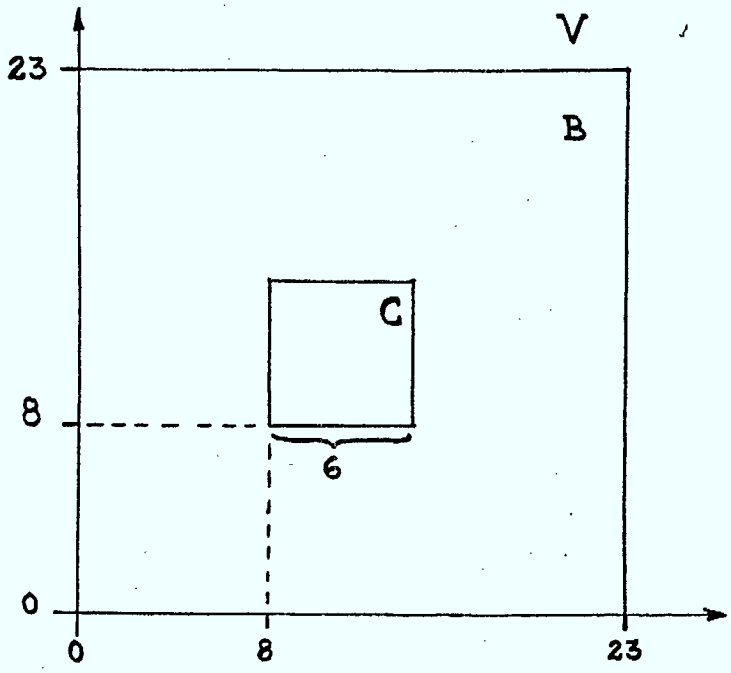
CHAPITRE 3

ANALYSE PRELIMINAIRE DE QUELQUES CONFIGURATIONS D'ASSIGNATION NON UNIFORME

(F. Dubeau)

1. LE PROBLEME MODELE

Nous considérons une ville carrée V de A km de côté et un centre-ville C de A_c km de côté. Ceci délimite deux régions C et B = V-C à l'intérieur du carré V. Pour fixer les idées, prenons $A_c/A = 6/23$ et localisons C à l'intérieur de V de la façon indiquée à la Figure 1.



$$\frac{A_c}{A} = \frac{6}{23}$$

Figure 1. Ville modèle.

On divise maintenant chaque côté de C en 23 parties égales et on forme $(23)^2 = 529$ petits carrés. On fait de même pour la région B en supprimant les $6^2 = 36$ carrés coincidant avec la région C, on a donc 529-36 = 493 grands carrés dans la région B.

Le problème est d'assigner une fréquence, prise dans la suite 0,1,...,1021 (= 529+493), à chacun des carrés de façon à satisfaire aux conditions de non-interférence (les contraintes du problème) en minimisant le A. Plus généralement, le problème est de trouver une assignation de 1000 fréquences environ dans la ville V de telle sorte qu'il y en ait environ 500 dans chacune des deux régions tout en minimisant la longueur A.

2. LES CONTRAINTES ET LEURS CONSEQUENCES

Toute assignation de fréquences dans V doit satisfaire à des conditions de non-interférence. Rappelons brièvement ces conditions.

Utilisons un indice r indiquant la région considérée et pouvant prendre les valeurs B,C ou V. Posons

$$(1)\quad \begin{cases} d_m^r(n) = \begin{cases} \text{la distance géographique entre les fréquences } n \text{ et } n+m \text{ assignées toutes les deux dans la région } r \\ +\infty \quad \text{sinon} \end{cases} \\ d_m^r = \text{Min}\{d_m^r(n) \mid \text{toutes les fréquences } n \text{ assignées dans la région } r\}, \end{cases}$$

Ainsi d_m^r est la distance géographique minimale entre deux fréquences séparées par m canaux et assignées dans la même région r.

Les contraintes de non-interférence sont

$$(2)\quad d_m^r \geq D_m^r \quad \text{pour} \quad m \geq 1,$$

$$(3)\quad d_1^r \geq \alpha^r,$$

$$(4)\quad d_m^{r\,2/3}\, d_{2m}^{r\,1/3}\, m \geq \beta^r \quad \text{pour} \quad 1 \leq m \leq M^r,$$

où les D_m^r, α^r et β^r (en km) sont données dans le tableau suivant:

	$P_{MIN} = -132$	$P_{MIN} = -140$
D_m^r	$4{,}37/m^{0{,}315}$ $1 \leq m \leq 13$ $136{,}77/m^{1{,}645}$ $14 \leq m \leq 15$ $300{,}8\ m^{0{,}225}/(50+m)^{1{,}415}$ $m \geq 16$	$10{,}92/m^{0{,}315}$ $1 \leq m \leq 13$ $343{,}57/m^{1{,}645}$ $14 \leq m \leq 21$ $476{,}80\ m^{0{,}225}/(50\ m)^{1{,}415}$ $m \geq 22$
α^r	5,444	13,674
β^r, M^r	22,35, 16	30,38, 4
r	C	B et V

Tableau 1. Paramètres des contraintes.

Une première stratégie d'assignation des fréquences rencontrée dans les rapports précédents est d'assigner les fréquences paires dans la région C et les fréquences impaires dans la région B. Pour une telle assignation, les fréquences assignées dans la région B dans des carrés adjacents à la région C sont celles qui, avec leurs adjacents, risquent le plus, en première analyse, de ne pas satisfaire aux contraintes de non-interférence (voir les rapports 1980-81 et 1981-82).

En effet considérons une fréquence n assignée dans la région B et très près du milieu d'un des côtés de la région C. La fréquence n+1, adjacente à n, assignée dans la région C est placée de la meilleure façon possible par rapport à n, c'est-à-dire le plus loin possible, si elle est placée dans un des deux coins opposés (voir la Figure 2).

Dans ce cas on a

$$d_1^v \leq d_1(n) = A_c \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

Or d'après les analyses précédentes (voir le rapport 1981-82) il suffit entre autre que

$$d_1^v \geq \hat{d}_1^v = 30.38 \times 2^{1/3} \text{km} = 38,22 \text{ km}$$

pour que la contrainte (4) soit satisfaite. Mais cela entraîne que

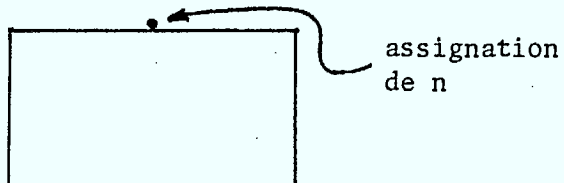


Figure 2.

$$A_c \geq \frac{38,22 \times 2}{\sqrt{5}} \text{ km} = 34,24 \text{ km}$$

et pour notre problème modèle on doit alors avoir $A \geq 131,3$ km. Ces distances peuvent être légèrement inférieures si on suppose que les fréquences sont assignées au milieu des carrés. Dans ce cas, pour le problème modèle on obtient $A_c = 31,8$ km et $A = 122$ km.

Ainsi pour réduire sensiblement la taille de la ville et par le fait même du centre-ville, on doit nécessairement enlever n+1 (et n-1) de la région C. Ceci nous amène à considérer deux types de stratégie d'assignation:

(i) à partir d'une assignation de fréquences impaires dans la région B et de fréquences paires dans la région C, enlever les fréquences de C qui sont adjacentes aux fréquences de B assignées dans des carrés adjacents à la région C, et ajouter des fréquences paires dans la région C de façon à maintenir constant le nombre de fréquences assignées dans C.

(ii) considérer une région T entre les régions C et B (voir la figure 3) dans laquelle on assigne une suite de fréquences adjacentes. Ensuite assigner dans B des fréquences impaires et dans C des fréquences paires. Par exemple

assigner 0,1,2,...,N dans la région T,

assigner N+1, N+3, N+5,... dans la région B,

assigner N+2, N+4, N+6,... dans la région C.

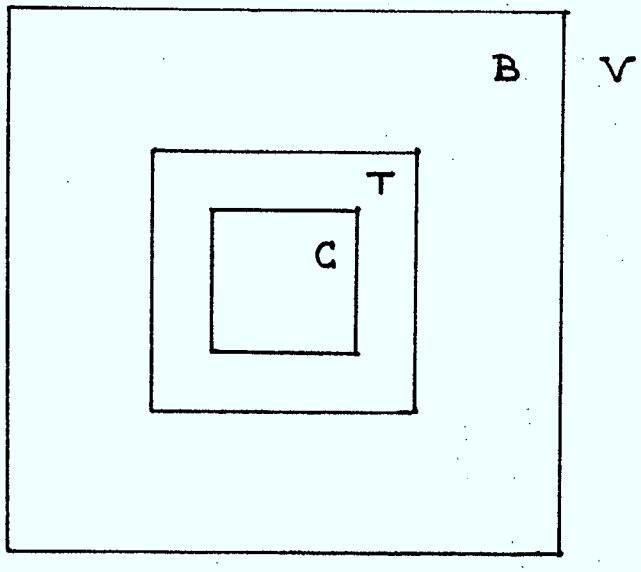


Figure 3. Ville à 3 régions.

On va donc analyser ces deux possibilités, tout en utilisant des assignations linéaires et en incorporant, au besoin, des méthodes d'étirement et de contraction du spectre de l'assignation.

Nous nous dirigeons donc vers deux types de stratégie d'assignation non-uniforme schématisés comme suit

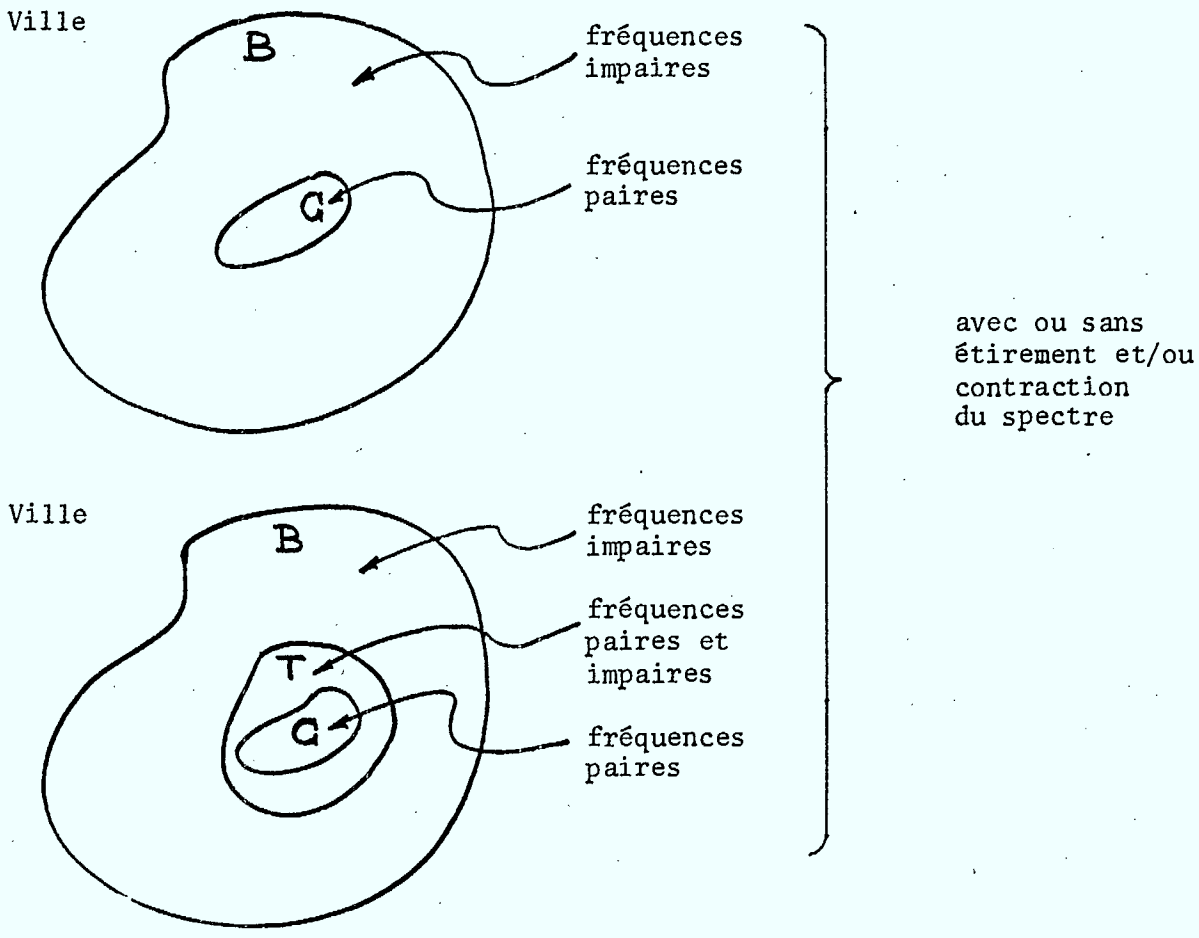


Figure 4. Stratégies d'assignation.

Ces schémas suggèrent également des assignations dans des régions circulaires ou ellipsoïdales. Nous décrirons brièvement un exemple d'assignation de ce type.

3. ETIREMENT ET CONTRACTION DU SPECTRE D'UNE ASSIGNATION

3.1 *Quelques définitions*

Le spectre d'une assignation a de P fréquences est la suite croissante $S = \{n_p\}_{p=1}^{P}$ des P fréquences assignées par a. On ordonne ainsi les positions géographiques et la fréquence n_p est assignée à la position géographique p. Nous appelons étirement de la suite croissante S de r unité(s) à partir du $s^{\text{ième}}$ rang l'opération, notée E_s^r, produisant la suite croissante $E_s^r(S) = \{\bar{n}_p\}_{p=1}^{P}$ définie par

$$(1) \qquad \bar{n}_p = \begin{cases} n_p & \text{si } p < s \\ n_p + r & \text{si } p \geq s \, . \end{cases}$$

Une contraction de la suite croissante S de r unités à partir du $s^{\text{ième}}$ rang est l'opération notée C_s^r transformant la suite S en une suite croissante $C_s^r(S) = \{\bar{n}_p\}_{p=1}^{P}$ définie par

$$(2) \qquad \bar{n}_p = \begin{cases} n_p & \text{si } p < s \\ n_p - r & \text{si } p \geq s \end{cases}$$

Notons que l'on peut appliquer l'opération C_s^r à la suite S à la condition que $n_s - n_{s-1} > r$. Remarquons également les identités suivantes

$$E_s^r = (E_s^1)^r \quad \text{et} \quad C_s^r = (C_s^1)^r \, .$$

Nous nous limiterons ainsi à l'étude de E_s^1 et C_s^1.

3.2 *Effets de* E_s^1 *et* C_s^1 *sur les* d_m

Considérons une assignation a de spectre S et de distances d_m, et une assignation $\bar{a}$ de spectre $\bar{S} = E_s^1(S)$ et de distances $\bar{d}_m$. Examinons deux positions géographiques u et v, auxquelles on assigne par $\bar{a}$ les fréquences $\bar{n}_u$ et $\bar{v}_v$. Supposons de plus que $v > u$ et $\bar{n}_v - \bar{n}_u = m$. Il y a deux situations intéressantes à regarder:

(i) $u < v < s$ (ou $s \leq u < v$): dans ce cas $\bar{n}_u = n_u$ (ou $\bar{n}_u = n_u+1$) et $\bar{n}_v = n_v$ (ou $\bar{n}_v = n_v+1$). Ainsi les positions géographiquement u et v contribuent à $\bar{d}_m$ de la même façon qu'elles contribuent à d_m.

(ii) $u < s \leq v$: dans ce cas $\bar{n}_u = n_u$ et $\bar{n}_v = n_v+1$ et les positions géographiques u et v contribuent à $\bar{d}_m$ de la même façon qu'elles contribuent à d_{m-1}.

De ces deux situations, on conclut que

$$\bar{d}_m \geq \min\{d_m, d_{m-1}\} \qquad \forall m=1,2,3,... \tag{3}$$

(en prenant par convention $d_0 = +\infty$).

De la même façon, si l'assignation $\bar{a}$ a un spectre $\bar{S} = C_s^1(S)$ et des distances $\bar{d}_m$, les deux situations nous donnent:

(i) $u < v < s$ ($s \leq u < v$): dans ce cas $\bar{n}_u = n_u$ (ou $\bar{n}_u = n_u-1$) et $\bar{n}_v = n_v$ (ou $\bar{n}_v = n_v-1$) et les positions géographiques u et v contribuent à $\bar{d}_m$ de la même façon qu'elles contribuent à d_m.

(ii) $u < s \leq v$: dans ce cas $\bar{n}_u = n_u$ et $\bar{n}_v = n_v-1$ et les positions géographiques u et v contribuent à $\bar{d}_m$ de la même façon qu'elles contribuent à d_{m+1}.

Ainsi

$$\bar{d}_m \geq \min\{d_m, d_{m+1}\} \qquad \forall m=1,2,3,... \tag{4}$$

En vertu des contraintes (2.2), (2.3) et (2.4) et de la propriété (3), on pourra diminuer le côté minimum A* d'une ville pour une assignation donnée en utilisant l'opération d'étirement du spectre de l'assignation a. Inversement, si pour une ville de côté A donné et une assignation a également donnée on a $A^* < A$ on pourra envisager de contracter le spectre de a afin d'en diminuer l'étendue n_p-n_1 tout en conservant $A^* \leq A$. Ce sont les deux applications que nous traitons au prochain paragraphe.

3.3 *Applications*

On considère une ville carrée de A km par A km et on divise chaque côté de la ville en N intervalles. On forme ainsi N^2 petits carrés et on suppose donnée une assignation a de N^2 fréquences de spectre $S = \{n_p\}_{p=1}^{N^2}$. Pour cette assignation a on connaît la longueur minimale A* du côté de la ville qui nous assure la vérification de toutes les contraintes (2.2), (2.3) et (2.4).

Notre premier problème est d'étirer le spectre S de l'assignation a de façon à faire diminuer A* jusqu'à une valeur désirée A_D^* tout en vérifiant les contraintes (2.2), (2.3) et (2.4).

L'algorithme suivant pourrait être employé pour résoudre ce problème.

Etape 1 (Initialisation). Entrer l'assignation a et A_D^*. Calculer A* et d_m (m=1,...,M, M pouvant être estimé à l'aide de A_D^*). Poser $A_0^* = A^*$ et $\ell = 0$ (ℓ compte le nombre d'étirement).

Etape 2 (Boucle). Faire l'étape 3 jusqu'à ce que $A^* \leq A_D^*$, dans ce cas aller à l'étape 4.

Etape 3 (Etirement).

$\ell \leftarrow \ell + 1$.

Trouver le plus petit m tel que

$$d_m = D_m \quad \text{ou} \quad d_m^{2/3} d_m^{1/3} m = \beta .$$

Déterminer $E_m^{\ell} = \{n_p \mid d_m(n_p) = d_m\}$.

Prendre un élément n_p de E_m et considérer $n_q = n_p + m$.

Faire

$$n_p \leftarrow \begin{cases} n_p & \text{si } p < q, \\ n_p + 1 & \text{si } p \geq q, \end{cases} \qquad p = 1,2,\ldots, N^2.$$

Mise à jour des d_m et de A^*_ℓ

Aller à l'étape 2.

Etape 4 (Sortie des résultats)

Imprimer ℓ, l'assignation a et les d_m (si désiré).

Remarque 1. Essentiellement, en vertu de (3) s'il y a un problème avec d_m cet algorithme transfert ce problème sur d_{m+1}, comme les contraintes sont moins fortes sur d_{m+1}, on espère pouvoir réduire le A*.

Remarque 2. Si on débute avec une assignation a de spectre $\{p\}_{p=0}^{N^2-1}$, qu'on limite à k l'écart possible entre deux fréquences successives, c'est-à-dire $n_p - n_{p-1} \leq k$, et que l'on cherche à diminuer le plus possible le A*, on devrait aboutir à la k-assignation induite par a.

Le second problème est de contracter le plus possible le spectre d'une assignation tout en s'assurant que le A*, requis à la vérification des contraintes (2.2), (2.3) et (2.4), ne dépasse pas une borne supérieure donnée A^*_D.

Nous proposons l'algorithme suivant.

Etape 1 (Initialisation). Entrer l'assignation a et A^*_D.

Calculer A*.

Etape 2 (Contractions préliminaires) Pour A^*_D, il est possible de trouver un M* tel que pour $m \geq M^*$ les contraintes (2.2), (2.3) et (2.4) soient toujours vérifiées. Ainsi, selon (4), on peut toujours contracter de façon à ne modifier que les d_m ($m > M^*$) de la façon suivante: pour $q=2,\ldots,N^2$, si $n_q - n_{q-1} > M^*$ faire

$\Delta\ell \leftarrow n_q - n_{q-1} - M^*$

$n_p \leftarrow n_p - \Delta\ell$ si $p \geq q$

$\ell \leftarrow \ell + \Delta\ell$.

Mise à jour des d_m et de A*.

Déterminer l'ensemble $E^\ell = \{n_q | n_q - n_{q-1} > 1,\ q=2,\ldots,N^2\}$.

Etape 3. Faire l'étape 4 jusqu'à ce que l'ensemble E^ℓ soit vide, dans ce cas aller à l'étape 5.

Etape 4 (Contraction). Prendre un $n_q \in E^\ell$ tel que $\bar{m} = n_q - n_{q-1}$ soit maximal.

Faire $E^\ell \leftarrow E^\ell - \{n_q\}$.

Peut-on contracter c'est-à-dire faire

$$n_p \leftarrow n_{p-1} \quad \text{si} \quad p \geq q.$$

Il faut calculer les $\bar{d}_m$ pour $m \geq \bar{m}-1$ (les seuls qui sont modifiés selon (4)) et vérifier les contraintes .

Si oui, contracter, $\ell \leftarrow \ell+1$,

ajouter n_q à E^ℓ si $\bar{m} > 2$,

aller à l'étape 3.

Si non, aller à l'étape 3.

Etape 5 (Sortie des résultats).

Imprimer ℓ, l'assignation a et les d_m (si désiré).

4. LE PROBLEME A DEUX REGIONS

Revenons à la configuration donnée à la Figure 1. Le problème à deux régions est de trouver une assignation (linéaire) de fréquences paires dans la région C et une assignation (linéaire) de fréquences impaires dans la région B vérifiant toutes les contraintes (2.2), (2.3) et (2.4).

Nous allons proposer une façon d'aborder ce problème en utilisant, au départ, des assignations linéaires, qui peuvent être modifiées, au besoin, par étirement du spectre.

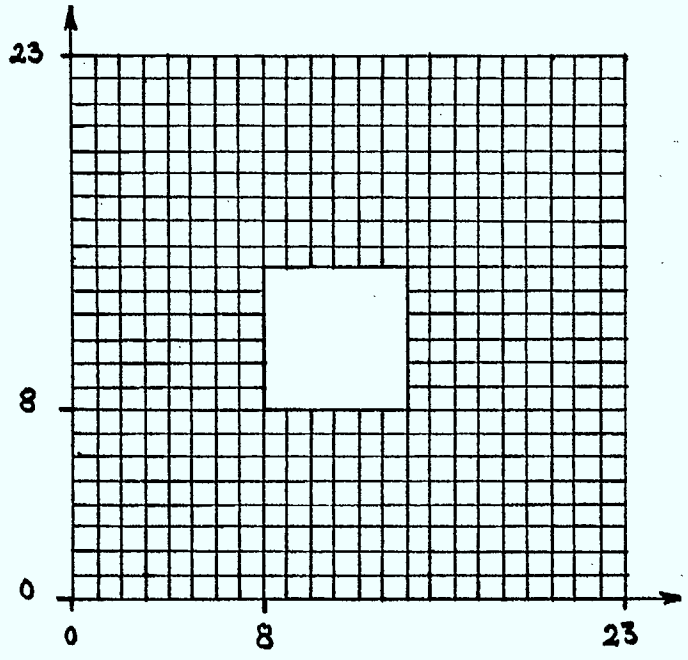
Il faut d'abord prendre une assignation de fréquences impaires dans la zone B. Nous décrivons deux façons de faire cette assignation.

(i) Prenons une 2-assignation linéaire (translatée au besoin) sur le grand carré de la Figure 1. On assigne ainsi les $23^2 = 529$ fréquences $1,3,\ldots,1057$. Il faut évidemment supprimer les $6^2 = 36$ fréquences assignées dans la région C. On assigne ainsi 493 fréquences impaires dans la région B (voir la Figure 5).

(ii) Prenons une 16-assignation sur un rectangle de dimensions 7×8. Déplaçons géographiquement ce rectangle par translation et rotation, tout en translatant en fréquence. On peut assigner ainsi $7\times8\times8 = 448$ fréquences dans la région B (voir la Figure 6).

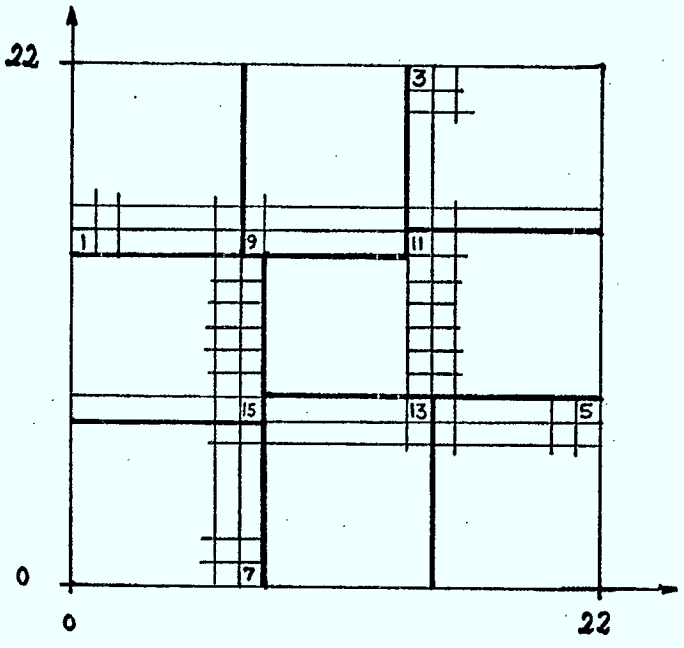
Prenons ensuite une assignation de fréquences paires dans la région C. On peut immédiatement (et cela est considéré plus loin) tenter de vérifier les contraintes (2.2), (2.3) et (2.4) en dilatant au besoin les dimensions de la ville. Ceci risque de nous donner une longueur A^* très grande et peu réaliste.

Bien que le problème du choix des meilleures assignations dans les régions B et C ne soit pas encore résolu, nous suggérons plutôt de supprimer quelques fréquences de la région C par étirement du spectre assigné dans cette région. Les fréquences à supprimer étant les fréquences adjacentes aux fréquences assignées dans la région B dans un voisinage de C (voir la Figure 7).



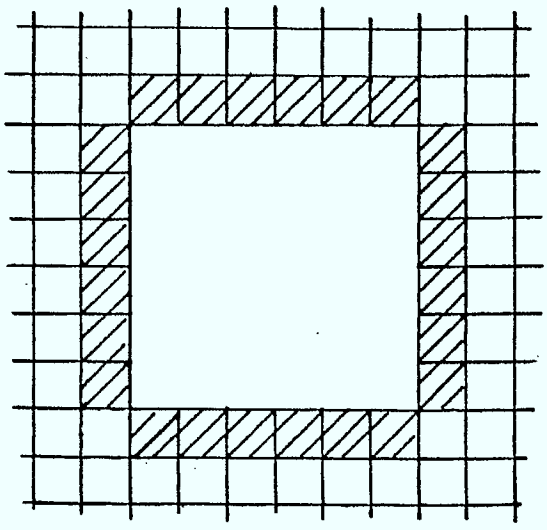
$$\frac{A_c}{A} = \frac{6}{23}$$

Figure 5. Assignation de 493 fréquences.

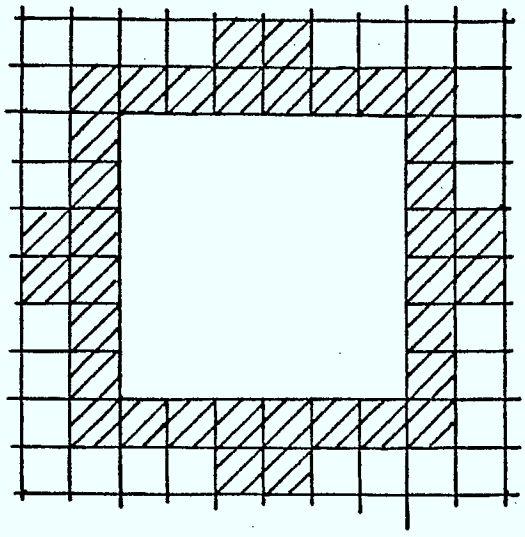


$$\frac{A_c}{A} = \frac{6}{22}$$

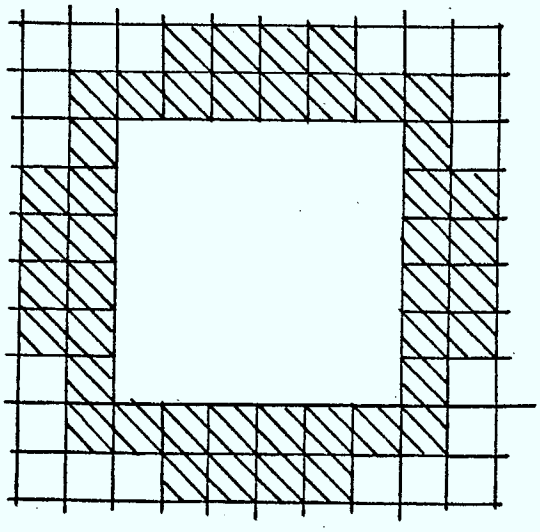
Figure 6. Assignation de 448 fréquences.



(a) Il y a au plus 48 fréquences adjacentes aux fréquences assignées dans les cases hachurées.



(b) Il y a au plus 72 fréquences adjacentes aux fréquences assignées dans les cases hachurées.



(c) Il y a au plus 82 fréquences adjacentes aux fréquences assignées dans les cases hachurées.

Figure 7. Carrés dans un voisinage de la région C.

Type de l'assignation en B	Nombre de fréquences						assignées au total	longueur du spectre (2)	% (3) d'assignation
	dans la région B			dans la région C					
	assignées	rejetées	$total_B$	assignées	rejetées	$total_C$			
i	493	$6^6=36$	$23^2=529$	$22^2=484$	48 (1)	532	977	1064	93.7
				$21^2=441$	72 (1)	513	934	1058	88.3
					88 (1)	529			
ii	448	0	448	$20^2=400$	48 (1)	448	848	896	94.4
				$19^2=361$	72 (1)	433	809	896	90.3
					88 (1)	449	809	898	90.1

Tableau 2

(1) Voir la figure 7

(2) Longueur du spectre = $2 \times \max\{total_B, total_C\}$.

(3) % d'assignation = $100 \times \frac{\text{nombre total de fréquences assignées}}{\text{longueur du spectre}}$

Le tableau 2 indique le type de performance escomptée lorsque nous supprimons quelques fréquences de la région C. Nous y avons défini la longueur du spectre comme étant le nombre de fréquences entre la première et la dernière fréquences assignées.

Décrivons finalement un algorithme qui, à partir de deux assignations dans les régions B et C, nous permettent de calculer la longueur minimale A* du côté de la ville nécessaire à la vérification des contraintes (2.2), (2.3) et (2.4).

Etape 1 (Assignation)

(i) Choisir une assignation dans la région B et calculer A_B^* et les d_{2m}^B correspondants.

(ii) Choisir une assignation dans la région C et calculer A_C^* et les d_{2m}^C correspondants.

Etape 2 (Ajustement des régions B et C)

On désire avoir $\frac{A_C^*}{A_B^*} = \frac{6}{23}$ (ou $\frac{6}{22}$ selon le cas).

Calculons $\tau = \frac{23}{6}\left(A_C^*/A_B^*\right)$.

Si $\tau > 1$ on doit dilater la région B d'un facteur τ, d'où

$$A_B^* \leftarrow \tau A_B^* \quad \text{et} \quad d_{2m}^B \leftarrow \tau d_{2m}^B.$$

Si $\tau < 1$ on doit dilater la région C d'un facteur $1/\tau$, d'où

$$A_C^* \leftarrow \frac{1}{\tau} A_C^* \quad \text{et} \quad d_{2m}^C \leftarrow \frac{1}{\tau} d_{2m}^C .$$

Etape 3 (Vérification globale des conditions (2.2), (2.3) et (2.4))

Toutes les conditions étant vérifiées dans les deux régions séparément, il ne reste plus qu'à vérifier la condition (2) pour m impair, la condition (3) et la condition (4) entre les deux régions (c'est-à-dire pour m=1 et 3).

Calculons d^V_{2m+1} pour tout $m \geq 0$ tel que

$$D^V_{2m+1} \geq \frac{1}{2}\left[\frac{A^*_B}{23} + \frac{A^*_C}{22}\right] = \begin{cases} \text{distance géographique minimale} \\ \text{entre deux fréquences dont une} \\ \text{est dans la région B et l'autre} \\ \text{est dans la région C (ajuster} \\ \text{les dénominateurs au besoin)} \end{cases}$$

$$\tau_0 = \max \{D^V_{2m+1}/d^V_{2m+1} \mid m \geq 0\}$$

$$\tau_2 = \alpha^V/d^V_1 .$$

· Vérification de (2.4) entre les deux régions.

Posons

$$d^V_2 = \min\{d^B_2, d^C_2\}$$

$$d^V_6 = \min\{d^B_6, d^C_6\}$$

$$\tau_m = \frac{\beta^V}{d^V_m{}^{2/3}\, d^V_{2m}{}^{1/3}\, m} \qquad m = 1,3.$$

· Prendre $\tau = \max\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$.

Si $\tau \leq 1$ ne rien faire

Si $\tau > 1$ dilater

$$A^*_B \leftarrow \tau A^*_B, \qquad d^B_{2m} \leftarrow \tau\, d^B_{2m}$$

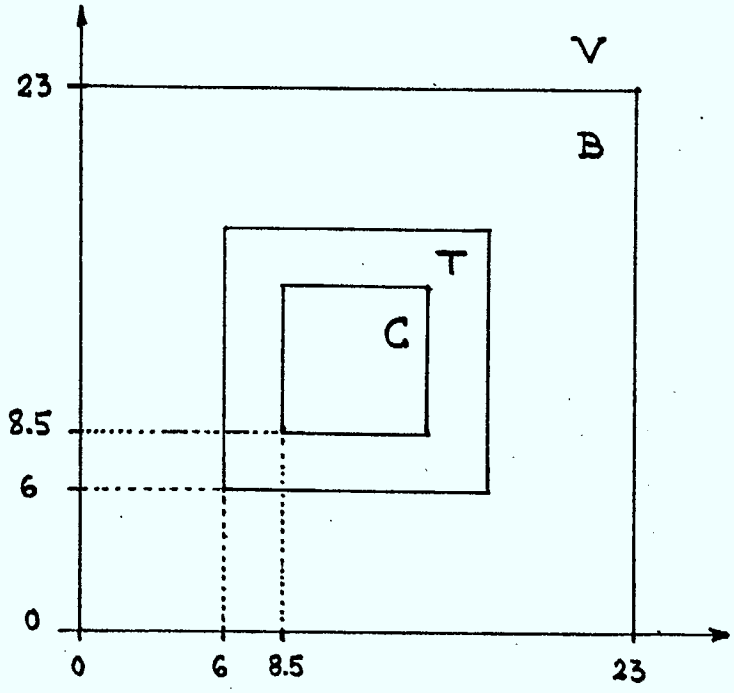
$$A^*_C \leftarrow \tau A^*_C, \qquad d^C_{2m} \leftarrow \tau\, d^C_{2m}$$

$$d^V_{2m+1} \leftarrow \tau\, d^V_{2m+1}, \qquad m \geq 0.$$

$A^* = A^*_B$.

5. LE PROBLEME A TROIS REGIONS

Modifions notre problème modèle du paragraphe 1 de manière à introduire une région T entre les régions B et C. On considère une ville carré V de A km de côté et un centre-ville de A_c km de côté. Nous introduisons une région T de A_T km de côté. Localisons les régions C et T à l'intérieur de la façon indiquée à la figure 8.



$$\frac{A_C}{A} = \frac{6}{23}$$

$$\frac{A_T}{A} = \frac{11}{23}$$

Figure 8. Ville modèle à trois régions.

On divise chaque côté de B en 23 parties égales et on forme ainsi $23^2 = 529$ carrés. On enlève évidemment ceux qui coincident avec la région T+C. Il en reste alors 529-121 = 408. Ensuite on divise chaque côté de C en 20 parties égales et on forme $20^2 = 400$ petits carrés dans la région C. Il reste à subdiviser la région T.

Une façon de subdiviser la région T, qui est suggérée essentiellement par le type d'assignation que nous allons y faire, est de diviser le côté extérieur de T de longueur A_T en 12 parties égales. On fait de même avec le côté intérieur de longueur A_C et on joint les points correspondants des subdivisions. Dans l'autre sens on divise en 4 parties égales. On forme ainsi $4\times12\times4 = 192$ petits quadrilatères (voir la figure 9).

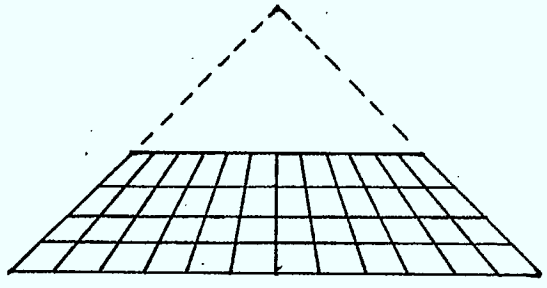


Figure 9. Subdivision de la région T.

Il y a donc en tout $400+408+192 = 1000$ petits quadrilatères auxquels on veut assigner 1000 fréquences. Pour y arriver on va assigner de la façon suivante:

fréquences paires et impaires (consécutives) dans la région T

fréquences paires dans la région C

fréquences impaires dans la région B.

Les assignations dans les régions B et C se font comme au paragraphe précédent (et sans étirement du spectre assigné dans C). Pour assigner les fréquences paires et impaires dans T, on considère une assignation linéaire sur un rectangle de dimensions $N_1\times N_2 = 4\times48$, que nous déformons de la manière indiquée à la figure 10. Remarquons que les assignations rectangulaires se prêtent bien à ce type de déformation car elles sont périodiques dans le sens de leur plus grande dimension.

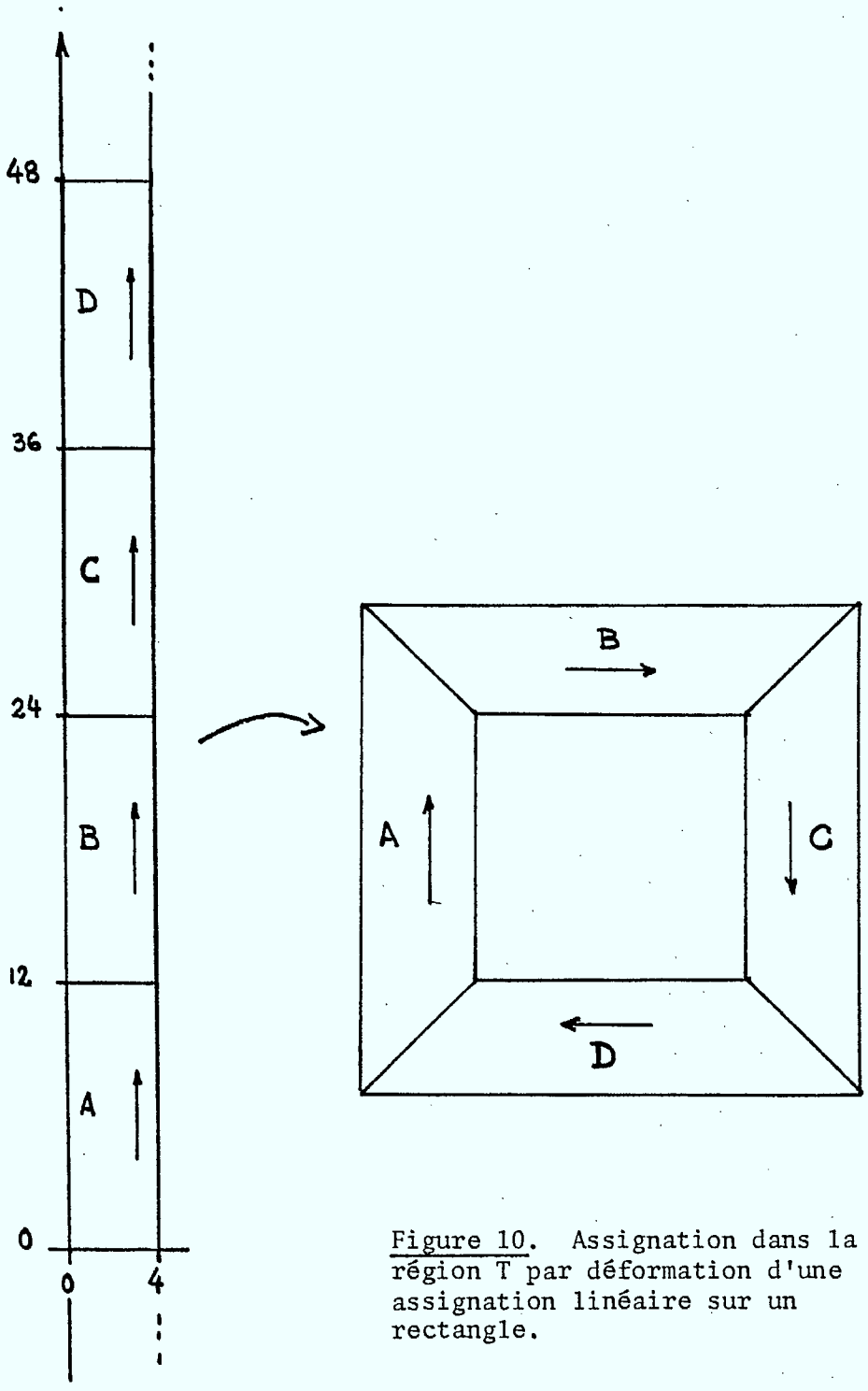


Figure 10. Assignation dans la région T par déformation d'une assignation linéaire sur un rectangle.

Une stratégie d'assignation qui nous semble intéressante est (i) assigner dans la région T les fréquences 0,1,2,...,4×48-1 = 191; (ii) ne pas assigner les fréquences 192,...,192+N pour un $N \geq 4$ (cela a pour effet de découpler la contrainte (4) entre la région T d'une part et les régions B et C d'autre part);
(iii) assigner alternativement dans les régions B et C les fréquences 192+N+1, 192+N+2,...

En raison du découplage mentionné en (ii), l'introduction d'une région T se réalise en ajoutant une étape 4 à l'algorithme décrit au paragraphe précédent.

Etape 4 (Addition de la région T)

Choisir une assignation dans la région T et calculer A_T^* et les d_m^T correspondants.

On désire avoir $\frac{A_T^*}{A_B^*} = \frac{11}{23}$

Calculons $\tau = \frac{23}{11}\frac{A_T^*}{A_B^*}$

Si $\tau > 1$ on doit dilater les régions B et C d'un facteur τ

Si $\tau < 1$ on doit dilater la région T d'un facteur $1/\tau$

Calculer les d_m^V pour $m \geq N+1$ et dilater la ville entièrement, au besoin, pour satisfaire les contraintes (2.2).

6. AUTRES CONFIGURATIONS

La déformation du rectangle en une "couronne carrée" décrite au paragraphe précédent, suggère, de façon naturelle, une déformation du rectangle en une couronne circulaire (ou elliptique). On pourrait également considérer notre ville modèle de forme circulaire (ou elliptique). Ainsi le problème des trois régions pourrait être posé suivant la Figure 11.

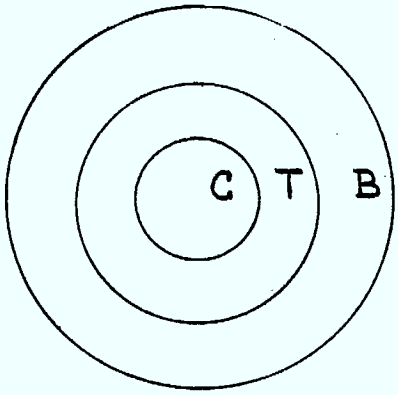


Figure 11. Ville modèle de forme circulaire.

Dans ce cas, les assignations dans les régions B et T ne causent pas de problème. Elles peuvent être toutes les deux obtenues par déformations d'assignations rectangulaires.

Par exemple prenons, pour la région T l'assignation rectangulaire 4×48 et pour la région B l'assignation rectangulaire 6×72. On assigne ainsi 4×48+6×72 = 192+432 = 624 fréquences dans la région B et T.

L'assignation dans la région C est un peu plus délicate. On considère le carré circonscrit au cercle représentant la région C. On divise chaque côté du carré en 21 parties égales et on trouve une assignation linéaire sur le carré assignant ainsi 441 fréquences. On ne

garde que les fréquences assignées dans le cercle C. Comme l'assignation est uniforme sur le carré, le pourcentage de fréquences conservées, c'est-à-dire celles assignées dans C, est donné approximativement par

$$\%\ \text{des fréquences conservées} = 100 \times \frac{\text{surface du cercle}}{\text{surface du carré circonscrit}} = 78.5\%$$

Comme on laisse de côté plusieurs fréquences, on pourrait utiliser ici la contraction du spectre de l'assignation dans la région C de façon à utiliser un plus fort pourcentage du spectre.

Ainsi dans l'exemple précédent on pourrait assigner, sans contraction,

$$624 + 441 \times \frac{78.5}{100} = 970 \quad \text{fréquences}$$

sur un spectre de longueur

$$2 \times 441 + 192 = 1074$$

pour un pourcentage global d'assignation de 90%.

7. VERS UN PROBLEME DE COMMIS-VOYAGEUR AVEC CONTRAINTES NON-LINEAIRES

Aux paragraphes précédents, nous avons envisagé de résoudre le problème d'assignation non-uniforme en assignant qu'une partie du spectre. Dans ce paragraphe, nous posons le problème de la maximisation du pourcentage du spectre et en donnons une formulation mathématique très proche de celle d'un problème de commis-voyageur. L'intérêt de cette formulation est essentiellement d'ordre théorique car on obtient un très gros problème de programmation mathématique non-linéaire.

Considérons N positions géographiques données (la position i a pour coordonnées $(x(i),y(i))$ auxquelles nous devons affecter N fréquences choisies parmi N+M fréquences. Le problème est de minimiser le nombre M de fréquences non-allouées.

Ajoutons M positions géographiques fictives et considérons une matrices des distances entre les positions géographiques définies par

$$(1)\qquad d_{ij} = \begin{cases} \text{distance géographique entre } i \text{ et } j & \text{si } 1 \le i,j \le N, \\ \beta & \text{si } \begin{cases} 1 \le i \le N,\ N+1 \le j \le N+M, \\ \text{ou} \\ 1 \le j \le N,\ N+1 \le i \le N+M, \end{cases} \\ \lambda & \text{si } N+1 \le i,j \le N+M. \end{cases}$$

Nous cherchons une permutation π des entiers $1,2,\ldots,N+M$ indiquant la position géographique $\pi(i)$ de la fréquence i. Si $\pi(i) \in \{1,2,\ldots,N\}$ alors la fréquence i est réellement assignée à la position $\pi(i)$ et si $\pi(i) \in \{N+1,\ldots,N+M\}$ la fréquence i n'est pas assignée.

Pour résoudre ce problème, nous devons définir un critère de performance. Nous avons envisagé deux critères reliés aux types d'affectation désirée.

(i) Les coûts sont

$$c_{ij} = d_{ij}, \quad \text{si} \quad 1 \leq i,j \leq N+M$$

et on cherche

$$(2) \qquad \min_{\pi} \sum_{i=1}^{N+M-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} \quad \text{sous les contraintes (2.2),(2.3),(2.4).}$$

Ce critère cherche à minimiser globalement les distances entre fréquences successives. On espère de faire en sorte, avec ce critère, que lorsque deux fréquences i et i+1 sont réellement assignées, elles seront le plus près possible l'une de l'autre. On cherche donc à minimiser (globalement) le d_1.

(ii) Les coûts sont

$$c_{ij} = \begin{cases} -d_{ij} & \text{si} \quad 1 \leq i,j \leq N, \\ d_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on cherche

$$(3) \qquad \min_{\pi} \sum_{i=1}^{N+M-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} \quad \text{sous les contraintes (2.2),(2.3),(2.4).}$$

Ce critère cherche à maximiser globalement les distances entre fréquences successives. On cherche donc à maximiser (globalement) le d_1.

Les paramètres β et λ apparaissant en (1) ont des rôles bien précis à jouer. Par exemple β doit être (fortement) positifs de façon à défavoriser le plus possible les assignations de la forme

i est assignée à une position géographique réelle (fictive)

i+1 est assignée à une position géographique fictive (réelle)

D'autre part λ doit être (fortement) négatif de façon à favoriser l'assignation de fréquences successives, i et i+1, à des positions géographiques fictives. On favorise ainsi l'assignation d'une suite de fréquences successives à des positions géographiques fictives.

Finalement on va imposer $\pi(N+M) = N+M$ de façon à favoriser l'apparition d'une chaîne de fréquences successives assignées à des positions géographiques fictives se terminant par la fréquence N+M. Ceci est équivalent à diminuer M le plus possible.

8. CONCLUSION

Nous avons décrit différentes configurations qui semblent intéressantes pour la résolution du problème de l'assignation non uniforme. Pour chacune de ces configurations, nous avons proposé des algorithmes de réalisation. Au passage nous avons systématisé des façons de modifier des assignations linéaires.

Nous envisageons maintenant de tester ces différents algorithmes, de les améliorer au besoin, et de vérifier leur contribution à la résolution des problèmes de l'assignation non-uniforme des fréquences dans une région donnée.

CHAPITRE 4

DISTRIBUTION DES FREQUENCES DE RADIO A PARTIR D'UNE ASSIGNATION PARTIELLE

(I. Rosenberg)

§ 1. INTRODUCTION

Dans cette partie nous discutons d'un problème d'assignation de fréquences qui a été confié à M.Rosenberg par le chercheur principal M. Delfour le 11 janvier 1983.

La description se lit comme suit:

- Soit une ville de 100 km où il faut distribuer 1024 fréquences au centre de 1024 petits carrés de côté 100/32 km.
- On suppose qu'une partie (par exemple 20 à 80%) des fréquences sont déjà assignées et vérifient les conditions de non-interférence. Chaque antenne est placée au centre de chacun des petits carrés.
- Suggérer des méthodes concrètes pour assigner les fréquences restantes de façon à ce que les conditions de non interférence soient vérifiées.
- Si l'on ne peut assigner toutes les fréquences restantes, trouver une méthode concrète pour en assigner le maximum. Commenter sur la faisabilité des calculs. Discuter le temps calcul nécessaire si possible (une minute, une heure, un jour,...)

Conditions de non interférence pour les assignations

Soit $m \geq 1$ un entier et D_m les distances en km données par les identités suivantes:

$$(1)\quad D_m = \begin{cases} 10{,}980/m^{0{,}315}, & 1 \leq m \leq 13 \\ 343{,}57/m^{1{,}645}, & 14 \leq m \leq 21 \\ 476{,}8\ m^{0{,}225}/(50+m)^{1{,}425}, & 22 \leq m \leq 237566. \end{cases}$$

Si d_m est la distance géographique en km entre les positions de deux fréquences séparées par m canaux, alors on doit avoir

(2) $d_m \geq D_m, \quad \forall m, \quad 1 \leq m \leq 237566$

et

(3) $d_m^{2/3} d_{2m}^{1/3} \, m \geq 30{,}38, \quad 1 \leq m \leq 4.$

Les méthodes doivent être assez systématiques pour s'adapter à des changements dans les coefficients des D_m ainsi que des nombres 30,38 et 4 dans (3).

Les résultats que nous présentons ci-dessous reflètent d'abord le temps alloué à cette tâche. De plus, il faut voir qu'il s'agit d'un problème qui va dans la direction de la tâche essentielle des distributions de fréquences suivante. Dans une région métropolitaine, chaque année un certain pourcentage (disons 20 p.c.) des antennes devient disponible. Il faut les distribuer à un nombre maximal d'appliquants de façon que les conditions de non-interférence soient verifiées. Cette tâche est un peu simplifiée ici par les faits suivants :

1°. Nous n'avons que 1024 antennes (au lieu d'environ 5000).

2°. les bases des antennes sont situées chacune à un point de la grille (centres de petits carrés de côté 100/32 km)

3°. il n'y a pas de cocanalité (cette condition simplifie les considérations théoritiques mais donne des résultats inférieurs).

De plus, les conditions de non-interférence ci-dessus sont nouvelles et donc nous ont obligés à faire une analyse approfondie sans laquelle nous ne pouvions procéder plus avant.

Il faut souligner qu'il s'agit d'un problème très complexe et difficile qui va directement au coeur du problème. Comme le point de départ est une assignation partielle correcte mais arbitraire (donc hors de contrôle, non modifiable et possiblement, très méchante ou chaotique) il est évident que les methodes de solution sont celles de la programmation discrète et combinatoire (par contre, un carré vierge étant beaucoup plus simple peut être résolu par des méthodes adhoc).

Les résultats presentés ci-dessus doivent être considérés dans le cadre :

1°. de ressources très limitées (temps alloué pour la recherche)

2°. la nouveauté du sujet (il n'y a aucune recherche dans cette

direction et les conditions s'interférence sont tout-à-fait nouvelles)

3°. les difficultés inhérentes.

Nous procédons comme suit. D'abord nous changeons l'échelle (pour obtenir une grille unitaire). En § 2 nous examinons les conditions de désensibilisation. Dans § 3 nous discutons de l'intermodulation dans le contexte d'une assignation partielle. En particulier nous determinons le lieu géométrique des points X du plan à qui nous ne pouvons attribuer la fréquence i+2m si les fréquences i et i+m ont été assignées à P_i et P_{i+m}. Ce problème, qui inclut une famille biparamétrique des courbes de $6^{ème}$ degré, est essentiel pour la suite et pour la compréhension et la comparaison des conditions d'intermodulation. En § 4, nous présentons d'abord une famille d'heuristiques simples. Repétées plusieurs fois, ces heuristiques peuvent mener à une assignation raisonnable et donner des échantillons d'extensions de l'assignation donnée qui pourraient bien se prêter à des études statistiques. Ensuite nous modifions cette heuristique pour obtenir un algorithme du type "backtracking". Pour avoir des bornes nous présentons le problème comme un problème 0 - 1 linéaire (de type couplage). Finalement en § 5 nous présentons un exemple d'assignation partielle remplie à 50 p.c. qui est correcte en soi mais n'admet aucune extension (c'est-à-dire, qu'on ne peut ajouter aucune des 50 p.c. de fréquences libres sans violer l'intermodulation). Il ne faut interpréter cet exemple "méchant", d'une façon trop pessimiste. En effet, étant donné le caractère assez local, il paraît qu'un problème "normal" doit se résoudre assez bien. La discussion est faite d'une façon assez générale pour permettre un changement des coefficient D_m et C_m et on n'utilise les valeurs données qu'en 3,14 - 3,18 où il fallait descendre à un niveau concret.

§ 2. LA DESENSIBILISATION

2.1. Preformulons la situation. D'abord il serait convenable de changer l'échelle de façon que les centres des petits carrés deviennent les points de la grille unitaire. La nouvelle unité de distance mesure donc 100/32 km = 3,125 km. Les antennes de base sont alors situées à des points du plan euclidien aux coordonnées (x,y) avec x, y $\in$ {0, 1, ..., 31}. Danc cette échelle les constantes D_m pour la désensibilisation sont :

$$D_m := \begin{cases} 3{,}5136m^{-0{,}315} & 1 \leqslant m \leqslant 13 \\ 109{,}9424m^{-1{,}645} & 14 \leqslant m \leqslant 21 \\ 152{,}576m^{0{,}225}(50+m)^{-1{,}425} & 22 \leqslant m \end{cases} \qquad (2.1)$$

La constante pour l'intermodulation est 30,38/3,125 = 9,7216.

2.2. Regardons les valeurs de D_m. Par les première et deuxième formules de (2.1) les valeurs de D_m (m = 1, ..., 18) sont

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_m	3,15	2,85	2,48	2,27	2,11	2,00	1,90	1,82	1,75	1,70

m	11	12	13	14	15	16	17	18
D_m	1,65	1,60	1,57	1,43	1,27	1,15	1,04	0,95

TABLEAU 1.

Nous n'avons pas cherché les valeurs de D_m pour $18 < m \leqslant 21$ parce que pour $D_{18} < 1$ la fonction D_x est monotone décroissante pour $x > 0$, et les distances entre les points de la grille sont toujours au moins 1. La fonction qui donne D_m pour $m \geqslant 22$ possède la derivée

$$152{,}576m^{-0{,}775}(50+m)^{-2{,}425}(1{,}125-1{,}2m)$$

où la dernière paranthèse est négative pour $m \geqslant 1$ ce qui rend la troisième fonction monotone décroissante pour $m \geqslant 22$.

Comme la valeur

$$D_{22} = 152{,}576 \times 22^{0{,}225} \times 72^{-1{,}425} = 0{,}6899726 < 1$$

il s'ensuit que pour les points de la grille il n'y a que les valeurs $D_1,\ldots,D_{17}$ qui peuvent intervenir.

2.3. Regardons la désensibilisation de plus près. Les distances des points (x,y) avec $x, y \in \{0,1,2,3\}$ à l'origine $(0,0)$ sont marquées sur la Fig. 2.1 près du point (x,y) (e.g. le point $(1,1)$ porte 1,41 comme distance de $(1,1)$ à $(0,0)$ $(\sqrt{2})$. Supposons que la fréquence f_1 ait été assignée au point $P_{f_1} = (a,b)$ de la grille, et la fréquence f_2 au point $P_{f_2} = (a+x,b+y)$ où $x, y \in \{0,1,2,3\}$. De la condition de désensibilisation et de la Fig. 2.1, il découle que $z := |f_1 - f_2|$ doit excéder les valeurs indiquées sur la Fig. 2.2. En particulier, si $P_f = (a,b)$, alors aucun des 36 points de la grille inscrits dans l'octogone ne peut avoir ni la fréquence f-1 ni la fréquence f+1. Par exemple, si $P_{f_1} = (a,b)$ et $P_{f_2} = (a,b+3)$, alors la condition de désensibilisation impose $|f_1 - f_2| > 1$ (parce que la distance des points est 3 qui, étant plus petite que $D_1 = 3{,}51$, n'est pas suffisament grande pour permettre $f_2 = f_1 - 1$ ou $f_2 = f_1 + 1$). De même, si $P_{f_1} = (a,b)$ et $P_{f_2} = (a+1,b+2)$ on a $|f_1 - f_2| > 4$ (parce que la distance $\sqrt{(1^2 + 2^2)} = \sqrt{5} = 2{,}23$, tandis que $D_4 = 2{,}27 > 2{,}23 > D_5 = 2{,}11$). Il s'ensuit que la Fig. 2.2 contient toute l'information pour la désensibilisation sur la grille. De la même façon, si $P_f = (a,b)$, alors les six points

$$P_{f-3},\ P_{f-2},\ P_{f-1},\ P_{f+1},\ P_{f+2},\ P_{f+3}$$

sont à l'extérieur du carré centré à (a,b) et de côté egal à 4, (Fg.2.4)

Le même raisonnement montre :

1°. que les huit points P_{f-4}, ..., P_{f-1}. P_{f+1}, ..., P_{f+4} se trouvent à l'extérieur de l'octogone de la Fig. 2.5.

2°. les douze points P_{f-6}, ..., P_{f+6} sont à l'extérieur du carré de la Fig. 2.6

3°. Les vingt-huit points P_{f-14}, ..., P_{f+14} sont à l'extérieur du carré de la Fig. 2.7, et finalement

4°. les trente-quatre points P_{f-17}, ..., P_{f+17} sont à l'extérieur du petit carré sur la Fig. 2.8.

On voit que la désensibilisation donne des conditions qui se décrivent d'une façon relativement simple.

§ 3. INTERMODULATION

3.1. Dans cette section nous analysons les conditions d'intermodulation. Soit P_i le point de la grille auquel on associe la fréquence i ($0 \leqslant i \leqslant 1023$). La condition d'intermodulation se transforme en

$$\overline{P_i\ P_{i+2m}}\ \min(\overline{P_i\ P_{i+m}}^2,\ \overline{P_{i+m}\ P_{i+2m}}^2) \geqslant C_m \qquad (3.1)$$

où $\overline{AB}$ dénote la distance (euclidienne) de A à B, min(a,b) est la plus petite des valeurs réelles a et b et $C_m = 918{,}784 m^{-3}$ (où $918{,}784 = 9{,}7216^3$). Nous traitons d'abord (3.1) pour le cas où C_m est une constante générale ce qui permet de résumer les quatre cas m = 1, ..., 4 d'un seul coup et en plus permet de remplacer la constante 918,784 par e.g. 348,9136 ou 2258.4 (ce qui correspond à la substtution de 22 et 41 au lieu de 30,38 dans la condition originale et donc satisfait la stipulation de généralité requise par le chercheur principal).

3.2. Au début nous avons une assignation partielle donnée. Supposons qu'elle consiste en un sous-ensemble $F = \{f_1, \ldots, f_\varphi\}$ de $\{0,1,\ldots,1023\}$

(où $f_1 < \ldots < f_\phi$) et en des points $P_{f_1}, \ldots, P_{f_\phi}$ de la grille. Nous allons voir plus tard que le cas le plus important pour la satisfaction de (3.1) est celui où exactement deux de i, i+m, i+2m appartiennent à F. Pour être plus précis supposons que $i \in F$ et $i+2m \in F$ tandis que $i+m \in L := \{0,1,\ldots,1023\} \setminus F$. Si on pose $A := P_i$, $B := P_{i+2m}$ et $\gamma := \overline{AB}$ on définit alors R^C_{AB} comme l'ensemble des points X de la grille Γ ($:= \{(a,b) : a,b \in \{0,1,\ldots,315\}\}$) tels que

$$\gamma \min(\overline{AX}^2, \overline{XB}^2) < C, \qquad (3.2)$$

i.e. R^C_{AB} consiste en les points de la grille Γ où on ne peut assigner P_{i+m}. La forme de R^C_{AB} se dégage immédiatement. En effet, R^C_{AB} est l'union de deux disques C^r_A et C^r_B centrés à A et à B et de rayon

$$r := C^{0.5}\ \gamma^{-0.5} \qquad (3.3)$$

Donc R^C_{AB} est de même type que le domaine $S^{D_m}_{AB}$ exclu par désensibilisation. (Celui-ci consiste en des points $X \in \Gamma$ contenus dans le disque $C^{D_m}_A$ centré à A, de rayon D_m ou dans le disque $C^{D_m}_B$ centré à B de rayon D_m.
Si $r \leq D_m$ évidemment R^C_{AB} est entièrement couvert par $S^{D_m}_{AB}$ et donc l'intermodulation ne joue aucun rôle. Par contre, si $r > D_m$ l'intermodulation supprime la désensibilisation.

Il est à observer que l'assignation partielle étant correcte, nous avons $\gamma = \overline{AB} \geqslant D_{2m}$.

3.3. Pour $C_m = 918{,}784 m^{-3}$ (m = 1, 2, 3, 4) et D_i donnés dans le Tableau 1 nous obtenons les valeurs suivantes pour r (à une decimale près; nous ne donnons que les valeurs $\geqslant D_m$ et de plus, nous commençons par $\gamma = D_{2m}$) :

r \ γ	1,82	2,00	2,27
m=1	-	-	-
m=2	-	-	7,1
m=3	-	4,1	3,9
m=4	2,8	2,7	2,5

r \ γ	2,79	2,82	3,00	4,00	5,50	7,00	10,0	14,4	20,0	25,0	50,0	74,
m=1	-	18,1	17,5	15,6	12,9	11,5	9,5	0,0	6,7	6,0	4,2	3,-
m=2	6,4	6,4	6,2	5,3	4,6	4,1	3,4	-	-	-	-	-
m=3	3,5	3,5	3,3	2,9	-	-	-	-	-	-	-	-
m=4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

TABLEAU 2.

Ici la désensibilisation prend le dessus pour $\gamma = C_m D_m^{-2}$ donc pour les valeurs:

m	1	2	3	4
γ	74,576	14,442	5,532	2,786

TABLEAU 3.

3.4. La situation est beaucoup plus compliquée pour i, $i+m \in F$ et $i+2m \in L$, i.e. si P_i, P_{i+m} font partie de l'assignation partielle tandis que P_{i+2m} n'en fait pas partie.

Nous allons chercher le lieu géométrique des points X où on ne peut assigner P_{i+2m}. Pour A: = P_i, B: = P_{i+m}, δ: = $\overline{AB}$ et C = C_m ce lieu est l'ensemble

$$Q_{AB}^{C} := \{X \in R^2 : \overline{AX} \min(\delta^2, BX^2) < C\}. \qquad (3.4)$$

Il sera commode de poser z : = $\overline{BX}$ et t : = $\overline{AX}$. Il est évident que Q_{AB}^{C} etant défini par les distances, sa forme est invariante par rapport à des transformations euclidiennes (rigides) du plan, c'est-à-dire ne change pas par rapport à des translations et des rotations. Sans perte de généralité nous pouvons donc supposer que B est l'origine 0 : = (0,0) et que A : = (0, $-\delta$). La désensibilisation nous fournit deux lieux où X (=P_{i+2m}) ne peut être situé. Ce sont les deux disques $C_0^{D_m}$ et $C_A^{D_{2m}}$ de centres 0 et A et de rayon D_m et D_{2m}. Comme l'assignation partielle est correcte nous avons

$$\delta := \overline{AB} = \overline{P_i P_{i+m}} \geq D_m \geq D_{2m}.$$

Commençons par le lemme suivant.

Soit C_b^α le disque $\{X \in R^2 : \overline{XB} < \alpha\}$ de centre $B \in R^2$ et de rayon $\alpha > 0$.

Pour C fixe soit $r_\delta := C\delta^{-2}$.

3.5. LEMME. *Nous avons* $C_A^{r_\delta} \subseteq Q_{AO}^C$.

Démonstration. Soit $r := r_\delta$ et $X \in C_A^r$, i.e. $t := \overline{AX} < r$. Si nous posons $z := \overline{OX}$ nous avons

$$t \min(\delta^2, z^2) \leq t\delta^2 < r\delta^2 = C$$

donc $X \in Q_{AO}^C$. ***

Pour δ petit le lieu Q_{AO}^C est bien simple.

3.6. LEMME. *Soit* $\lambda := \sqrt[3]{\frac{1}{2}C} \doteq 0{,}793701\ \sqrt[3]{C}$. *Alors pour* $\delta \leq \lambda$ *le lieu* Q_{AO}^C *est l'intérieur du disque* $C_A^{r_\delta}$ *de centre* A *et de rayon* $r := C\delta^{-2}$.

Démonstration. Par le lemme 3.5., il suffit de démontrer que $Q_{AO}^C \subseteq C_A^{r_\delta}$. Soit $X \in Q_{AO}^C$. Si $z := \overline{OX} \geq \delta$, alors

$$t \min(\delta^2, z^2) = t\delta^2 < C$$

montre que $t < r$ et $X \in C_A^{r_\delta}$. Par contre, si $z < \delta$ alors $X \in C_A^r$ parce que le disque entier C_O^δ (centr. à O et de rayon δ) est contenu dans C_A^r (à cause de $2\delta \leq r = C\delta^{-2}$; Fig. 3.2). ***

3.7. D'après le lemme 3.6. il nous reste à déterminer la forme de Q_{AO}^C pour $\delta \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}C}$, $\delta \geq D_m$. Notons d'abord que pour $z := \overline{OX}$ et $t := \overline{AX}$ la condition $zt^2 < C$ (qui apparaît en (3.3) pour $z < \delta$) est le lieu géométrique des points determinés par la courbe $tz^2 = C$ de $6^{\text{ème}}$ degré en x et y. En effet, pour $X = (x,y)$ nous avons $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + (\delta+y)^2 = t^2$ (Fig. 3.3) d'où

$$(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + (\delta + y)^2} = C. \qquad (3.5)$$

Les points (0,y) de cette courbe qui se trouvent sur l'axe vertical (x = 0) sont les solutions réelles de l'équation

$$y^2|\delta + y| = C \qquad (3.6)$$

Considérons d'abord le cas $\delta+y \geq 0$. Alors nous avons l'équation cubique

$$y^2(\delta + y) = C \qquad (3.7)$$

qui a toujours une solution réelle $a_\delta \geq 0$. Les deux autres solutions sont soit complexes nonréelles soit réelles négatives $-b_\delta$ et $-b^*_\delta$ où $b_\delta \leq b^*_\delta$ (Fig. 3.3). Soit $\tilde{Q}^C_{AO}$ l'ensemble $\{(x,y) \in R^2 : (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + (\delta + y)^2} < C\}$. Cet ensemble sera convexe (i.e. borné par une seule courbe ce qui veut dire dans notre cas que pour $X, Y \in \tilde{Q}^C_{AO}$ tout segment $[X,Y] \subseteq \tilde{Q}^C_{AO}$ voir Fig. 3.3(a)) si (3.6) n'a pas de solutions négatives et consistera en deux domaines connexes réparés autrement (Fig. 3.3(b)). Nous avons :

3.8. LEMME. *Soit* $\beta := 3\sqrt[3]{c/4} \doteq 1{,}8898828\sqrt[3]{c}$. *La courbe* (3.5) *est non connexe si et seulement si* $\delta \geq \beta$. *Si* $\delta \geq \beta$

$$b_\delta \leq \frac{2}{3}\delta \leq b^*_\delta \leq \delta - \frac{c}{\delta^2} \qquad (3.8)$$

Démonstration. Considérons le graphe de $f(x) = x^3 + \delta x^2 - C$. Ses dérivées sont $f'(x) = 3x^2 + 2\delta x$ et $f''(x) = 6x + 2\delta$. La fonction $f'(x)$ s'annule pour les valeurs $x = 0$ et $x = -2\delta/3$. Comme $f''(0) = 2\delta > 0$ et $f''(-2\delta/3) = -2\delta < 0$, la fonction $f(x)$ a un minimum local à $x = 0$ et un maximum local à $x = -2\delta/3$. La valeur $f(0) = -C$ et la valeur $f(-2\delta/3) = \frac{4\delta^2}{9}(-\frac{2\delta}{3} + \delta) - C = \frac{4\delta^3}{27} - C$. Donc $f(-\frac{2}{3}\delta) = 0$ pour $\delta = \beta$. Il est facile de voir que pour $\delta > \beta$ l'équation (3.6) a deux solutions négatives $-b_\delta$ et $-b^*_\delta$ telles que $b_\delta \leq \frac{2}{3}\delta \leq b^*_\delta$ tandis que pour $\delta < \beta$ il n'y a pas de solution. La dernière inégalité de (3.8) découle du fait que pour $y = \delta - \frac{c}{\delta^2}$ on a $f(y) < 0$). ***

3.9. On peut poser la question sur le point $(0,-w)$ de la courbe (3.5) tel que $w > b^*_\delta$. Nous montrons que ce point est sans intérêt parce qu'il appartient à $C_A^{r_\delta}$ et $C_A^{r_\delta} \subsetneq Q^C_{AO}$ d'après le lemme 3.5. Pour satisfaire à (3.6)

nous avons $w \geq \delta$ et (3.6) devient $w^2(w - \delta) = C$. Alors pour $w_1 = \delta + r_\delta = \delta + C\delta^{-2}$ nous avons

$$w_1^2(w_1 - \delta) = (\delta + r_\delta)^2 r_\delta = (\delta + C\delta^{-2})^2 C\delta^{-2} \geq C$$

parce que $\delta + C\delta^{-2} > \delta$. Donc la solution w_o de $w^2(w - \delta) = C$ satisfait $\delta \leq w_o \leq \delta + r_\delta$ et par conséquent la partie inférieure de $\tilde{Q}^C_{AO}$ est sans intérêt (étant recouverte par le disque $C_A^{r_\delta}$).

3.10. Notons que $\tilde{Q}^C_{AO}$ et Q^C_{AO} sont symétriques par rapport à l'axe y. On peut se poser la question sur les points de la courbe (3.4) sur l'axe x (avec y = 0). Ces points (x,0) sont les solutions réelles de

$$(\delta^2 + x^2)x^4 = C^2$$

En posant $x^2 = v$ on doit trouver la solution d_δ positive ou nulle de

$$v^2(\delta^2 + v) = C^2 \qquad (3.9)$$

qui est de même type que (3.6) (sauf que δ et C sont remplacés par leurs carrées).

3.11. Nous avons introduit les paramètres a_δ, b_δ, b^*_δ et d_δ (pour la description de Q^C_{AO}). Il n'est pas difficile de voir que

$$\sqrt{\delta^2 + d^2} - \delta \leq a_\delta \leq d_\delta \qquad (3.10)$$

$$\delta \geq \beta \Longrightarrow d_\delta \leq b_\delta \qquad (3.11)$$

En effet, considérons le cercle autour de O de rayon d_δ et sa moitié qui se trouve au-dessus de l'axe x (Fig. 3.4) Pour un point X de cet arc nous avons

$$\overline{AX}\ \overline{OX}^2 = \overline{AX}\ d_\delta^2 \geq \sqrt{\delta^2 + d_\delta^2}\ d_\delta^2 = C$$

ce qui montre que cet arc est hors du Q^C_{AO} i,e, $a_\delta \leq d_\delta$. Le même raisonnement montre la première partie de (3.10) et (3.11).

3.12. Jusqu'à présent nous n'avons pas utilisé la désensibilisation. Comme $A = P_i$, $O = P_{i+m}$ et $X = P_{i+2m}$ nous avons les conditions

$$z := \overline{OX} \geq D_m \quad \text{et} \quad t := \overline{AX} \geq D_{2m}.$$

Nous pouvons nous demander pour quelles valeurs de δ les conditions de

désensibilisation prennent le dessus. Supposons que $\delta \geq \beta$ et que la partie supérieure de $\tilde{Q}^{C}_{AO}$ soit couverte par le disque $C_O^{D_m}$. D'après 3.11 ça signifie que $b_\delta \leq D_m$. La valeur e de δ pour laquelle $b_\delta = D_m$ est determinée par

$$D_m^2(e - D_m) = C$$

(voir (3.7)) et par conséquent

$$e: = CD_m^{-2} + D_m. \qquad (3.11)$$

De façon tout-à-fait analogue nous pouvons nous demander quel est le seuil f de δ tel que pour $\delta \geq f$ la partie inférieure de $\tilde{Q}^{C}_{AO}$ est recouverte par le disque $C_A^{D_{2m}}$. Pour la valeur f de δ nous avons $b'_f = f - D_{2m}$ c'est-à-dire, d'après (3.7), nous avons $(f - D_{2m})^2 D_{2m} = C$. La solution est

$$f: = D_{2m} + c^{1/2} D_{2m}^{-1/2} \qquad (3.12)$$

(en principe si $D_{2m} - C^{1/2}D_{2m}^{-1/2} \geq \beta = 3C^{1/3}\, 4^{-1/3}$ on pourrait aussi avoir la solution $f: = D_{2m} - C^{1/2}D_{2m}^{-1/2}$, mais pour nos paramètres ce cas ne se présente pas). Il s'ensuit que pour $\delta \geq \max(e, f)$ la condition d'intermodulation est entièrement supprimée par la désensibilisation.

3.13. Notons par A(x) et D(x) la valeur de δ telle que $a_\delta = x$ et $d_\delta = x$. Ces fonctions se calculent facilement de (3.7) et (3.8) :

$$A(x) = Cx^{-2} - x, \quad D(x) = \sqrt{C^2x^{-4} - x^2} \quad (\forall\, x \leq C^{1/3}) \qquad (3.13)$$

La fonction $B(x) = Cx^{-2} + x$ nous donne la valeur de δ telle que $b_\delta = x$ pour $x \leq \rho: = \sqrt[3]{2C}$ et $b^*_\delta = x$ pour $x \geq \rho$. Notons que la determination de $B^*(x) - x \leq D_{2m}$, c'est-à-dire si $Cx^{-2} \leq D_{2m}$ ce qui équivaut à $x \geq \sigma: = \sqrt{CD_{2m}^{-1}}$. $B^*(x)$ n'est pas intéressante si

3.14. La discution précédente portait sur la taille de Q^{C}_{AO} pour deux paramètres C et δ (combinés avec deux autres paramètres D_m et D_{2m}). Il est évident que cette généralité ne nous permet pas de dire plus et qu'il faut donc maintenant fixer $C = C_m$, D_m et D_{2m}.

Discutons de ces cas spéciaux pour $C_m = 918{,}784\ m^{-3}$ ($m = 1, \ldots, 4$) et les valeurs D_m données dans Tab. 1 (§2.2)

Commençons par le cas le plus riche $m = 1$.

3.15. Soit $C = 918{,}784$, $D_1 = 3{,}51$ et $D_2 = 2{,}82$. Alors la valeur λ de 3.6 est $\sqrt[3]{459{,}392} = 7{,}716$. Donc pour $3{,}51 \leq \delta \leq 7{,}71$ la région Q_{AO}^{918} n'est que le disque C_A^r où $r = r_\delta = 918{,}784\delta^{-2}$. Voilà quelques valeurs de r_δ (arrondies à une décimale)

δ	3,51	4	4,5	5	5,5	6	6.5	7	7,5
r_δ	74,6	57,4	45,4	36,7	30,4	25,5	21,7	18,7	16,3

TABLEAU 3

Par exemple, si $P_i = A$ et $P_{i+1} = O$ sont placés à une distance $\delta = 3{,}51$ alors P_{i+2} doit se trouver à la distance 74,6 de A. Comme la diagonale de notre grille ne mesure que $31\sqrt{2} = 43{,}84062$, il n'y a pas de place pour le point P_{i+2} et la frequence i+2 ne peut pas être attribuëe. Si P_i est situé dans un coin et P_{i+2} devrait être situé dans le coin opposé, la plus petite valeur de δ qui permette de le faire est la racine carré de 918,784/43,84062 qui égale à 4,5779217. Comme c'est un cas extreme, en termes pratiques, il est souhaitable d'avoir une valeur d'au moins six pour δ.

Les valeurs β, e, f, ρ et σ de 3.8 (3.10) et (3.11) et 3.13 sont

$$\beta = 3\sqrt[3]{918{,}784/4} = 18{,}37269$$

$$e = 918{,}784 \times 3{,}51^{-2} + 3{,}51 = 78{,}086$$

$$f = 2{,}82 + \sqrt{918{,}784/2{,}82} = 20{,}870$$

$$\rho = 12{,}2485 \qquad \sigma = 18{,}050205$$

donc à partie de $\delta = 18{,}3$ nous avons deux parties connexes de Q_{AO}^{918}, à partie de $\delta = 20{,}8$ la partie autour de A est recourte par le disque $C_A^{2,82}$ et à partie de $\delta = 78$ l'intermodulation est superimposée par la désensibilisation.

3.16. En ce qui regarde les valeurs a_δ, b_δ, b'_δ et d_δ nous les illustrons avec quelques cas spéciaux. Toutes les valeurs ont été trouvées par la méthode de Newton à l'aide d'une calculatrice de poche en quelques itérations.

δ	9,7216	18,05	20	40
a_δ	7,3386	6,1603	5,9502	4,541
d_δ	8,446	6,8991	6,6047	4,7757
b_δ	-	-	9,2410	5,1333
b'_δ	-	-	16,7092	-
r_δ	9,7216	2,8200	2,29696	0,57424

La valeur $\delta = 9{,}7216$ a été choisie de façon que $r_\delta = \delta$. La région Q_{AO}^{918} correspondante est sur la Fig. 3.5. La région Q_{AO}^{918} pour $\delta = 18{,}05$ est sur la Fig. 3.6. Finalement la situation pour $\delta = 40$ est sur la Fig. 3.7 (où la partie inférieure est supprimée par le disque $C_A^{2,82}$ provenant de la désensibilisation).

3.17. En utilisant les formules de 3.13 nous obtenons la table suivante pour A(x), D(x), B(x) et $B^*(x)$ (en tenant compte que $\sum c \leq 43{,}8$).

x	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
A(x)	40,87	31,75	24,87	19,52	15,24	11,75	8,83
D(x)		36,41	29,87	24,81	20,75	17,39	14,51
B(x)		41,75	35,87	31,52	28,24	25,75	23,83
$B^*(x)$	-	-	-	-	-	-	-

x	8	8,5	10	14,06	15	16	17	18
A(x)	-	-	-	-	-	-	-	-
D(x)	11,92	9,46	-	-	-	-	-	-

$B(x)$	22,35	21,22	19,18	18,705	-	-	-	-
$B^*(x)$	-	-	-	-	19,08	19,59	20,18	10,83

TABLEAU 4

Ceci nous permet de faire une figure composée des domaines Q_{AO}^{918} (schématiquement sur la Fig.3.7(a)).

3.17. Considérons m = 2. Alors C = 918,784/8 = 114,848, D_2 = 2,82 et D_4 = 2,27. Nous avons

λ = 3,85802, β = 9,18633, e = 17,261929, f = 9,3829341,

ρ = 6,12423, σ = 7,1129341

Donc pour $\delta \geq 17,26$ la dése sibilisation prend le dessus. Pour $2,82 \leq \delta \leq 3,85$ la région Q_{AO}^{114} est le disque $C_a^{r_\delta}$ où $r_\delta = 114,848\delta^{-2}$. Quelques valeurs de r_δ sont :

δ	2,82	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	3.85
r_δ	14,45	12,76	11,16	9,93	8,86	7,95	7,74

TABLEAU 5

Par la méthode de Newton nous avons établi les valeurs

$a_{6,7}$ = 3,376150 ; $a_{9,2}$ = 3,0605955

et les valeurs

$d_{9,2}$ = 3,9522778 , $b_{9,2}$ = 5,8940199,

$b'_{9,2}$ = 6,3665788

Les valeurs de A(x), D(x), B(x) et $B^*(x)$ sont :

x	2,27	2,5	2,82	3	3,5	4	4,5
A(x)	20,01	15,88	11,62	9,76	5,87		
D(x)	22,17	18,20	14,16	12,40	8,70	5,96	
B(x)	24,55	20,89	17,26	15,76	12,87	11,18	10,17
$B^*(x)$							

x	5	5,5	6	6,2	6,5	7,0
A(x)						
D(x)						
B(x)	9,59	9,30	9,19			
$B^*(x)$				9,19	9,22	9,34

TABLEAU 6

La situation est exposée schématiquement à la Fig. 3.8.

3.18. Considérons m = 3. Alors C = 918,784/27 = 34,029,

D_3 = 2,48 et D_6 = 2,00. Nous avons :

λ = 2,5720, β = 6,12423, e = 8,0128108, f = 6,1248636

ρ = 4,08282, σ = 4,1248636

Donc pour $2{,}48 \leqq \delta \leqq 2{,}57$ nous avons le disque $C_A^{r_\delta}$ où $r_\delta = 34{,}029\delta^{-2}$ et pour $\delta \geqq 8{,}01$ l'intermodulation est supprimée par la désensibilisation. Voilà un tableau de quelques valeurs de A(x), D(x), B(x) et $B^*(x)$.

x	2,48	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3	4	4,12
A(x)	3,0	–	–	–	–	–	–	–	–
D(x)	4,9	4,8	4,3	3,8	3,3	2,8	–	–	–
B(x)	8,0	7,9	7,6	7,4	7,1	6,9	6,8	6,1	
$B^*(x)$	–	–	–	–	–	–	–	–	6,12

TABLEAU 7

La situation est représentée à la Fig. 3.9.

3.19. Finalement soit m = 4. Alors :

$C = 918,784/64 = 14,356$, $D_4 = 2,27$, $D_8 = 1,82$

$\lambda = 1,92901$, $\beta = 4,59318$, $e = 5,0560093$, $f = 4,6285426$

$\rho = 3,06211$, $\sigma = 2,8085426$

Comme $\lambda < D_4$ nous n'avons pas le cas de $Q_{AO}^{14} \subseteq C_A^{r_\delta}$. Pour $\delta \geq 5,06$ l'intermodulation est supprimée par la désensibilisation. La séparation de $\tilde{Q}_{AO}^{14}$ en deux parties connexes se produit pour $\delta = 4,59$. Pour $\delta \geq 4,62$ la partie connexe autour de A est incluse dans $C_A^{1,92}$. Pour $\delta = 2,27$ la région consiste en l'union des disques $C_O^{2,27}$ et $C_A^{2,78}$ où $2,7860093 = 14,356/2,27^2$ (Fig. 3.10). Nous voyons que pour m = 4 la condition d'intermodulation intervient d'une façon presque négligeable.

§ 4. METHODES PROPOSEES

4.1. Après la discussion détaillée sur des implications directes d'une assignation partielle nous abordons le problème lui-même. Pour faciliter l'expression une fréquence qui figure (ne figure pas) sur l'assignation partielle est dite *fixe (libre)*. Les ensembles de fréquences fixes (libres) seront notés F et L (ainsi $F \cap L = \emptyset$ et $F \cup L = \{0, \ldots, 1023\}$).
Appelons un point de la grille Γ *fixe (libre)* s'il figure (ne figure pas) sur l'assignation partielle et notons Φ et Λ les ensembles de points fixes et libres. Par sa définition l'assignation partielle est une bijection τ de Φ sur F.

4.2. D'abord proposons une heuristique très simple. A chaque étape nous choisissons d'abord une fréquence libre ℓ. Ceci se fait par une certain règle (e.g. le plus petit élément de L, ou aléatoirement). Nous cherchons un point libre Q^o à qui nous attribuerons la fréquence ℓ. Soit Q un point arbitraire libre. Nous posons

$$I_Q := \{i : 1 \leq |i| \leq 17, \quad \ell + i \in F\}$$

$$d_i := \overline{QP_{\ell+i}} \qquad (i \in I_Q)$$

Le programme vérifie d'abord les inégalités

$$d_i \geq D_{|i|} \qquad (i \in I_Q)$$

$$d_{2i}d_i^2 \geq c_i, \quad d_{2i}\overline{P_{\ell+i}P_{\ell+2i}}^2 \geq c_i \quad (1 \leq |i| \leq 4, \ \ell+i, \ \ell+2i \in F) \qquad (4.1)$$

$$\overline{P_{\ell-i}P_{\ell+i}}d_i^2 \geq c_i, \quad \overline{P_{\ell-i}P_{\ell+i}}d_{-i}^2 \geq c_i \quad (1 \leq i \leq 4, \ \ell+i \in L) \qquad (4.2)$$

Si le point Q passe cet examen nous formons

$$\Pi(Q) = \sum \{i^{-3/2}d_i : 1 \leq i \leq 4, \quad \ell+i \in L\}$$

et attribuons ℓ au point Q^o qui passe l'examen et maximise le poids $\Pi(Q)$. Ce poids est motivé ainsi : Si Q est proche de $P_{\ell-1}$ et $\ell+1$ est une fréquence libre il sera peut être difficile même impossible, d'attribuer plus tard $\ell+i$ à un point de Λ. Donc si $\ell+1 \in L$ nous essayons de maximiser d_1. Le point qui maximise d_1 pourrait être trop près de $P_{\ell-2}$ ce qui pourrait créer des problèmes si $\ell+2 \in L$. Ceci nous amène à considérer aussi d_2. Comme la constante $c_2 = c_1 2^{-3}$ et l'inégalité est

$$RP_{\ell-2}d_2^2 \geq c_1 2^{-3}$$

nous avons choisi le poids $i^{-3/2}$ pour d_2. Ce choix est bien sûr ouvert à une discussion. Comme nous ne cherchons qu'une heuristique, ce critère simple semble assez raisonnable.

Si aucun point $Q \in \Lambda$ ne passe l'examen, la fréquence ℓ est enlevée de L.

Il est évident que cette heuristique va performer dans un temps très raisonnable. Pour obtenir une information sur le problème il suffit donc de répéter l'heuristique (avec des chois de ℓ aléatoire) un nombre suffisant de fois. de choisir la meilleure assignation parmi les resultats, si le nombre de calculs completés le permet, de faire une étude statistique sur le résultat.

4.3. A chaque f_i nous associons le sous-ensemble G_i de Γ_L de places disponibles pour f_i ($i = 0, \ldots, 1023$). D'abord à chaque point libre $Q \in \Lambda$ nous associons une liste X_Q de fréquences libres $\ell \in L$ qui ne sont pas admissibles à Q en vertu des conditions d'interference et de l'assignation partielle donnée. Cette liste sera bâtie pas-à-pas de la façon suivante :

1°. Pour $i = 1, \ldots, \lambda$ et $m = -4, \ldots, -1, 1, \ldots, 4$ tels que $\ell_i+m \in F$ et $\ell_i+2m \in F$, en utilisant les résultats du § 3 nous trouvons touts les points $Q \in \Lambda$ où on ne peut pas assigner ℓ_i. A chaque liste X_Q nous ajoutons ℓ_i

2°. Pour $i = 1, \ldots, \lambda$ et $m = 1, \ldots, 4$ tels que $\ell_i-m \in F$ et $\ell_i+m \in F$ nous trouvons tous les points $Q \in \Lambda$ auxquels on ne peut pas associer ℓ_i. En vertu des resultats precedents, ce sont des points de Λ qui se trouvent dans l'union de deux disques centrés l'un au point qui porte la fréquence ℓ_i-m et l'autre au point à qui l'assignation partielle a donné la fréquence ℓ_i+m.

3°. Pour $i = 1, \ldots, \lambda$ et $m = -17, \ldots, -5, 5, \ldots, 17$ tels que $\ell_i+m \in F$ nous trouvons tous les points $Q \in \Lambda$ auxquels on ne peut associer ℓ_i en vertu de la désensibilisation. Nous ajoutons ℓ_i à la liste X_Q.

Les listes X_Q se font d'une façon directe. L'algorithme pour le programme ne présente aucune difficulté conceptuelle. Le nombre de listes X_Q depend de λ (e.g. de 200 à 800 si l'assignation partielle a de 824 à 224 fréquences) Le nombre de fréquences sur une liste X_Q complète depend de l'assignation partielle . Remarquons que la programmation de cet algorithme est une tâche facile pour un programmeur de compétence moyenne. L'ensemble des listes X_Q occupera au plus λ^2 cellules de mémoire donc certainement moins que 10^6 cellules (en réalité beaucoup moins). Le temps d'ordinateur pour établir les listes ne pose pas non plus de problème sérieux ; en tout cas c'est une tâche faite une seule fois donc sans grande importance.

4.4. Il sera plus commode de remplacer les listes X_Q ($Q \in \Lambda$) des fréquences prohibiés à Q par la liste $Y_Q := L \setminus X_Q$ de fréquences permises. Ceci encore est une tâche mécanique qui donc ne presente pas de problème. Pour les fins d'exposition nous définissons le graphe biparti G = (V, E) suivant. L'ensemble V des sommets est $V := \Lambda \vee L$ et pour $Q \in \Lambda$ et $\ell \in L$ l'arête $Q\ell \in E$ si et seulement si $\ell \in Y_Q$. Donc pour $Q \in \Lambda$ l'ensemble Y_Q est le voisinage de Q en G. Pour $\ell \in L$ nous definissons le voisinage $Z_\ell := \{Q \in \Lambda : \ell \in Y_Q\}$ de ℓ dans Γ.

D'abord nous éliminons les sommets isolés de G. Nous enlevons chaque $Q \in A$ tel que $Y_Q = \emptyset$ et chaque $\ell \in L$ tel que $Z_\ell = \emptyset$. Ceci donne déjà une borne supérieure pour les nombres d'assignations (1024 - max (α, β) où α et β sont les nombres de sommets isolés de Λ et L).

4.5. Nous indiquons brièvement un procédé de type ennumérative ou arborescent. D'abord nous établissons un ordre $Q_1, \ldots, Q_\lambda$ de l'ensemble Λ des points libres par les degrés (nombre d'arètes du graphe par sommet) de façon que

$$|Y_{Q_1}| \leq |Y_{Q_2}| \leq \ldots \leq |Y_{Q_\lambda}|$$

1°. Si $|Y_{Q_1}| = 1$, $Y_{Q_1} = \{\ell\}$ nous assignons la fréquence libre ℓ au point Q_1 et de cette façon nous obtenons une nouvelle assignation partielle. Pour ne pas oublier que nous avons fait un choix nous attachons à Q_1 le numéro du choise (en notre au debut 1). Pour la nouvelle assignation partielle nous ajustons les listes Z_ℓ ($\ell \in L$). Après cela nous pouvons répéter la procedure (enlever les sommets isolés du graphe et faire le choix pour les sommets $Q \in L$ pendants , de degré 1).

2°. Si $|Z_\ell| = 1$, $Z_\ell = Q$ nous assignons la fréquence ℓ à Q, marquons ce choix par son ordinal (attaché à Q) et recommançons pour la nouvelle assignation.

3°. Prenons le point libre Q_1 de degré minimal (i.e. ayant Y_{Q_1} de la plus

petite taille). Pour chaque fréquence ℓ Q_1 nous formons le "poids"

$$\pi(\ell) := \sum\{|m|^{-3/2} \overline{P_{+m}Q_1} : 1 \leq |m| \leq 4, \ \ell+m \in F \text{ et } \ell-m \in L \text{ ou } \ell+2m \in L\}$$

Nous attribuons au point Q_1 l'élèment $\ell^o \in Y_{Q_1}$ qui maximise le poids $\pi(\ell)$. Ce choix est motivé par des considérations tout-à-fait analogues à celles de 4.2. Nous marquons le choix de ℓ^o en attachand le numéro du choix au point Q. En répétant ce procédé on arrive à la situation finale où $\Lambda = \emptyset$. On note l'assignation partielle obtenue et sa taille. Alors il faut commencer à faire "backtracking". Ceci veut dire qu'on revient à la dernière décision (réconnaissable par son numéral) et on essaie de chosir la fréquence du plus grand poids suivant. Si tout Y_Q a été épuise on essaie l'assignation qui ne donne aucune fréquence à Q. Si pendant ce processus on arrive à une situation où le nombre de points de Λ déjà abandonnés égale au nombre de points abandonnés de la meilleure assignation à date, bien sûr on abandonne la branche et on revient au point de branchement qui porte le plus grand index.

L'algorithme peut aussi servir d'heuristique. Soit qu'on se donne un temps de calcul préalable après quoi le meilleur résultat est pris comme final, soit qu'on arrête le calcul quand le meilleur resultat à date se stabilise, i.e. reste le même pendant un certain temps ou s'améliore relativement peu. Il est bien connu que les programmes du type "branche & bound" obtiennent souvent l'optimum dans un temps relativement court (5 10 p.c. du total) et dépassent le reste (90 -95 p.c.) à verifier et que c'est vraiment optimum. Notre problème est d'une complexité qui dépase la majorité des problèmes de ce type. D'autre part ce n'est pas un calcul qu'il faut faire très vite ou souvent. En utilisant des périodes creuses de grands ordinateurs on peut bien obtenir des résultats. En plus, l'optimalité n'est pas obligatoire et une distribution sous optimale de fréquences ne porte pas le stigma des pertes économiques évidentes à tout le monde.

4.5. Les méthodes "branch & bound" et de relaxation Lagrangienne utilisent la programmation linéaire pour obtenir des bornes (qui permettent d'abandonner une branche aussitôt qu'une borne supérieure est pire que la valeur associé à la meilleure solution à date). Sous cette optique nous développons un modèle linéaire 0 - 1 de notre problème. Il est bâti sur des couplages ("maching") de graphes bipartis. Comme point de départ nous avons le graphe biparti $G = (V, E)$ avec $V = \Lambda \cup L$ et $E \subseteq \Lambda \times L$. A chaque arête $e = [Q\ell] \in E$ associons la variable 0 - 1 (booléenne ou binaire $x_{Q\ell}$ qui prend la valeur 1 si e est choisi et 0 sinon.

Evidemment cet approche ne s'applique que si $|E|$ est petit (e.g. < 500).

Nous avons les contraintes de couplage

$$\sum \{x_{Q\ell} : Q\ell \in E\} = 1 \qquad \forall\, Q \in \Lambda \qquad (4.1)$$

$$\sum \{x_{Q\ell} : Q\ell \in E\} = 1 \qquad \forall\, \ell \in L \qquad (4.2)$$

Les autres conditions s'obtiennent de la façon suivante :

1°. Soit ℓ, $\ell+m \in L$, $\ell+2m \in F$ où $-4 \leq m \leq 4$ et soit $[Q\ell] \in E$.

2°. Soit $r = \sqrt{c_m / \overline{QP}_{\ell+2m}}$, $K := \{R \in Y_{\ell+m} : \overline{RQ} < r$ ou $\overline{RP}_{\ell+2m} < r\}$ et $k = |K|$.

Nous avons l'inégalité

$$\sum_{R \in K} x_{R,\ell+m} \leq k\,(1 - x_{Q\ell}) \qquad (4.3)$$

Similairement soit $-4 \leq m \leq 4$, ℓ, $\ell+m$, $\ell+2m \in L$, $Q' \in Y_\ell$, $Q'' \in Y_{\ell+2m}$ $r = \sqrt{c_m / \overline{Q'Q''}}$ $H := \{R \in Y_{\ell+m} : RQ' < r$ ou $RQ'' < r\}$ et $h = |H|$. Nous avons

$$\sum_{R \in H} x_{R,\ell+m} \leq 2h(1 - x_{Q'\ell} - x_{Q''\ell}) \qquad (4.4)$$

En effet, si $x_{Q\ell} = 0$ (l'arête $[Q\ell]$ n'est pas choisie) l'inégalité (4.3) est satisfaite automatiquement parce que la partie de gauche $\leq |K| = k$). Par contre, si $x_{Q\ell} = 1$, i.e. l'arête est choisie, alors $x_{R,\ell+m} = 0$ pour tout $R \in K$ ce qui est la condition d'intermodulation.

La démonstration du (4.4) est tout-à-fait similaire. Les conditions de désensibilisation s'expriment d'une façon tout-à-fait analogue.

En cours de la performance de l'algorithme quand le nombre d'arêtes du graphe devient raisonnable, on peut écrire les inégalités (par un programme) relaxer l'intégralité, trouver l'optimum continu ce qui donnent une borne supérieure. (Peut être ici il n'est pas tout-â-fait nécessaire d'obtenir toutes les inégalités). Il est à voir si le temps nécessaire pour établir le problème de la programmation linéaire (LP) et pour le résoudre est compétitif avec l'algorithme direct. Le nombre d'inégalités dépend de la structure du graphe et de Λ et L. Une fois les inégalités établies on peut les adapter pour les sous-problèmes. En général, il semble que cet approche offre peu d'espoir.

§ 5. EXEMPLE

5.1. Nous montrons maintenant un exemple simple d'une assignation partielle (à 50 p.c.) qui ne permet aucune extension. Pour x entier positif ou nul nous posons $x = 8x_2 + 4x_1 + x_o$ où $0 \leq x_o \leq 3$, $0 \leq x_1 \leq 1$ et $0 \leq x_2$ sont des entiers. De façon analogue pour y entier pair positif ou nul posons $y = 4y^{(1)} + 2y^{(0)}$ où $0 \leq y^{(0)} \leq 1$ et $0 \leq y^{(1)}$ sont des entiers.

Au point (x,y) avec $0 \leq x, y \leq 31$ entiers et tels que y est pair nous associons la fréquence

$$\phi_{xy} := 256x_2 + x_1 + 64x_o + y + 30y^{(0)} \qquad (5.1)$$

Donc pour x = 0 les fréquences aux points (0,y) (y = 0, 2, ..., 30) sont

0, 32, 4, 36, 8, 40, 12, 44, 16, 48, 20, 52, 24, 56, 28, 60

(e.g. en utilisant $12^{(0)} = 0$ et $14^{(0)} = 1$ nous avons

$$\phi_{0,12} = 12, \qquad \phi_{0,14} = 14 + 30 = 44$$

Pour x = 0, ..., 31 les valeurs de ϕ_{x0} (x = 0, 1, ..., 31) sont

0, 64, 128, 192, 1, 65, 129, 193, 256, 320, 384, 448, 257, 321, 385, 449, 512, 576, 640, 704, 513, 577, 641, 705, 768, 832, 896, 960, 769, 833, 897, 971

et par exemle $\phi_{10,12} = 256 + 64 + 12 = 332$.

Il est facile à voir que cette assignation partielle satisfait à des conditions de désensibilisation. Quand à l'intermodulation le seul cas $m = 4$ pourrait intervenir, parce que $L = \{0, 1, 4, 5, 8, 9, \ldots, 1020, 1021\}$. Pour le triple $P_o = (0,0)$. $P_4 = (0,4)$, $P_8 = (0,8)$ on a

$$\overline{P_oP_8} \min (\overline{P_oP_4}^{\,2}, \overline{P_4P_8}^{\,2}) = 8 \times 4^2 = 128 \geq 14{,}356$$

et la même chose se produit pour tous les autres triples. Pour chaque $i = 0, \ldots, 255$ $\delta = \overline{P_{4i}P_{4i+1}} = 4$ donc par Tableau 3,

$$\overline{P_{4i}P_{4i+2}} \geq 57{,}4 \qquad \overline{P_{4i-1}P_{4i+1}} \geq 57{,}4$$

ce qui montre que les deux fréquences 4i-1 et 4i+2 ne peuvent être assignées à aucun point de la grille, donc l'assignation partielle est inextensible.

Question. Y-a-t-il des assignations partielles inextensibles avec moins de 50% de points?

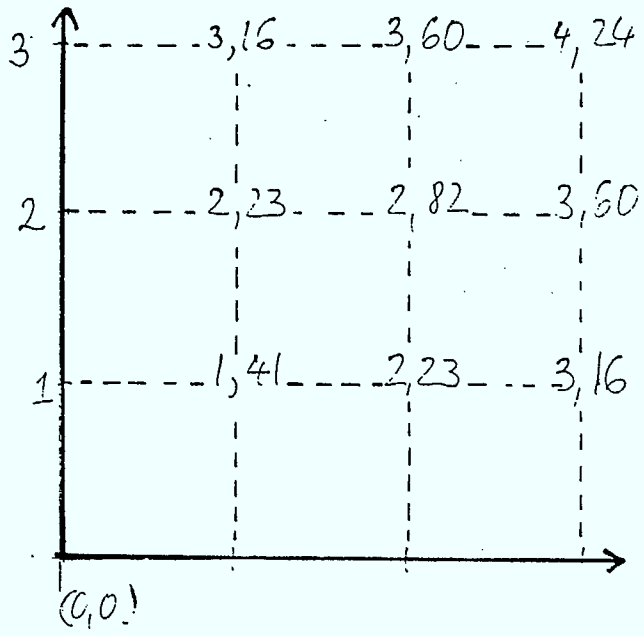


Fig. 2.1

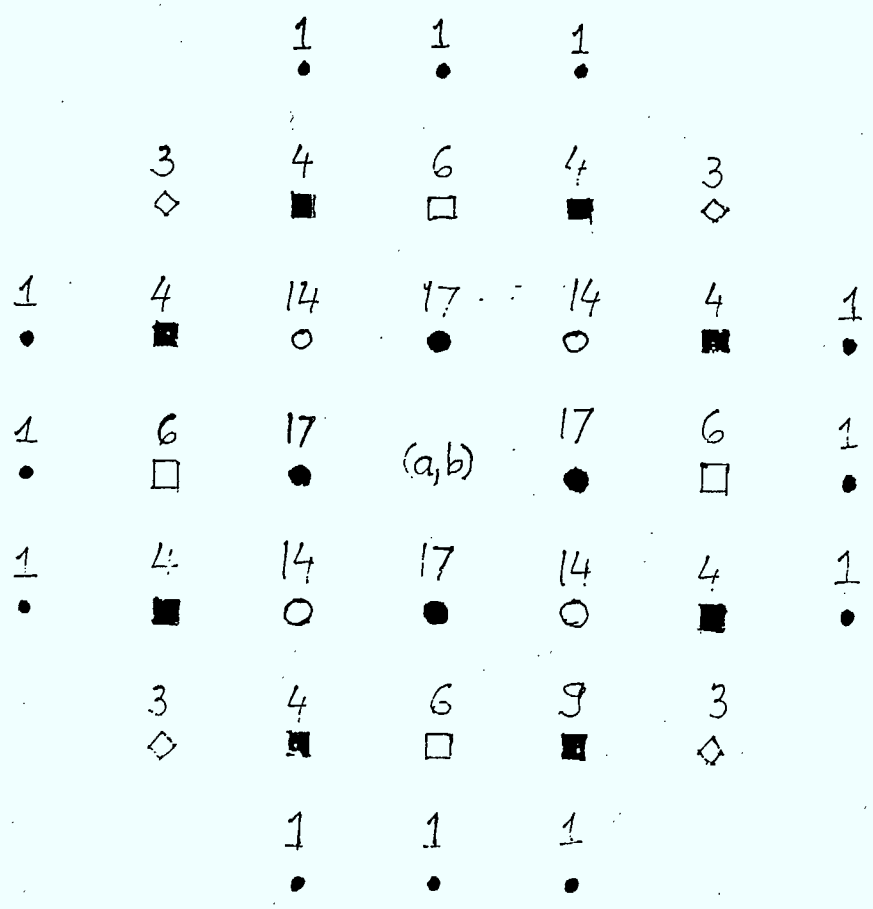


FIG 2.2.

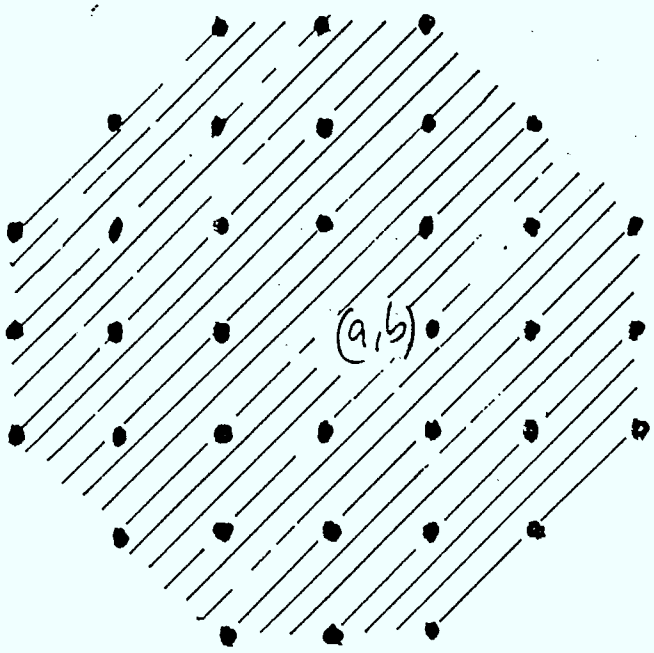


FIG. 2.3

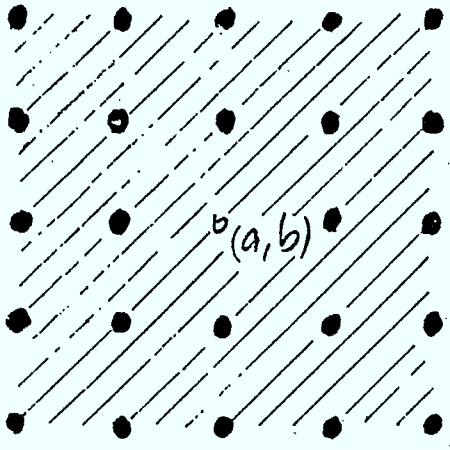


FIG 2.4

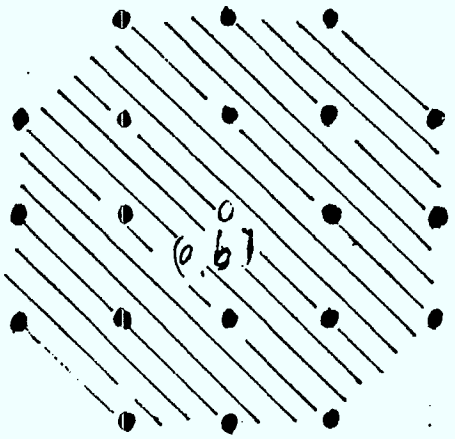


FIG. 2.5

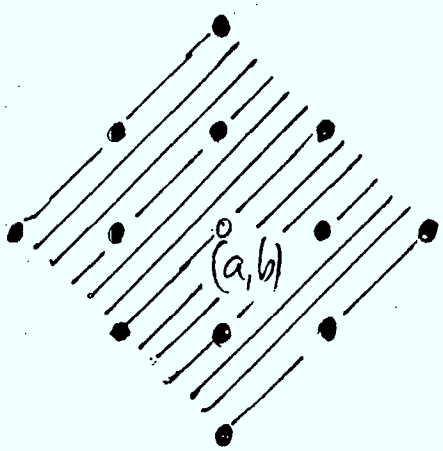


FIG. 2.6

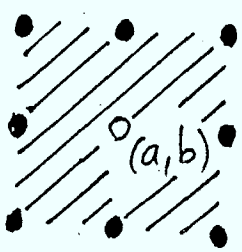


FIG. 2.7

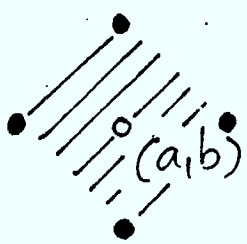


FIG. 2.8

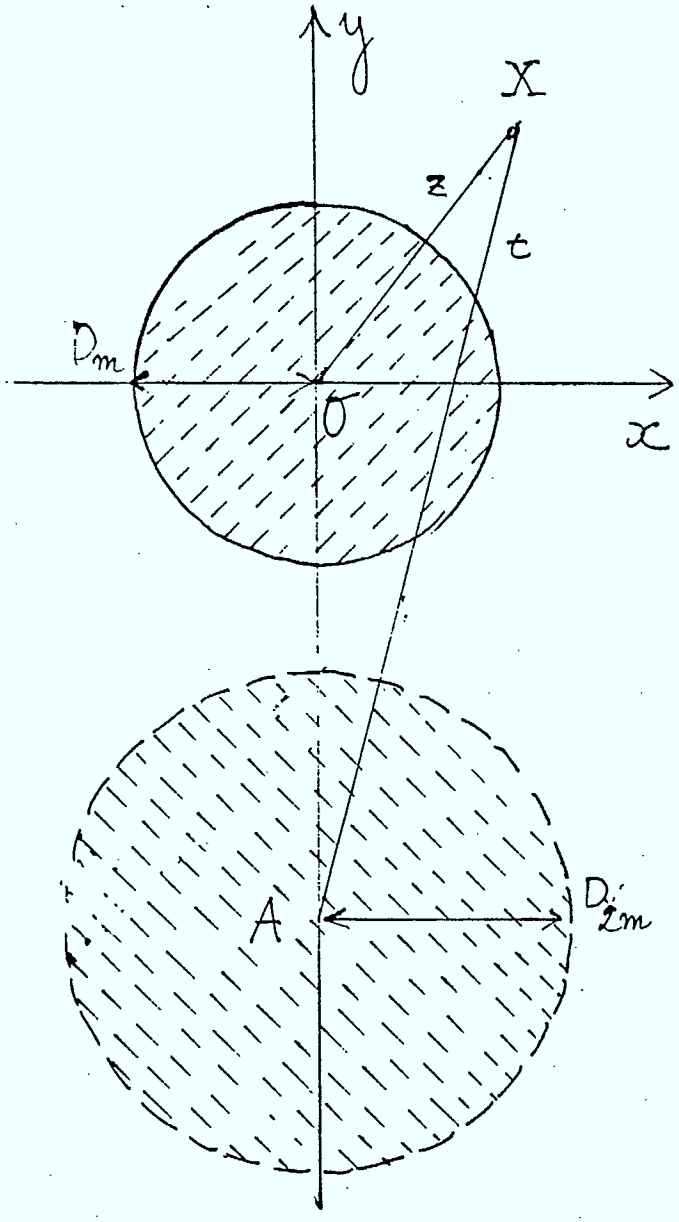


FIG. 3.1

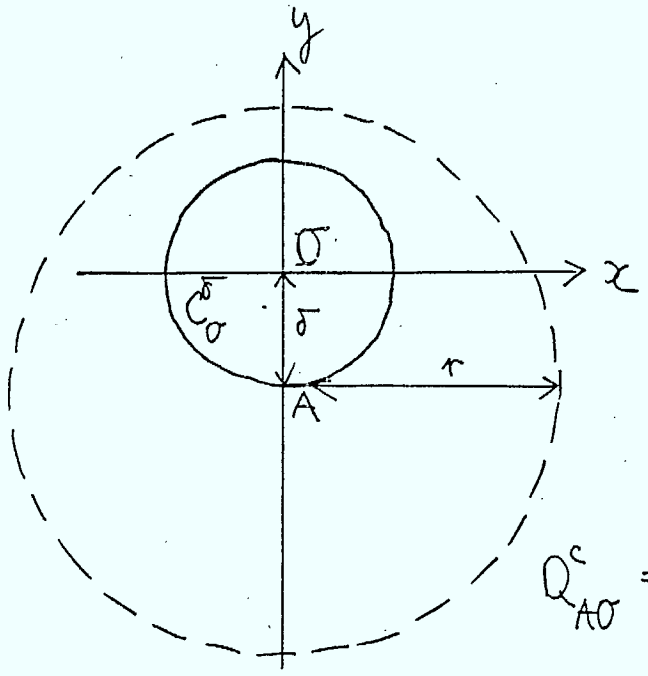

y
x
σ
C_σ^δ
δ
r
A
$Q^c_{A\sigma} = C^r_A$

FIG. 3.2

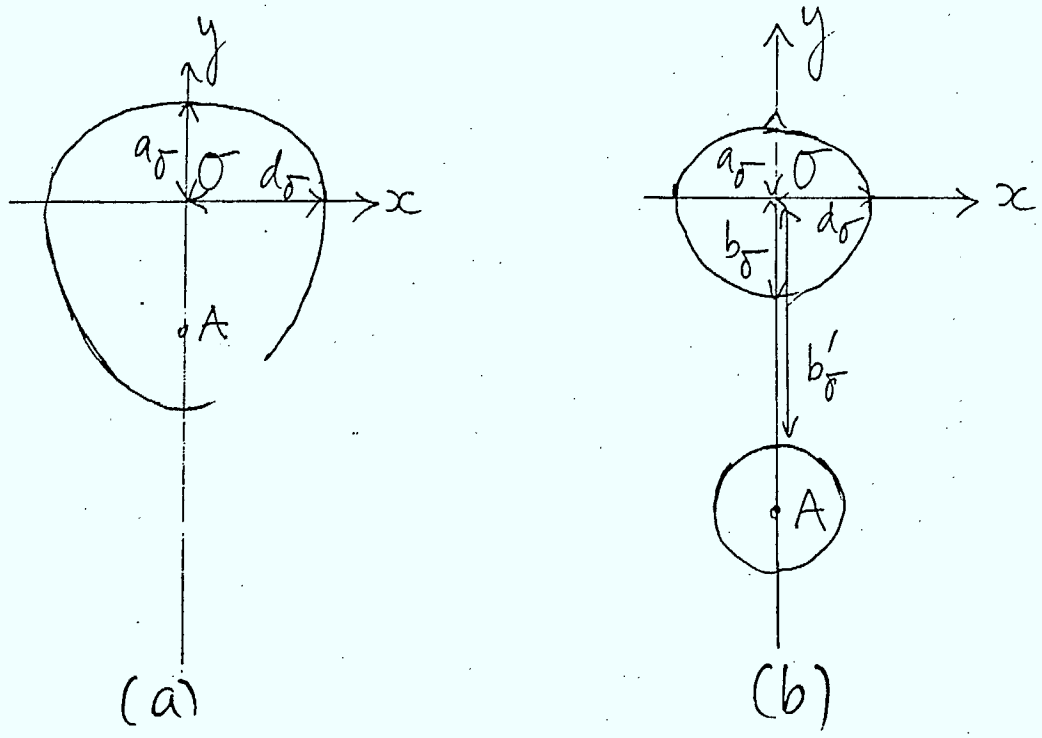

y
x
a_δ
σ
d_δ
A
(a)
y
x
a_δ
σ
d_δ
b_δ
b'_δ
A
(b)

FIG 3.3

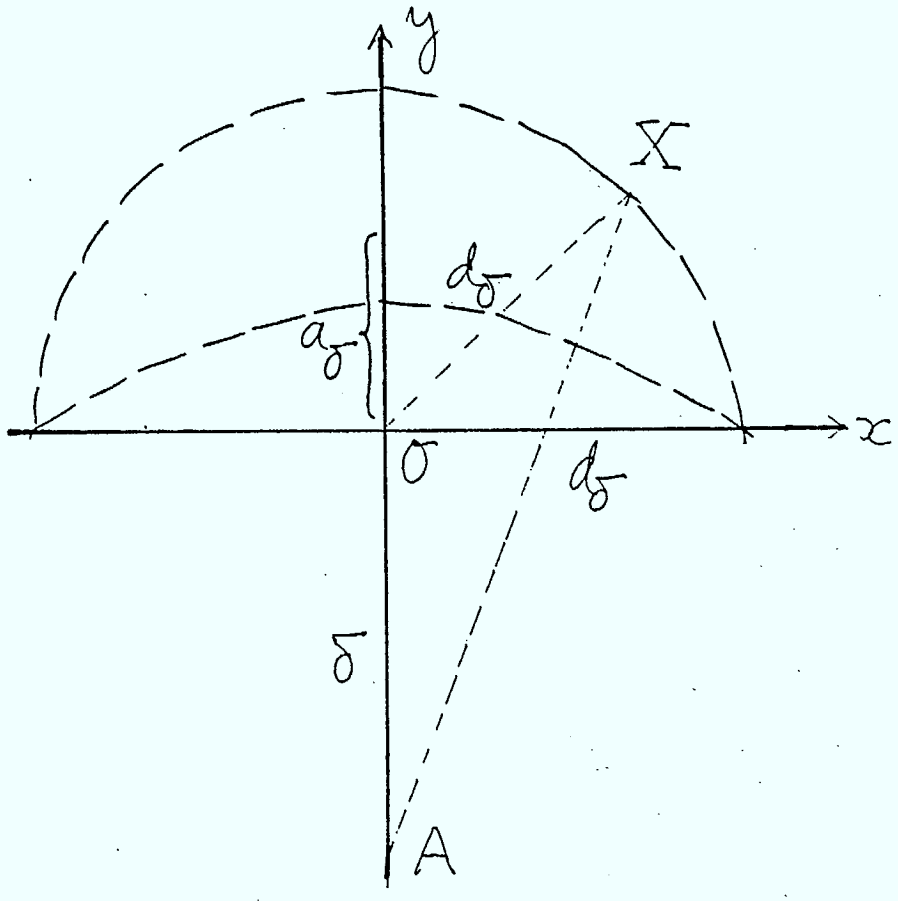


FIG. 3.4

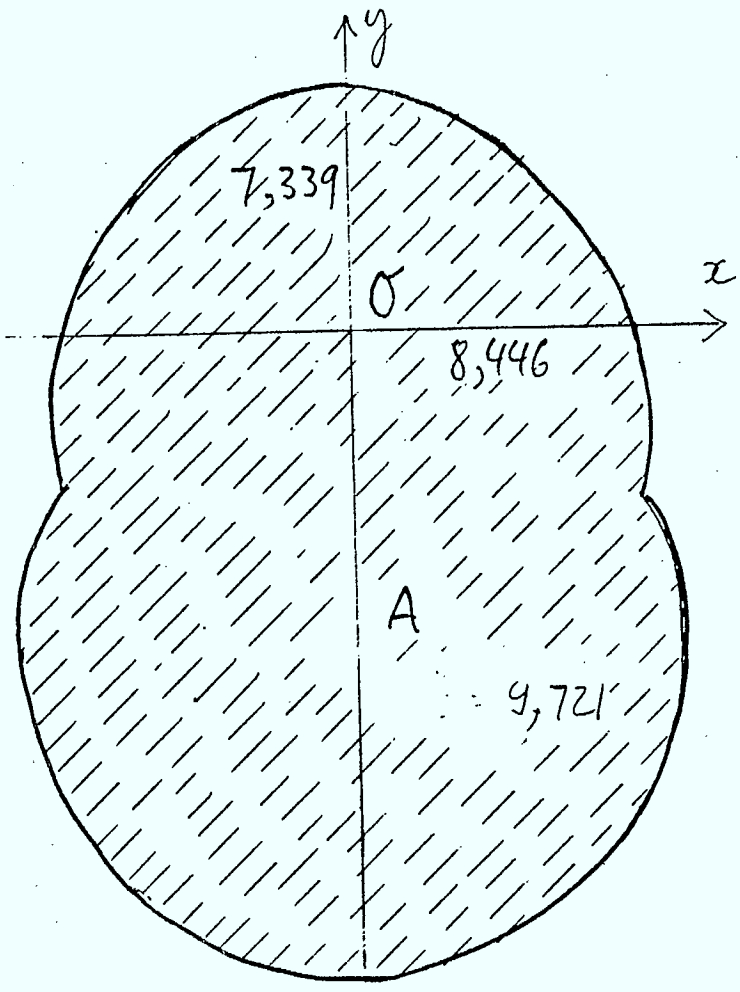


FIG. 3.5

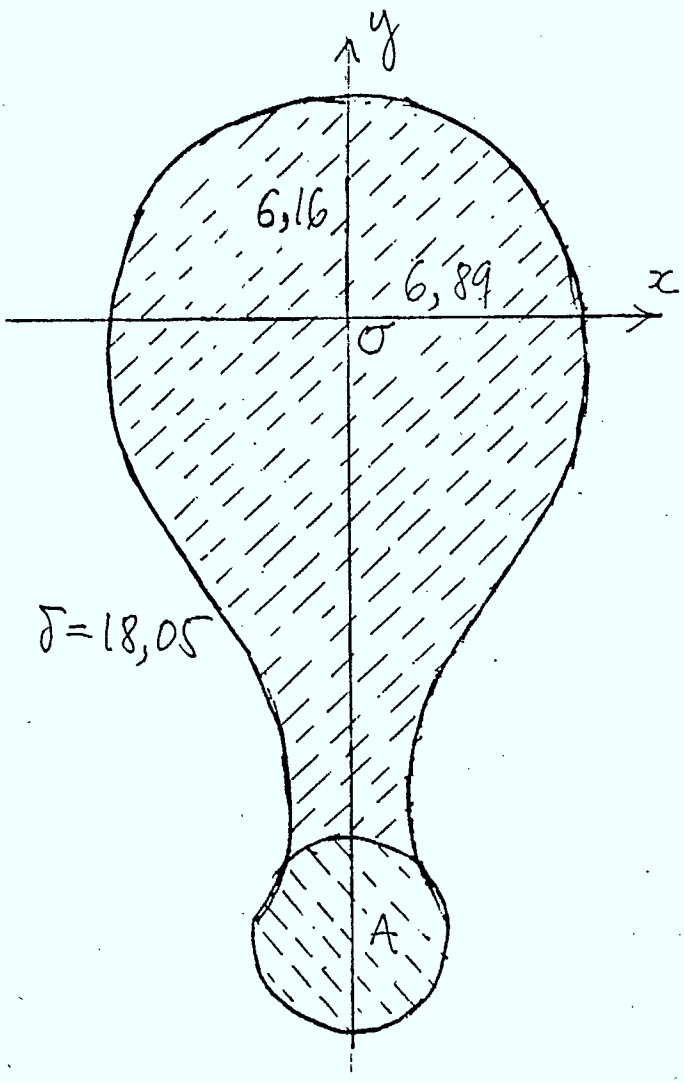


FIG. 3.6

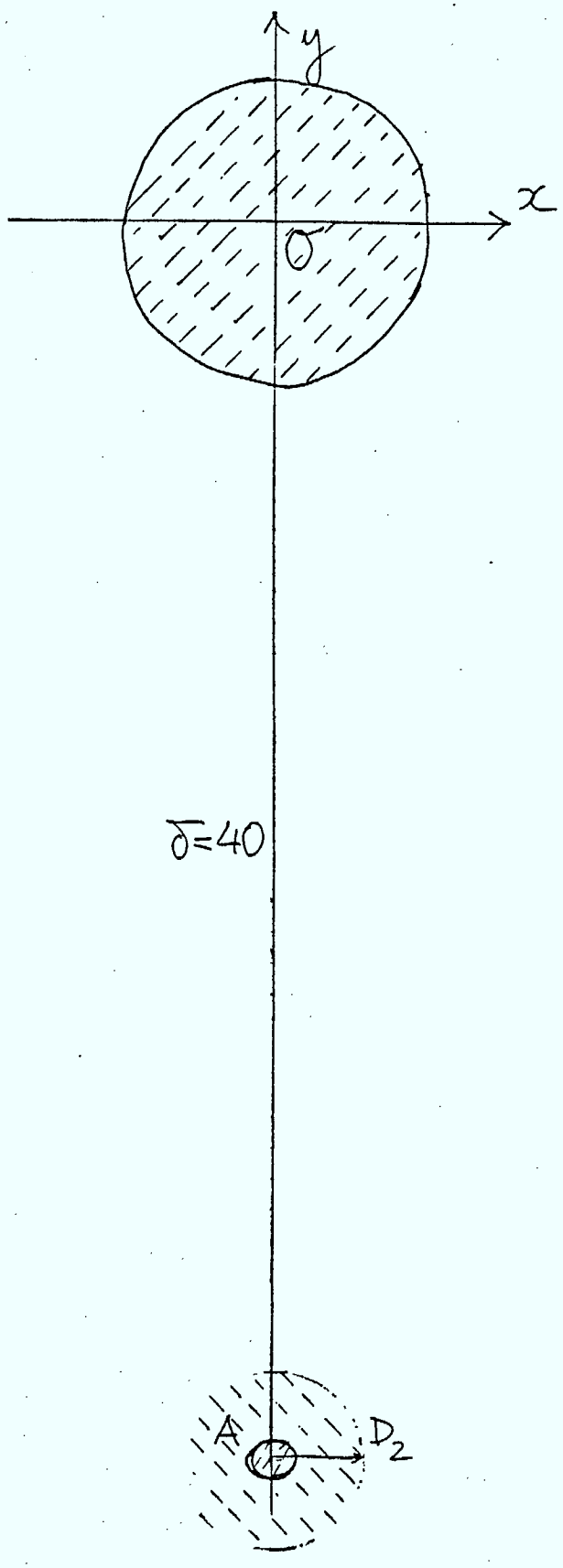


FIG. 3.7

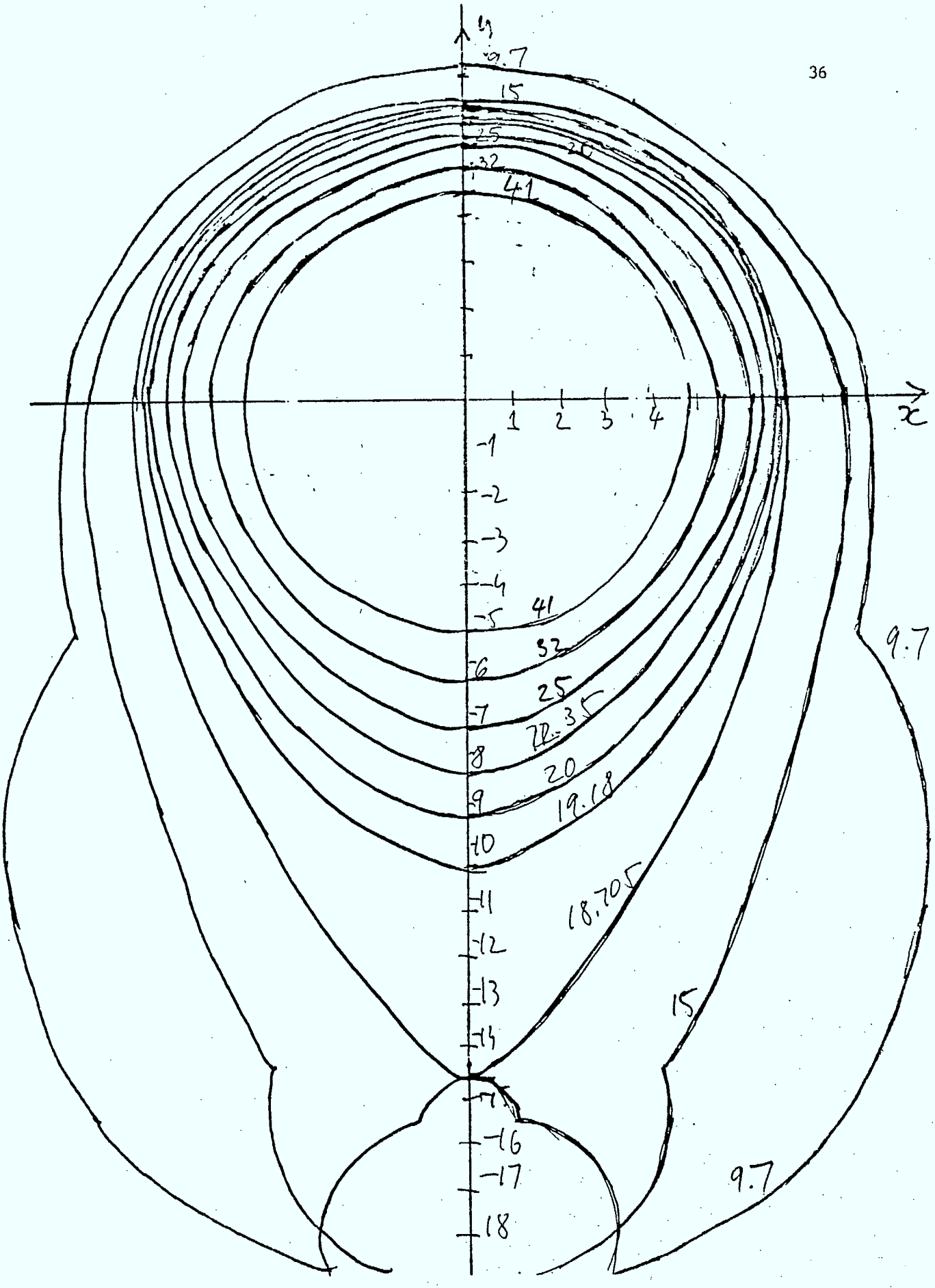

y
x
9.7
15
25
32
41
1
2
3
4
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-15
-16
-17
18
41
32
25
22.35
20
19.18
18.705
15
9.7
9.7

FIG. 3.7(a)

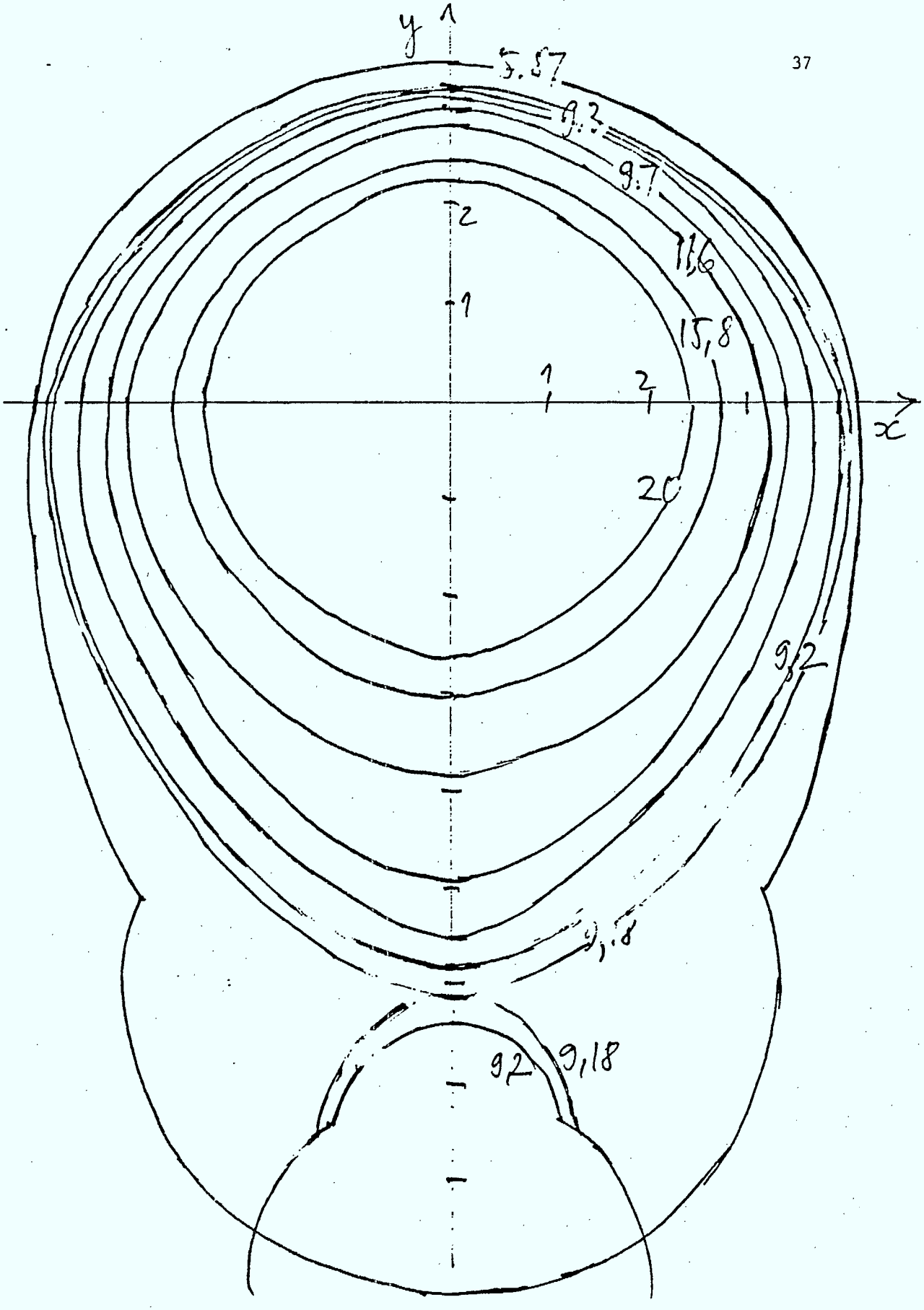


FIG. 3.8

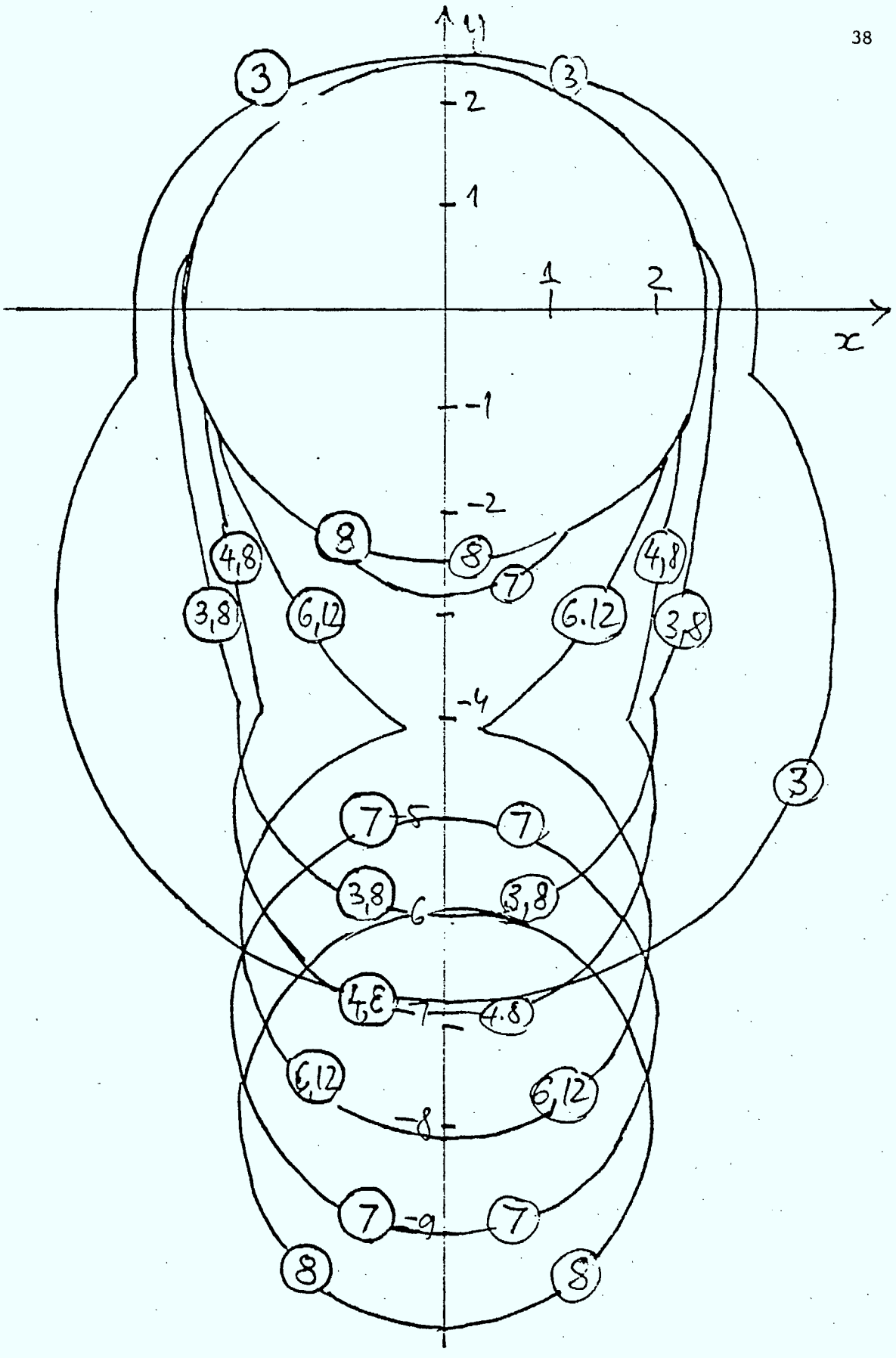

y
x
3
3
2
1
1
2
-1
-2
8
8
7
4,8
4,8
3,8
6,12
6.12
3,8
-4
3
7
5
7
3,8
6
3,8
4,8
4.8
6,12
6,12
-8
7
-9
7
8
8

FIG. 3.9.

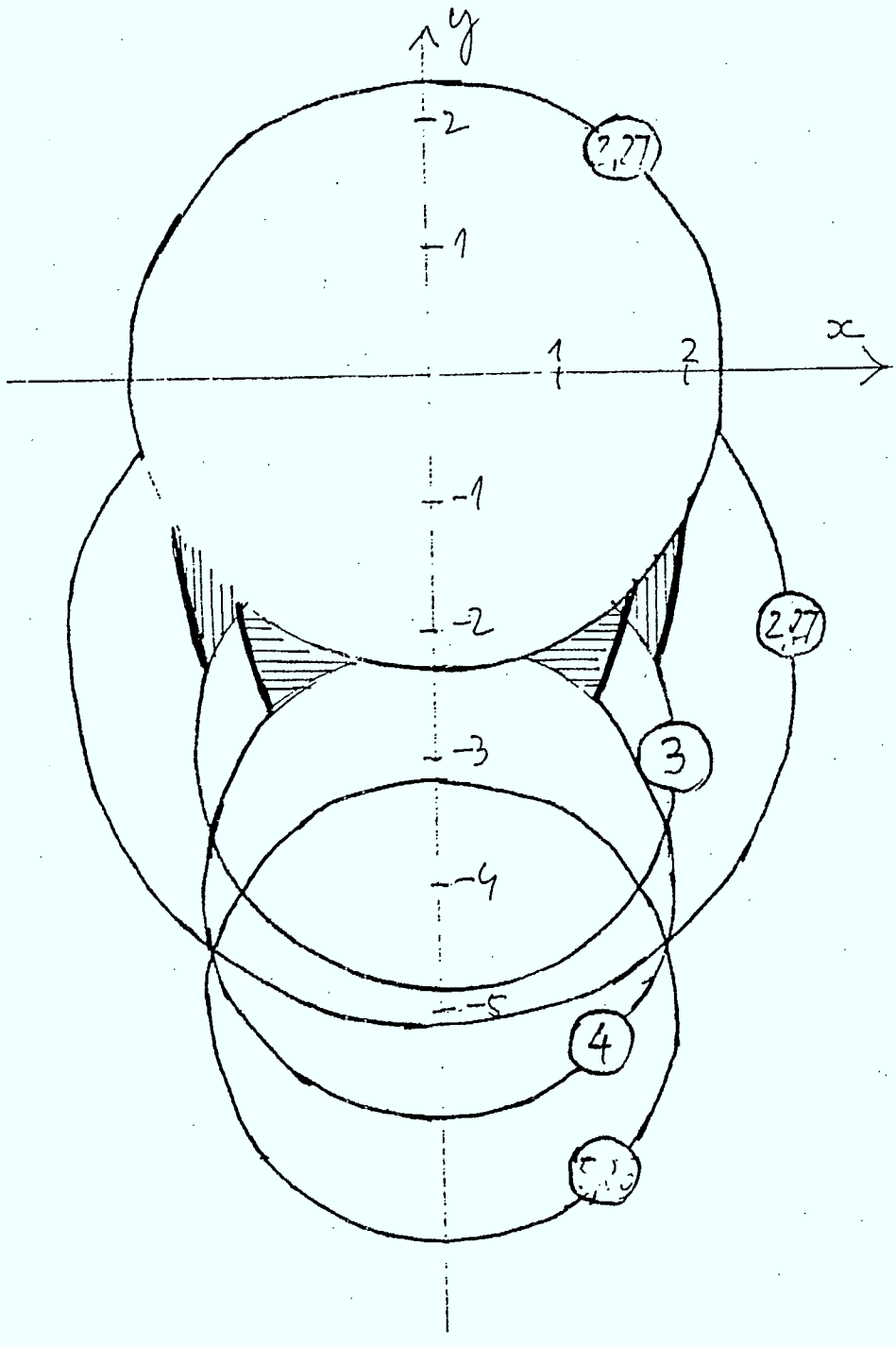


FIG. 3.10

CHAPITRE 5

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

1. CONCLUSIONS

Mécanismes et règles de non interférence

- L'étude des mécanismes de non interférence par adjacence, désensibilisation et intermodulations R_X et T_X a permis de mettre en évidence que ce sont les conditions sur les distances d_1 et d_2 provenant de l'intermodulation R_X qui sont généralement dominantes dans les contraintes.

- La condition forte d'intermodulation T_X incorporée aux règles de non interférence semble être raisonnable et ne pas affecter les résultats.

- Les calculs des paragraphes 2,3 et 4 du Chapitre 2 pourraient servir à d'autres applications. Les programmes développés sur cartes magnétiques pour le HP-97 sont disponibles pour des calculs similaires pour différentes valeurs des paramètres.

- Le nouvel algorithme (au paragraphe 4.3 du Chapitre 2) pour la vérification des conditions de non interférence par intermodulation R_X a permis d'améliorer de façon tangible la compression de la ville.

Stratégies d'assignation linéaires

- Les nouvelles méthodes de calcul des distances e_k pour les stratégies linéaires horizontales dans un rectangle ont permis d'améliorer le temps calcul par un facteur de plus de 10 dans certains cas ($N_1=N_2=32$ et $N_3=1$).

- L'introduction des stratégies linéaires vectorielles a permis d'augmenter la mobilité de chaque antenne autour de sa position nominale et d'augmenter de 12 à 14% la compression maximale de la grille d'assignation.

- L'étude des stratégies linéaires vectorielles est le premier pas vers le développement d'autres types de stratégies linéaires plus complexes.

Revision des conclusions du rapport 1981-82

- Malgré un ensemble de conditions de non interférence plus complet et surtout plus contraignant, il a généralement été possible de faire aussi bien et même légèrement mieux qu'en 1981-82 grâce au raffinement des méthodes et à l'introduction des stratégies vectorielles.

- Les k-assignations qui étaient adaptées au centre-ville en 1981-82 sont encore intéressantes pour $P_{MIN} = -132$. Cependant pour $P_{MIN} = -140$ ou -148, ce mécanisme supplémentaire de compression est réduit par l'effet plus prononcé des conditions de désensibilisation.

- Il n'y a pas eu assez de temps pour faire des essais systématiques pour les géométries variables et les assignations non uniformes.

Etudes prospectives

- Les méthodes systématiques d'étirement et de compression du spectre suggérées par F.Dubeau pourraient être utilisées pour comprimer encore plus les grilles obtenues par les stratégies linéaires d'assignation uniforme.

- L'assignation non uniforme dans une ville divisée en une zone centre-ville et une zone banlieue en utilisant des "morceaux" d'assignation linéaires dans des carrés ou des rectangles semble être une méthode systématique et attrayante car, se faisant, F.Dubeau aurait à sa disposition tous les résultats et programmes développés pour les stratégies linéaires.

- Le problème de l'assignation du spectre résiduel (ou assignation partielle) à une région où une portion du spectre total a déjà été assignée est un problème difficile. I.Rosenberg a commencé à le débroussailler et à mettre en évidence quelques uns des mécanismes régissant ce genre d'assignation. Une méthode heuristique très simple a été proposée, et l'utilisation de programmes de type "branch and bound" a été évoquée. Cependant I.Rosenberg estime que, fondamentalement, son problème est d'une complexité qui dépasse la majorité des problèmes de ce type. D'autre part il estime que ce n'est pas un calcul qu'il faut faire très vite ou souvent. Il suggère donc d'utiliser les périodes creuses de grands ordinateurs pour obtenir des résultats.

2. RECOMMANDATIONS

- En raison des nouveaux résultats obtenus à l'aide des stratégies d'assignation vectorielle on recommande de continuer le développement et d'améliorer la compréhension de ces méthodes tant du point de vue théorique que du point de vue des essais numériques.

- Bien que les stratégies linéaires permettent de répéter jusqu'à 9 fois un spectre de 1024 fréquences dans une ville carrée d'environ 1000km de côté, ces méthodes ne permettent pas d'augmenter la concentration des assignations au centre-ville en utilisant le mode partagé sauf lorsque l'on utilise les k-assignations. On recommande donc de créer de nouvelles stratégies linéaires qui assigneraient le spectre en mode partagé jusqu'à 5 fois dans une même région avec la contrainte que la distance d_0 entre deux stations partageant la même fréquence satisfasse les contraintes

$$5 \text{ km} \leq d_0 \leq 30 \text{ km}.$$

- Le développement des méthodes systématiques d'étirement et de compression du spectre suggérées par F.Dubeau devraient être étudiées de façon détaillée. En plus d'être utiles pour l'assignation non unfforme avec un centre-ville, ces méthodes pourraient jouer un rôle intéressant dans la compression des grilles résultant de l'assignation par des stratégies linéaires vectorielles en mode partagé.

- Suite à l'élaboration des conditions de non interférence cette année pour la bande VHF, une ou des études semblables pourraient être répétées pour une bande de fréquences différente (par exemple le 800MHz) avec des paramètres différents. Pour cela le Ministère devrait nous aviser de l'intérêt qu'il porterait à ce genre d'étude afin d'établir un budget et un échéancier.

- On recommande aussi la poursuite des travaux amorcés sur les stratégies d'assignations non uniforme pour une ville comprenant un centre-ville, un anneau périphérique et une banlieue.

- Dans les études exploratoires, on pourrait poursuivre l'exploration des méthodes d'assignation du spectre résiduel dans une région partiellement remplie.

REFERENCES

G. De Couvreur, Selection of optimum culling limits for land-mobile EMC calculations, Systems Engineering, Spectrum Management System, Department of Communications, February 1983.

M. Delfour, F. Dubeau et I.Rosenberg, Rapport 1981-82, sur le contrat "Assignation des fréquences", C.R.M.A., Université de Montréal, mars 1982.

M.Delfour, A.Kotzig, A.Manitius et I.Rosenberg, Rapport final sur le contrat "Optimisation du nombre d'assignation de fréquences", C.R.M.A., Rapport 1017, Université de Montréal, mars 1981.

LKC
TK6553 .D4 1983
Etude portant sur
l'optimisation du nombre
d'assignation de frequences
: rapport final

DATE DUE
DATE DE RETOUR

CARR McLEAN 38-296

CRC LIBRARY/BIBLIOTHEQUE CRC
TK6553 D351 1983

INDUSTRY CANADA / INDUSTRIE CANADA
218795