Commentaires

Jason Wei

La classification des modèles d'évaluation des actifs financiers est une entreprise hérissée de pièges, car nombre de cadres de modélisation apparemment distincts sont, en fait, intimement liés. Toutefois, pour les besoins de la présente analyse, je rangerai tous les modèles d'évaluation des actifs financiers dans deux grandes catégories : les modèles d'équilibre et les modèles basés sur la théorie de l'arbitrage.

L'étude de Carmichael porte sur la première catégorie de modèles. Dans son article novateur de 1978, Lucas exposait les fondements des modèles fondés sur la consommation ou modèles d'équilibre dynamique, qu'il étendait à un cadre à deux pays dans un article ultérieur, publié en 1982. Parmi les autres recherches importantes dans ce domaine, mentionnons celles de Merton (1973), de Breeden (1979) et de Cox, Ingersoll et Ross (1985).

Une caractéristique propre aux modèles fondés sur la consommation est la nécessité de spécifier les fonctions d'utilité ou d'aversion pour le risque de l'agent. Une fois que la fonction d'utilité est formulée, la maximisation intertemporelle de l'utilité espérée mène aux conditions de premier ordre habituelles, les équations d'Euler, qui déterminent en fin de compte les prix des actifs financiers. Dans la mesure où les équations d'Euler constituent la base de la dynamique des prix des actifs, la formulation de la fonction d'utilité de l'agent joue un rôle essentiel. Les modèles reposant sur la théorie de l'arbitrage, par contre, sont indépendants de l'attitude des investisseurs à l'égard du risque.

Je consacrerai l'essentiel de mes propos à un examen des modèles reposant sur la théorie de l'arbitrage, dans le but de compléter l'étude de Carmichael. Je traiterai plus particulièrement de l'application de cette théorie à l'évaluation des produits financiers dérivés. Dans l'esprit du colloque de cette année, je m'efforcerai de rattacher l'exposé aux structures d'information véhiculées par le marché et, dans la mesure où la chose est possible et appropriée, de comparer les deux catégories de modèles. Je m'appuierai principalement sur les travaux de Dothan (1990), Huang et Litzenberger (1988), Ingersoll (1987), Duffie (1996), Neftci (1996) et Pliska (1997).

Contexte

La théorie de l'arbitrage appliquée au prix des actifs (ou APT, de *arbitrage-pricing theory*) a été proposée par Ross (1976). À la différence du modèle d'équilibre des actifs financiers, ou MEDAF, dont la paternité est attribuée à Sharpe (1964) et à Lintner (1965), le modèle APT n'exige aucune hypothèse au sujet des préférences des investisseurs ou de la distribution des rendements. Cette théorie repose sur les notions de diversification et d'absence d'arbitrage en situation d'équilibre. Le modèle APT est analogue au MEDAF en ce sens que les deux considèrent les risques spécifiques comme diversifiables et, par conséquent, ne les assortissent d'aucune prime.

Les deux modèles diffèrent cependant par le traitement du risque systématique. Dans le MEDAF, la prime de risque est calculée grâce à une séparation entre deux portefeuilles et à la maximisation de l'utilité tandis que, dans le modèle APT, son calcul est fondé sur le principe d'absence d'arbitrage. Étant donné que les deux modèles ont été élaborés dans le but d'évaluer des titres fondamentaux comme les actions et que le modèle APT ne précise pas les facteurs de risque systématique, le MEDAF a toujours eu la faveur des praticiens et de la plupart des universitaires.

Le modèle APT est plus apte que le MEDAF à extraire l'information véhiculée par les rendements des titres, car il permet à un nombre illimité de facteurs de risque systématique d'influer sur les rendements. Cependant, cette caractéristique constitue aussi le principal point faible de ce modèle, puisque les chercheurs doivent interpréter sur le plan économique les facteurs de risque systématique extraits des rendements des titres. En ce qui concerne l'évaluation des titres fondamentaux, le modèle APT est handicapé par ses propres qualités. Cependant, ainsi que l'histoire l'a démontré, le principe d'absence d'arbitrage, lorsqu'on l'applique à l'évaluation des produits financiers dérivés, est non seulement puissant, mais facile à mettre en œuvre. Cela tient essentiellement, bien entendu, au fait que les prix sont établis en termes relatifs.

Avant de nous plonger au cœur de la théorie de l'arbitrage, nous devons introduire un autre élément clé, à savoir les processus stochastiques, sur lesquels repose toute la modélisation financière. Le processus stochastique le plus largement utilisé est sans doute le « mouvement brownien », du nom du botaniste anglais Robert Brown. Cependant, le développement de ce concept est attribuable à Bachelier (1900) et à Einstein (1905), entre autres mathématiciens de la première moitié du siècle. Bien que Bachelier et Samuelson (1965) aient tous deux appliqué ces outils au calcul du prix des options, le premier se servant du mouvement brownien et le second du mouvement brownien géométrique, ce sont les premiers travaux de Merton (1969 et 1971) qui ont ouvert la voie aux applications modernes. La panoplie qu'offrent le calcul stochastique et la théorie moderne des probabilités, combinée au principe d'absence d'arbitrage, permet aux chercheurs d'établir sans peine le prix des produits dérivés tout en gardant une structure d'information réaliste.

Black et Scholes (1973) ont mis au point leur fameuse formule d'évaluation des options en résolvant une équation différentielle partielle qui est indépendante du rendement espéré de l'actif sous-jacent. Trois ans plus tard, Cox et Ross (1976) tiraient une importante conséquence de l'équation différentielle de Black-Scholes : puisque le prix ne dépend pas du rendement espéré de l'actif sous-jacent, on peut faire l'hypothèse que les investisseurs sont neutres à l'égard du risque et que, donc, le rendement espéré est le taux sûr. Cette observation a été exprimée sous forme mathématique par Harrison et Kreps (1979), qui ont montré qu'une évaluation neutre à l'égard du risque équivalait à une détermination des prix en l'absence d'arbitrage et que, dans ce système, tous les prix étaient des martingales, moyennant une normalisation convenable et un changement du mode de mesure des probabilités.

Dans la prochaine section, je présenterai les principaux éléments du processus d'établissement des prix en l'absence d'arbitrage dans le cas des produits financiers dérivés. Nous commencerons par un modèle en temps discret, pour passer ensuite à un modèle en temps continu.

Établissement des prix en l'absence d'arbitrage dans un modèle à une période

Signification économique de l'absence d'arbitrage

Un modèle à une période peut être défini comme suit :

- période initiale $t = 0$
- période finale $t = 1$

- transactions possibles uniquement à $t = 0, 1$
- échantillon fini : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_K\} \quad (K < \infty)$
- il existe une mesure de probabilité P sur Ω, avec $P(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$
- supposons un compte du marché monétaire $B = \{B_t : t = 0, 1\}$, avec $B_0 = 1$ \$
- le processus de prix est $S = \{S_t : t = 0, 1\}$ pour N titres à risque lorsque $S_t = (S_1(t), S_2(t), S_3(t), \ldots, S_N(t))$.

Définitions

Stratégie d'investissement : $H = (H_0, H_1, H_2, \ldots, H_N)$
où H_0 est le nombre de dollars déposés dans un compte du marché monétaire et où H_n désigne le nombre d'unités du titre n $(n = 1, 2, 3, \ldots, N)$.

Processus de valeur : $V = \{V_t : t = 0, 1\}$ où

$$V_t = H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t), \quad t = 0, 1.$$

Processus de profit : $G = H_0(B_t - 1) + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n$
où $(B_t - 1)$ est le taux d'intérêt et $\Delta S_n = S_n(1) - S_n(0)$. En outre, $V_1 = V_0 + G$.

Processus de prix actualisé : $S^* = \{S_t^* : t = 0, 1\}$ où
$S_t^* = (S_1^*(t), S_2^*(t), S_3^*(t), \ldots, S_N^*(t))$ et
$S_n^*(t) \equiv S_n(t)/B_t$, $n = 1, 2, 3, \ldots, N$;
$t = 0, 1$. B_t est l'unité de compte.

Pour que le modèle soit sensé, le système de prix obtenu doit être conforme à la logique économique. Si, par exemple, il existe deux stratégies d'investissement H^A et H^B telles que $V_1^A(\omega) = V_1^B(\omega) \forall \omega \in \Omega$ et qu'on a quand même $V_0^A > V_0^B$, la loi du prix unique n'est pas respectée. Il s'agit là du système le moins souhaitable en raison de l'ambiguïté des prix — des portefeuilles produisant des rendements identiques peuvent avoir des valeurs actuelles différentes, ce qui est incompatible avec la réalité économique. Lorsque la loi du prix unique ne se vérifie pas, l'investisseur pourra réaliser des profits sûrs sur ces transactions sans mise de fonds nette.

Est-ce que le règne de la loi du prix unique garantit un système de prix sensé? Même pas. Cette loi fait simplement en sorte que les stratégies d'investissement donnant les mêmes valeurs finales s'accompagnent des mêmes valeurs actuelles. Cependant, deux stratégies ayant des valeurs finales différentes *peuvent* présenter les mêmes valeurs actuelles. Si, par exemple, il existe H^A et H^B tels que $V_0^A = V_0^B$, mais que $V_1^A(\omega) > V_1^B(\omega) \forall \omega \in \Omega$, la loi du prix unique n'est pas enfreinte, mais le système de prix n'est pas sensé. Dans ce cas, il existe des « stratégies d'investissement dominantes » qui garantissent aux investisseurs un rendement strictement positif avec une mise de fonds nette égale à zéro (il suffit de procéder à des ventes à découvert avec la stratégie H^B et de prendre des positions longues avec la stratégie H^A). Ou encore, on peut définir une stratégie d'investissement dominante comme une stratégie dans laquelle $V_0 < 0$ et $V_1(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega$.

Un modèle du marché financier qui permet une stratégie d'investissement dominante ne peut être réaliste, car il se traduit par des prix illogiques. S'il existe des stratégies dominantes, l'investisseur peut être assuré d'un rendement positif sans mise de fonds, mais il n'est plus certain du montant qu'il recevra, à la différence de ce qui se passe lorsque la loi du prix unique est enfreinte. Selon l'état du monde observé, le rendement en valeur absolue peut être élevé ou faible, mais il est toujours positif. Par conséquent, l'absence de stratégies d'investissement dominantes est une condition plus contraignante que le règne de la loi du prix unique.

Peut-être que la condition d'absence de stratégies dominantes permettrait d'obtenir un modèle plus sensé du marché financier. Malheureusement, il n'en est rien. Il faut imposer une condition plus rigoureuse pour assurer des prix stables à l'équilibre, soit l'absence de possibilités d'arbitrage. Sur le plan formel, une possibilité d'arbitrage correspond à une stratégie d'investissement H telle que $V_0 = 0$, $V_1 \geq 0$ et $E(V_1) > 0$. Dans ce cas, l'investisseur peut espérer un rendement positif sans mise de fonds ou se retrouver avec un rendement nul. Une possibilité d'arbitrage reste sans risque parce qu'elle n'exige aucune mise de fonds et ne peut amener l'investisseur à s'endetter.

Il apparaît clairement, maintenant, que les trois conditions sont de plus en plus contraignantes. Le non-respect de la loi du prix unique implique l'existence de stratégies dominantes, laquelle suppose celle de possibilités d'arbitrage. L'inverse n'est pas forcément vrai. L'ensemble de prix des actifs compatible avec l'absence d'arbitrage est le plus réduit. Seuls ces prix sont sensés. Par conséquent, tout modèle d'évaluation sensé doit exclure les possibilités d'arbitrage. Comment vérifier qu'un modèle ne présente aucune possibilité d'arbitrage?

Absence d'arbitrage et mesure de probabilité neutre à l'égard du risque

Il appert qu'il existe une relation étroite entre l'absence de possibilités d'arbitrage et l'existence d'une mesure de probabilité neutre à l'égard du risque.

Définition : la mesure de probabilité Q est neutre à l'égard du risque si

$$Q(\omega) > 0, \forall\, \omega \in \Omega \text{ et } E^Q[S_n^*(t)] = 0 \ (n = 1, 2, 3, \ldots, N).$$

De toute évidence, une mesure de probabilité doit satisfaire aux relations

$$Q(\omega) > 0, \forall\, \omega \in \Omega \text{ et } \sum_{k=1}^{K} Q(\omega_k) = 1.$$

La *neutralité à l'égard du risque* correspond à $E^Q[S_n^*(t)] = 0$, c'est-à-dire que les prix actualisés des martingales sous Q ou, ce qui revient au même, le prix actuel d'un titre est son prix futur attendu, actualisé au taux sûr. Résultat important :

> Un modèle d'évaluation des actifs ne présente aucune possibilité d'arbitrage que s'il existe une mesure de probabilité neutre à l'égard du risque Q. (1)

Étant donné qu'il s'agit d'une condition à la fois nécessaire et suffisante, l'existence d'une mesure de probabilité neutre à l'égard du risque garantit entièrement l'absence de possibilités d'arbitrage. Pour le comprendre, il suffit de considérer un exemple. Supposons qu'il y ait, à part l'actif sûr, deux titres à risque, dont les prix sont $S_1(0)$ et $S_2(0)$. Il y a trois états : ω_1, ω_2 et ω_3. Les gains sont les suivants :

État	**Compte du marché monétaire**	$S_1(1)$	$S_2(1)$
ω_1	$1 + r$	$S_1(1)(\omega_1)$	$S_2(1)(\omega_1)$
ω_2	$1 + r$	$S_1(1)(\omega_2)$	$S_2(1)(\omega_2)$
ω_3	$1 + r$	$S_1(1)(\omega_3)$	$S_2(1)(\omega_3)$

Si les prix à la Arrow-Debreu sont ψ_1, ψ_2 et ψ_3, nous avons :

$$1 = (1 + r)\psi_1 + (1 + r)\psi_2 + (1 + r)\psi_3$$

$$S_1(0) = S_1(1)(\omega_1)\psi_1 + S_1(1)(\omega_2)\psi_2 + S_1(1)(\omega_3)\psi_3$$

$$S_2(0) = S_2(1)(\omega_1)\psi_1 + S_2(1)(\omega_2)\psi_2 + S_2(1)(\omega_3)\psi_3 . \qquad (2)$$

Posons $Q(\omega_k) \equiv (1+r)\psi_k \ (k = 1, 2, 3)$. Le système d'équations précédent devient alors :

$$
\begin{aligned}
1 &= Q(\omega_1) + Q(\omega_2) + Q(\omega_3) \\
S_1(0) &= [S_1(1)(\omega_1)Q(\omega_1) + S_1(1)(\omega_2)Q(\omega_2) \\
&\quad + S_3(1)(\omega_3)Q(\omega_3)]/1 + r \\
S_2(0) &= [S_2(1)(\omega_1)Q(\omega_1) + S_2(1)(\omega_2)Q(\omega_2) \\
&\quad + S_2(1)(\omega_3)Q(\omega_3)]/(1+r). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

À l'évidence, $Q(\omega)$ peut être interprété comme une probabilité, et l'exigence voulant que les prix actualisés soient des martingales est manifestement respectée. Lorsque le nombre d'états est égal au nombre de titres (comme dans cet exemple), le système peut toujours être résolu. Par exemple, pour :

$$r = 0.2, S_1(1) = \{2, 3, 6\}, S_2(1) = \{4, 9, 6\}, S_1(0) = 2.5 \text{ et}$$
$$S_2(0) = 5.0,$$

nous avons

$$Q(\omega_1) = 1/2, Q(\omega_2) = 1/3 \text{ et } Q(\omega_3) = 1/6.$$

Malheureusement, rien ne garantit que $Q(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$. Dans ce cas, il n'existe pas de mesure de probabilité neutre à l'égard du risque, et il y a une possibilité d'arbitrage. Par exemple, pour

$$r = 0.2, S_1(1) = \{2, 3, 8\}, S_2(1) = \{4, 8, 6\}, S_1(0) = 5 \text{ et}$$
$$S_2(0) = 7.5,$$

nous avons

$$Q(\omega_1) = -1/2, Q(\omega_2) = 1 \text{ et } Q(\omega_3) = 1/2.$$

Ces solutions ne sont pas des probabilités, et un arbitrage est possible. (Une stratégie d'arbitrage consisterait à vendre à découvert une unité de chaque titre à risque et à investir le produit de la vente [12,50 $] dans l'actif sûr afin d'obtenir 15 $. À la période 1, l'engagement maximal au titre de la position à découvert est 8 $ + 6 $ = 14 $, de sorte qu'un rendement positif de 1 $ est garanti sans mise de fonds initiale.) La probabilité négative correspond à un prix d'état à la Arrow-Debreu négatif.

Signalons qu'il n'est pas nécessaire que la mesure de probabilité neutre à l'égard du risque soit unique pour exclure les possibilités

d'arbitrage. Tant qu'on peut trouver au moins une mesure de probabilité viable, l'arbitrage est exclu. Reprenons l'exemple précédent et modifions le rendement et le prix du deuxième titre à risque pour les établir à :

$$S_2(1) = \{4, 6, 16\} \text{ et } S_2(0) = 10.$$

Nous disposons alors de l'ensemble suivant de mesures de probabilité neutres à l'égard du risque :

$$Q = \{5\lambda - 3, 4 - 6\lambda, 2/3 > \lambda > 3/5\}.$$

Dans ce cas, le second titre à risque est redondant et il n'existe aucune possibilité d'arbitrage. Bien entendu, si le nombre de titres est supérieur au nombre d'états, il n'existe certainement pas de mesure de probabilité neutre à l'égard du risque, à moins que des titres ne soient redondants.

La preuve formelle de l'équivalence entre l'existence de mesures de probabilité neutres à l'égard du risque et l'absence d'arbitrage est un peu compliquée. Cependant, nous pouvons au moins résumer l'exposé présenté jusqu'ici en définissant trois situations possibles pour tout modèle d'évaluation : i) il n'existe aucune mesure de probabilité neutre à l'égard du risque (soit parce que les titres indépendants sont plus nombreux que les états ou qu'il y a des prix à la Arrow-Debreu négatifs); ii) il y en a plus d'une; iii) il y en a une seule.

D'après le résultat présenté en (1), il n'existe une possibilité d'arbitrage que dans la situation i). On peut l'expliquer de manière intuitive : lorsqu'il y a plus de titres indépendants que d'états, un ensemble de prix à la Arrow-Debreu ne pourra correspondre à tous les prix des titres — les prix d'état peuvent être propres à un titre. Cependant, cela est contraire à la définition même des prix d'état, qui devraient être les mêmes pour tous les titres. L'écart de prix d'état entre deux titres pour un état particulier est la source même de l'arbitrage.

Qu'en est-il des prix à la Arrow-Debreu négatifs? L'explication est facile. Tout gain positif suppose un prix positif par unité de gain. Un prix négatif implique que l'investisseur reçoit un paiement initial, tout en ayant la possibilité d'en obtenir un autre à l'avenir. Il s'agit évidemment d'une source sûre de profit ou d'une source d'arbitrage.

Évaluation des créances éventuelles et caractère complet du marché

Nous avons établi que, tant qu'il existait une mesure de probabilité neutre à l'égard du risque, l'arbitrage était exclu. L'absence d'arbitrage s'accompagnerait de prix « raisonnables ». Cela signifie-t-il que l'évaluation des créances éventuelles n'est possible qu'après qu'on a défini une mesure

de probabilité neutre à l'égard du risque? Avant de répondre à cette question, précisons que le prix d'une créance éventuelle, s'il existe, doit s'exprimer simplement sous la forme suivante :

$$V = \frac{1}{1+r} \sum_{k=1}^{K} G(\omega_k) Q(\omega_k), \tag{4}$$

où $G(\omega_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$ sont les gains auxquels la créance donne lieu. Étant donné (2) et (3), l'expression précédente revient à pondérer les gains au moyen des prix à la Arrow-Debreu, ce qui correspond à la façon dont le prix d'un titre devrait être établi. Reprenons ici le premier exemple en partant du système (3). Supposons qu'une option d'achat assortie d'un prix d'exercice de 5 $ soit souscrite sur le deuxième titre à risque. Le gain est $G(\omega) = \{0, 4, 1\}$ et, d'après (4), le prix d'achat est 1,25 $.

Je reviens maintenant à la question précédente. Il appert que, une fois qu'on a trouvé une mesure de probabilité neutre à l'égard du risque, on peut toujours trouver une valeur pour une créance éventuelle, mais sans avoir la certitude que cette valeur est unique. Revenons à l'exemple précédent, dans lequel on trouve un nombre infini de mesures de probabilité neutres à l'égard du risque :

$$Q = \{5\lambda - 3, 4 - 6\lambda, 2/3 > \lambda > 3/5\}.$$

Si une option d'achat assortie d'un prix d'exercice de 6 $ est souscrite sur le second titre avec un gain $S_2(1) = \{4, 6, 16\}$, le gain procuré par l'option d'achat est $G(\omega) = \{0, 0, 10\}$ et, en vertu de l'équation (4), le prix de l'option est $10\,\lambda/1.2$. Étant donné que $2/3 > \lambda > 3/5$, tout ce qu'on connaît de la valeur de l'option est sa borne inférieure et sa borne supérieure (5, 50/9). Le prix n'est pas unique.

Il est donc évident que l'absence d'arbitrage n'est pas suffisante pour obtenir une valeur unique pour une créance éventuelle. Pour que celle-ci ait une valeur unique, il faut qu'elle soit « négociable » ou « réalisable ». Une créance éventuelle est négociable si ses gains peuvent être reproduits au moyen d'une stratégie d'investissement *H* ou d'un portefeuille. Lorsqu'elle est négociable, la créance éventuelle a une valeur égale à celle du portefeuille qui la reproduit, et cette valeur est unique pour de nombreuses mesures de probabilité neutres à l'égard du risque. Pour le comprendre, supposons qu'un modèle se compose d'un compte du marché monétaire et d'un titre à risque et qu'il y ait trois états. Il existera un nombre infini de mesures de probabilité neutres à l'égard du risque, ainsi que je l'ai déjà montré. Faisons l'hypothèse qu'une créance éventuelle donne lieu à des gains $G(\omega) = \{X_1, X_2, X_3\}$ et que le prix actuel du titre sous-jacent est $S(0)$ avec des gains $S(\omega) = \{S_1, S_2, S_3\}$. Le portefeuille qui reproduit la

créance est $H = \{H_0, H_1\}$. Par conséquent, d'après (4), la valeur de la créance est

$$\frac{1}{1+r}(X_1Q_1 + X_2Q_2 + X_3Q_3)$$

$$= \frac{1}{1+r}[(H_0(1+r) + S_1H_1)Q_1 + (H_0(1+r) + S_2H_1)Q_2$$

$$+ (H_0(1+r) + S_3H_1)Q_3]$$

$$= H_0 + \frac{(S_1Q_1 + S_2Q_2 + S_3Q_3)}{1+r}H_1$$

$$= H_0 + S(0)H_1 \ .$$

Il est clair que, lorsque la créance éventuelle est négociable, sa valeur est unique et indépendante des nombreuses mesures de probabilité neutres à l'égard du risque. Voilà le cœur d'une évaluation opérée par reproduction.

Dans le cadre d'un modèle particulier, certaines créances éventuelles sont négociables, et d'autres pas. Lorsque les créances éventuelles sont toutes négociables, on considère que le marché est « complet ».

Le marché est complet uniquement si le nombre d'états possibles est égal au nombre de titres indépendants. Ou encore, le marché est complet uniquement si la mesure de probabilité neutre à l'égard du risque est unique. (5)

Je résumerai maintenant la situation pour un modèle d'évaluation en temps discret à période unique : i) dans un marché complet, il n'y a pas d'arbitrage et toutes les créances éventuelles peuvent être évaluées; ii) dans un marché incomplet où existent de multiples mesures de probabilité neutres à l'égard du risque, l'arbitrage n'existe pas et seules les créances éventuelles négociables ou réalisables peuvent être évaluées; les prix des créances non négociables se situent dans une fourchette connue.

Fait remarquable, les résultats que je viens d'exposer s'appliquent aussi aux modèles en temps discret à périodes multiples et aux modèles en temps continu. La généralisation aux modèles à périodes multiples ne faisant pas intervenir de concepts nouveaux, je la sauterai pour ne pas allonger inutilement l'exposé. La généralisation au temps continu oblige à introduire quelques concepts supplémentaires. Par souci de concision, je ne ferai qu'esquisser les principaux concepts de l'évaluation en l'absence d'arbitrage en temps continu.

Évaluation en l'absence d'arbitrage dans un modèle en temps continu

Dans un modèle en temps continu, l'information est révélée par « filtrage », un domaine en expansion de l'algèbre relative aux sous-tribus (*sub*-σ-*algebra)*. Si les processus stochastiques servant à représenter les variables économiques sont l'unique source d'information, nous considérons que les processus sont « adaptés » au filtrage, ce qui signifie que les investisseurs connaissent toujours les prix courants et passés de tous les titres considérés.

Beaucoup d'autres concepts nouveaux sont nécessaires à un exposé complet sur les modèles en temps continu, dont les stratégies d'« autofinancement » et les stratégies d'investissement « admissibles ». En voici une définition peu rigoureuse :

> Une stratégie d'investissement s'autofinance si, une fois lancée, l'investisseur n'y met pas davantage de fonds ni n'en retire.

Harrison et Kreps (1979) ont montré que, si aucune des stratégies d'autofinancement prévues dans un modèle n'entraîne de possibilités d'arbitrage, il existe une mesure de probabilité Q équivalente à P telle que tous les processus de prix actualisés soient des martingales sous Q. Telle est la base de l'évaluation neutre à l'égard du risque et de l'évaluation par reproduction dans un modèle en temps continu. Il manque toutefois un élément au tableau :

> Une stratégie d'autofinancement est admissible si le processus de gain et de perte est une martingale sous Q.

Il est possible de démontrer que, lorsque toutes les stratégies d'investissement sont admissibles, il n'y a aucune possibilité d'arbitrage. Comme dans le cas à temps discret, on considère qu'une créance éventuelle est négociable ou réalisable si l'on peut la reproduire de façon dynamique par une stratégie d'investissement admissible.

Lorsque toutes les stratégies d'investissement sont admissibles, les possibilités d'arbitrage sont exclues et il existe une mesure de probabilité Q équivalente. Une créance éventuelle, si elle est négociable, peut être évaluée par actualisation des gains espérés étant donné Q. Cette méthode se justifie du fait que la valeur d'une créance éventuelle négociable est aussi une martingale sous Q.

Il ne nous reste plus qu'une question à régler : quand une créance éventuelle est-elle négociable? Comme dans le cas à temps discret, toutes les créances éventuelles sont négociables si le marché des titres est complet sur le plan dynamique. C'est le cas lorsque toutes les martingales sous Q

peuvent être représentées comme des intégrales stochastiques par rapport aux prix des actifs à risque sous-jacents définis dans la martingale sous Q. C'est ce qu'on appelle la « propriété de représentation par martingale ». Dans la plupart des cas, des processus de diffusion, de même que des transactions continues, assurent le caractère complet du marché.

En résumé, dans un modèle en temps continu, on peut trouver un prix unique pour une créance éventuelle si le modèle est complet sur le plan dynamique. Dans ce cas, le prix unique est le gain espéré auquel donne lieu la créance d'après la mesure martingale Q équivalente à P, actualisée au taux sûr.

Comparaison des modèles fondés sur la consommation et des modèles basés sur la théorie de l'arbitrage

Il est difficile de déterminer lequel des deux types de modèle est supérieur à l'autre. J'aimerais cependant formuler les observations suivantes.

En premier lieu, ainsi que l'a souligné Carmichael, les modèles fondés sur la consommation offrent un cadre unifié; tous les actifs sont évalués au moyen d'une équation d'Euler, tous les flux étant actualisés au taux marginal de substitution intertemporelle de la consommation. Les modèles font donc habituellement intervenir des paramètres représentant les choix des investisseurs en matière de consommation et leur degré d'aversion pour le risque, ce qui peut compliquer les choses. La plupart des études effectuées dans ce domaine débouchent sur des prix établis pour un « agent représentatif ». On peut se demander dans quelle mesure les profils des investisseurs à l'égard du risque peuvent être semblables. Si l'on recourt à des profils (ou à des fonctions d'utilité) très différents, il est à peu près impossible d'obtenir un prix unique pour un titre. Là encore, comme le montre Carmichael, la fonction d'utilité isoélastique utilisée le plus souvent ainsi que ses variantes donnent de piètres résultats lorsqu'on estime les modèles dérivés d'évaluation à l'aide des données du marché.

En deuxième lieu, les modèles fondés sur la consommation semblent être souvent employés lorsque le marché n'est pas complet. Par exemple, la plupart des modèles de volatilité stochastiques complètent le marché en spécifiant le degré d'aversion des investisseurs pour le risque. Mentionnons à cet égard les travaux de Hull et White (1987), Johnson et Shannon (1987), Scott (1987), Wiggins (1987), Melino et Turnbull (1990), Stein et Stein (1991), Heston (1993) et Duan (1995). L'étude de Duan est unique en ce que : i) elle combine l'approche basée sur la consommation et celle reposant sur la martingale dans un cadre GARCH; ii) l'équation de prix finale est indépendante du paramètre de la fonction d'utilité (mais dépend quand

même de la prime de risque)[1]. Lorsque le marché est incomplet à cause du caractère discontinu de l'information (ou de sauts), on peut également se servir des modèles fondés sur la consommation. L'étude de Naik et Lee (1990) en fournit un exemple.

En troisième lieu, et il s'agit là d'une observation personnelle qui dénote peut-être un manque d'impartialité de ma part, les praticiens semblent préférer les modèles basés sur la théorie de l'arbitrage. Cela vaut tout particulièrement pour la représentation de la structure par échéance des taux d'intérêt et l'évaluation des produits dérivés de taux d'intérêt. Par exemple, les modèles largement utilisés de Heath, Jarrow et Morton (1992) et de Hull et White (1990) ainsi que leurs variantes sont tous fondés sur la théorie de l'arbitrage. L'attrait de ces modèles s'explique en partie par la facilité de l'estimation et l'indépendance des paramètres d'aversion pour le risque.

Il est remarquable que, en excluant l'arbitrage et en s'assurant du caractère complet du marché, les investisseurs puissent s'entendre sur un prix unique à l'égard d'un titre. Après tout, si les attitudes des investisseurs à l'égard du risque étaient différentes, ils ne porteraient pas le même jugement sur le prix d'une même possibilité de gain. Bien entendu, il n'y a là aucune contradiction. Les préférences des investisseurs sont déjà incorporées aux prix des titres sous-jacents. Les créances éventuelles sont, par définition, des titres redondants dans un marché complet et elles ne représentent pas de nouvelles possibilités de consommation. En d'autres termes, l'évaluation des créances éventuelles est un exercice d'établissement de prix relatifs, qui devrait être indépendant du degré d'aversion pour le risque.

Bibliographie

Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*, Paris, Gauthier-Villars.

Black, F. et M. Scholes (1973). « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, vol. 81, nº 3, p. 637-654.

Breeden, D. (1979). « An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities », *Journal of Financial Economics*, vol. 7, nº 3, p. 265-296.

Brennan, M. (1979). « The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models », *Journal of Finance*, vol. 34, nº 1, p. 53-68.

Cox, J. et S. Ross (1976). « The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes », *Journal of Financial Economics*, vol. 3, nºs 1-2, p. 145-166.

Cox, J., J. Ingersoll et S. Ross (1985). « An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices », *Econometrica*, vol. 53, nº 2, p. 363-384.

1. Kallsen et Taqqu (1998) parviennent à « compléter le marché » dans un cadre de type ARCH en laissant le processus évoluer de manière continue entre deux points discrets. Rubinstein (1976) et Brennan (1979) ont montré que, lorsqu'on postulait des combinaisons particulières de distributions et de préférences en matière de consommation, on obtenait des prix neutres à l'égard du risque.

Dothan, M. (1990). *Prices in Financial Markets*, New York, Oxford University Press.
Duan, J. (1995). « The GARCH Option Pricing Model », *Mathematical Finance*, vol. 5, nº 1, p. 13-32.
Duffie, D. (1996). *Dynamic Asset Pricing Theory*, deuxième édition, Princeton (New Jersey), Princeton University Press. Première édition publiée en français : *Modèles dynamiques d'évaluation*, Paris, Presses Universitaires de France, 1994.
Einstein, A. (1905). « On the Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular Kinetic Theory of Heat », *Annals of Physics*, vol. 17, nº 4, p. 891-921.
Harrison, M. et D. Kreps (1979). « Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets », *Journal of Economic Theory*, vol 2, nº 3, p. 381-408.
Heath, D., R. Jarrow et A. Morton (1992). « Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation », *Econometrica*, vol. 60, nº 1, p. 77-105.
Heston, S. (1993). « A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options », *Review of Financial Studies*, vol. 6, nº 2, p. 327-343.
Huang, C. et R. Litzenberger (1988). *Foundations for Financial Economics*, Englewood Cliffs (New Jersey), Prentice Hall.
Hull, J. et A. White (1987). « The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities », *Journal of Finance*, vol. 42, nº 2, p. 281-300.
——— (1990). « Pricing Interest Rate Derivative Securities », *The Review of Financial Studies*, vol. 3, nº 4, p. 573-592.
Ingersoll, J. (1987). *Theory of Financial Decision Making*, Totawa (New Jersey), Rowman and Littlefield Publishers.
Johnson, H. et D. Shannon (1987). « Option Pricing When the Variance is Changing », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 22, nº 2, p. 143-151.
Kallsen, J. et M. Taqqu (1998). « Option Pricing in ARCH-Type Models », *Mathematical Finance*, vol. 8, nº 1, p. 13-26.
Lintner, J. (1965). « The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets », *Review of Economics and Statistics*, vol. 47, nº 1, p. 13-37.
Lucas, R. (1978). « Asset Prices in an Exchange Economy », *Econometrica*, vol. 46, nº 6, p. 1429-1445.
——— (1982). « Interest Rates and Currency Prices in a Two-Country World », *Monetary Economics*, vol. 10, nº 3, p. 335-359.
Melino, A. et S. Turnbull (1990). « Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility », *Journal of Econometrics*, vol. 45, p. 239-265.
Merton, R. (1969). « Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case », *Review of Economics and Statistics*, vol. 51, nº 3, p. 247-257.
——— (1971). « Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model », *Journal of Economic Theory*, vol. 3, nº 4, p. 373-413.
——— (1973). « An Intertemporal Capital Asset Pricing Model », *Econometrica*, vol. 41, nº 5, p. 867-887.
Naik, V. et M. Lee (1990). « General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns », *Review of Financial Studies*, vol. 3, nº 4, p. 493-521.
Neftci, S. (1996). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, San Diego (Californie), Academic Press.
Pliska, S. (1997). *Introduction to Mathematical Finance, Discrete Time Models*, Malden (Massachusetts), Blackwell Publishers.
Ross, S. (1976). « The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing », *Journal of Economic Theory*, vol. 13, nº 3, p. 341-360.
Rubinstein, M. (1976). « The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options », *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 7, nº 2, p. 407-425.

Samuelson, P. (1965). « Rational Theory of Warrant Pricing », *Industrial Management Review*, vol. 6, p. 13-32.

Scott, L. (1987). « Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 22, nº 4, p. 419-438.

Sharpe, W. (1964). « Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk », *Journal of Finance*, vol. 19, nº 3, p. 425-442.

Stein, E. et J. Stein (1991). « Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytical Approach », *Review of Financial Studies*, vol. 4, nº 4, p. 727-752.

Wiggins, J. (1987). « Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates », *Journal of Financial Economics*, vol. 19, nº 2, p. 351-372.