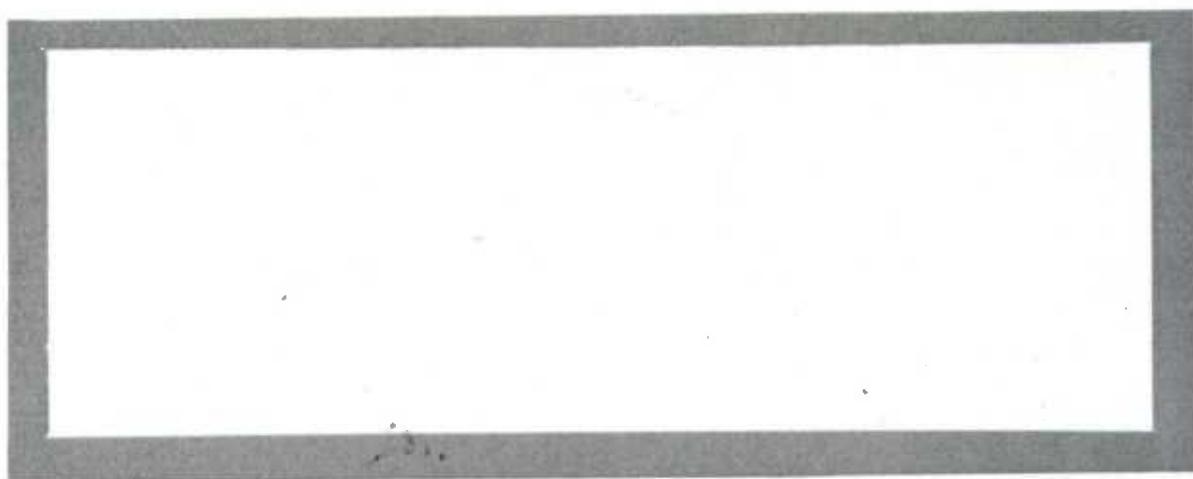




Statistics  
Canada Statistique  
Canada



## Methodology Branch

Time Series Research and Analysis  
Division

## Direction de la méthodologie

Division de la recherche  
et de l'analyse des chroniques

Canada

WORKING PAPER TSRA -85-015E  
TIME SERIES RESEARCH & ANALYSIS DIVISION  
METHODOLOGY BRANCH

CAHIER DE TRAVAIL RASC -85-015F  
DIVISION DE RECHERCHE ET ANALYSE  
DES SERIES CHRONOLOGIQUES  
DIRECTION DE LA METHODOLOGIE

NON-CENTRAL WEIGHTS  
FOR THE HENDERSON  
MOVING AVERAGES

POIDS NON CENTRAUX  
POUR LES MOYENNES MOBILES  
HENDERSON

by  
Pierre A. Cholette

par  
Pierre A. Cholette

This is a preliminary version. Do not quote without author's permission.  
Comments are welcome.

## INTRODUCTION \*

Pour estimer la composante cyclo-tendancielle des séries trimestrielles, la méthode de désaisonnalisation X-11-ARMMI (Dagum, 1980) offre le choix à l'utilisateur de deux moyennes mobiles: la moyenne Henderson à 5 termes et la moyenne Henderson à 7 termes. Pour cette dernière cependant, les poids non centraux (asymétriques) sont identiques à ceux de la moyenne à 5 termes (Ibidem, Appendice B). L'usager n'a donc pas véritablement le choix de la moyenne à utiliser pour les trois dernières valeurs estimées d'une série.

Ce travail élabore des poids non centraux pour la moyenne mobile Henderson à 7 termes. Ces poids s'avèrent détenir des propriétés spectrales acceptables.

La méthodologie utilisée pour la Henderson à 7 termes est ensuite reprise pour trouver de nouveaux poids non centraux pour les moyennes Henderson à 5, 9, 13 et 23 termes. Ces poids ont plus de décimales que leurs homologues consignés par Shiskin et al. (1967) et par Dagum (1980). Ils provoquent également un moins grand déphasage des cycles économiques en fin de série.

## INTRODUCTION \*

The X-11-ARIMA seasonal adjustment method (Dagum, 1980) gives the user the choice between two moving averages to estimate the trend-cycle component of quarterly series: the 5-term Henderson average and the 7-term Henderson average. For the latter, however, the non-central (asymmetric) weights are the same as those of the 5-term average (Ibidem, Appendix B). Therefore, for the last three estimates of a series, the user does not really have the choice of the moving average to be used.

This paper develops non-central weights for the 7-term Henderson moving average. These weights are found to have acceptable spectral properties.

The methodology used for the 7-term Henderson is then applied to find alternative non-central weights for the 5-, 9-, 13- and 23-term Henderson averages. These weights have more decimals than their counterparts tabulated in Shiskin et al. (1967) and in Dagum (1980). They also cause lower phase shift of the economic cycles at the end of series.

---

\* Je dois remercier mon collègue Normand Laniel pour avoir suggéré des améliorations à la rédaction originale.

---

\* I must thank my colleague Normand Laniel who suggested improvements to the original draft.

## 1. POIDS DE LA HENDERSON À 7 TERMES

Le tableau 1 montre les poids de la moyenne mobile Henderson à 7 termes élaborés dans ce travail. Les poids de la rangée 7 servent à produire la dernière valeur estimée N d'une série de N termes; ceux de la rangée 6, l'avant-dernière valeur estimée N-1; et ainsi de suite. Les **poids centraux** sont symétriques et se trouvent dans la rangée 4. Ils servent à calculer les valeurs estimées correspondant aux périodes de temps 4 à N-3 d'une série. (Pour les trois premières valeurs estimées, on applique respectivement les poids des rangées 7, 6 et 5 dans l'ordre inverse.)

Tableau 1: Poids  $h_{ij}$  proposés pour la moyenne mobile cyclique Henderson à 7 termes

i	j=1, ..., 7							est.
4	-.0587413	.0587413	.2937063	.4125874	.2937063	.0587413	-.0587413	N-3
5	.0	-.0427666	.0785499	.2932499	.3833765	.2531306	.0344597	N-2
6	.0	.0	-.0493961	.0694215	.2937063	.4019072	.2843611	N-1
7	.0	.0	.0	-.1950242	.0338207	.5144310	.6457724	N

## 2. ANALYSE SPECTRALE DE LA HENDERSON À 7 TERMES

La figure 1 superpose les fonctions de gain des poids centraux et des poids non centraux de la moyenne Henderson à 7 termes proposée. Le gain des poids centraux indique qu'ils conservent les fréquences cycliques 1/60 à 10/60 dans une grande proportion et qu'ils éliminent largement les fréquences irrégulières (et saisonnières). La fréquence 10/60 correspondant à un cycle économique de 6 trimestres (60/10), cette performance est acceptable.

Idéalement, les gains relatifs aux poids non centraux devraient ressembler le plus possible au gain central. Or cette ressemblance devient moins évidente à mesure que les poids

## 1. WEIGHTS OF THE 7-TERM HENDERSON

Table 1 displays the weights of the 7-term Henderson moving average developed in this paper. The weights in row 7 are used to derive the last estimate N of a N-term series; those in row 6; the first-before-last estimate N-1; and so on. The **central weights** are symmetric and lie in row 4. They are used to calculate the estimates corresponding to time periods 4 to N-3 of a series. (For the three first estimates, the weights in row 7, 6 and 5 are respectively applied in the reverse order.)

Table 1: Proposed  $h_{ij}$  weights of the 7-term Henderson cyclical moving average

## 2. SPECTRAL ANALYSIS OF THE 7-TERM HENDERSON

Figure 1 displays the gain functions of the central and non-central weights of the proposed 7-term Henderson average. The gain of the central weights indicates that they quite extensively preserve cyclical frequencies 1/60 to 10/60 and that they eliminate much of the irregular (and seasonal) frequencies. This performance is acceptable since frequency 10/60 corresponds to a 6-quarter economic cycle.

Ideally, the gain associated with the non-central weights should as much as possible be similar to the central gain. This similarity, however, becomes less obvious as the

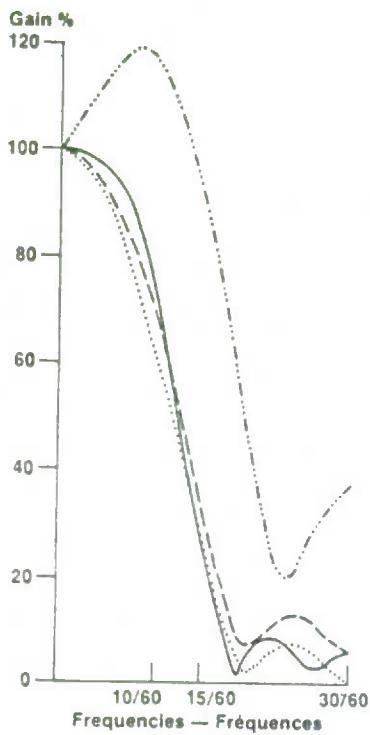


Figure 1: Gains des poids centraux de la moyenne Henderson à 7 termes (ligne continue) et des poids non centraux élaborés dans ce travail pour les valeurs estimées N-2 (pointillée), N-1 (tirets) et N (ligne du haut)

Figure 1: Gain of the central weights of the 7-term Henderson average (solid curve) and of the non-central weights derived in this paper for estimates N-2 (dotted), N-1 (dashed) and N (upper curve)

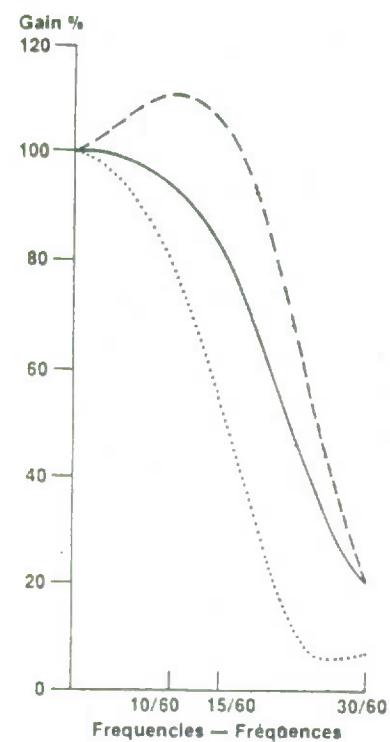


Figure 2: Gains of the central weights (dotted curve) and of the end weights of the 5-term Henderson according to Shiskin (solid curve) and according to the method used in this paper (dashed)

Figure 2: Gains des poids centraux (ligne pointillée) et des poids terminaux de la Henderson à 5 termes selon Shiskin (ligne continue) et selon la méthode utilisée dans ce travail (tirets)

Tableau 2: Déphasages produits par les poids non centraux  $h_{ij}$  de la moyenne mobile Henderson à 7 termes proposés dans ce travail, à quelques fréquences cycliques, en nombre de trimestres

TABLE 2: Phase shifts produced by the non-central weights  $h_{ij}$  of the 7-term Henderson moving average proposed in this paper, at some cyclical frequencies, in number of quarters

i	fréquence / frequency						estimate / estimation
	2/60	4/60	6/60	8/60	10/60		
5	0.01	0.02	0.05	0.07	0.11	N-2	
6	0.01	0.02	0.04	0.07	0.09	N-1	
7	0.03	0.11	0.21	0.31	0.40	N	

se rapportent à la dernière valeur estimée. La dissemblance culmine en effet pour les **poids terminaux** relatifs à la dernière valeur estimée N. Le gain de ceux-ci enregistre une amplification de plusieurs fréquences cycliques et une conservation appréciable des autres fréquences. (Cette évolution de la dissemblance se retrouve pour les moyennes à 5, 9, 13 et 23 termes.) Le maintien accru des fréquences irrégulières (voisines de 30/60) par les poids terminaux signifie que la dernière valeur estimée N d'une série sera moins fiable que la valeur estimée N-1 et moins encore que les valeurs estimées centrales 4 à N-3, engendrées par les poids centraux.

Le tableau 2 consigne les déphasages introduits aux fréquences cycliques par les poids proposés. Les poids centraux ne provoquent aucun déphasage puisqu'ils sont symétriques. Les déphasages apparaissent pour la valeur estimée N-2 et N-1, mais demeurent négligeables. Par exemple, la valeur estimée N-1 sera déphasée de 0.09 trimestre à la fréquence 10/60. C'est-à-dire que si la série traitée contient un cycle de 6 trimestres (60/10), l'estimation reproduira ce mouvement avec un délai de 0.09 trimestre. Pour la dernière valeur estimée N, les déphasages deviennent plus importants aux fréquences correspondant aux cycles économiques rapides, mais demeurent négligeables pour les cycles plus lents. Ainsi le cycle de 6 trimestres souffrira un délai appréciable de 0.40 trimestre contrairement à un faible délai de 0.11 trimestre pour un cycle plus lent de 15 trimestres (60/4).

Il faut avoir à l'esprit ces propriétés des poids lorsqu'on choisit une moyenne mobile pour une série. Si celle-ci ne contient pas de cycles économiques rapides, la moyenne Henderson à 7 termes sera plus appropriée que si la série accuse des cycles rapides. (Pour plus de détails quant à l'analyse spectrale appliquée aux moyennes mobiles, voir par exemple Laroque, 1977, Wallis 1982 ou Dagum 1982.)

weights pertain to the last estimate. Indeed, the dyssimilarity is maximum for the **end weights** relative to the last estimate N. The gain of these weights shows an amplification of some cyclical frequencies and a considerable preservation of the other frequencies. (This behaviour of the dyssimilarity is also encountered for the 5-, 9-, 13- and 23-term averages.) This increased preservation of the irregular frequencies (near 30/60) by the end weights means that the last estimate N will be less reliable than estimate N-1; and even less reliable than the central estimates 4 to N-3, generated by the central weights.

Table 2 presents the phase shifts introduced at the cyclical frequencies by the proposed weights. The central weights do not induce any phase shift, since they are symmetric. The phase shifts appear for estimates N-2 and N-1, but remain negligible. For instance, estimate N-1 will be phased by 0.09 quarter at frequency 10/60. In other words, for a series containing a cycle of 6 quarters (60/10), the estimation will reproduce the movement with a 0.09-quarter delay. The phase shifts become more important for the last estimate N at the frequencies corresponding to more rapid economic cycles, but remain negligible for slower cycles. The 6-quarter cycle will thus undergo a sizable delay of 0.40 quarter as opposed to a slight delay of 0.11 quarter for a slower 15-quarter (60/4) cycle.

These properties of weights must be kept in mind when choosing a moving average for a series: If the series considered does not contain fast economic cycles, the 7-term Henderson will be more appropriate than if the series displays rapid cycles. (For more details regarding spectral analysis applied to moving averages, see for instance Laroque 1977, Wallis 1982, Dagum 1982.)

Tableau 3: Poids  $h_{ij}$  proposés pour les moyennes mobiles Henderson à 5, 9, 13 et 23 termes (poids terminaux correspondants de Shiskin entre parenthèses)

TABLE 3: Proposed weights  $h_{ij}$  for the 5-, 9-, 13- and 23-term moving averages (corresponding Shiskin end weights between brackets)

A: 5 termes / 5-term						
i	j=1,...,5					est.
3	-.0734266	.2937063	.5594406	.2937063	-.0734266	N-2
4	.0	-.0356008	.3026065	.5015893	.2314050	N-1
5	.0	.0	-.1958042	.3916084	.8041958	N
			(-.073)	( .403)	( .670)	

C: 13 termes / 13-term j=1,...,13										est.	
i											
7	-.0193498	-.0278638	-.0000000	.0654918	.1473565	.2143367	.2400572	.2143367		N-6	
	.1473565	.0654918	-.0000000	-.0278638	-.0193498						
8	.0	-.0182083	-.0250548	.0039042	.0691015	.1490916	.2130777	.2355959		N-5	
	.2074943	.1397338	.0589123	-.0042001	-.0294480						
9	.0	.0	-.0155937	-.0190452	.0113998	.0746040	.1493690	.2067235		N-4	
	.2237699	.1935717	.1279454	.0524004	-.0051448						
10	.0	.0	.0	-.0136149	-.0150876	.0151774	.0754674	.1458432		N-3	
	.1996719	.2162146	.1892544	.1291326	.0579410						
11	.0	.0	.0	.0	-.0182354	-.0250914	.0040297	.0697689		N-2	
	.1508360	.2164222	.2407994	.2142912	.1471794						
12	.0	.0	.0	.0	.0	-.0408252	-.0661813	-.0275068		N-1	
	.0765528	.2038621	.2958968	.3108066	.2473949						
13	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	-.1008211	-.1561683	N	
	-.0614879	.1540632	.3638444	.4418412	.3587284			(-.092)	(-.058)		
	( .012)	( .120)	( .244)	( .353)	( .421)						

Tableau 3 - suite

TABLE 3 - continuation

i	D: 23 termes / 23-term j=1,...,23										est.
12	-.0042783	-.0109181	-.0156869	-.0145275	-.0049479	.0134300	.0389329	.0683033		N-11	
	.0973955	.1219490	.1383179	.1440602	.1383179	.1219490	.0973955	.0683033			
	.0389329	.0134300	-.0049479	-.0145275	-.0156869	-.0109181	-.0042783				
13	.0	-.0042334	-.0107784	-.0154211	-.0141336	-.0044550	.0139670	.0394429		N-10	
	.0687100	.0976290	.1219561	.1380696	.1435562	.1375874	.1210477	.0963991			
	.0672980	.0380037	.0126488	-.0055340	-.0149047	-.0158778	-.0109776				
14	.0	.0	-.0040888	-.0103355	-.0145940	-.0129369	-.0030028	.0154836		N-9	
	.0407910	.0696553	.0979742	.1215724	.1369182	.1416960	.1351698	.1182970			
	.0935824	.0646858	.0358271	.0110591	-.0064960	-.0153209	-.0159370				
15	.0	.0	.0	-.0038141	-.0095096	-.0130867	-.0108178	-.0005284		N-8	
	.0179263	.0427621	.0707456	.0978795	.1201486	.1342102	.1379367	.1307488			
	.1137028	.0893235	.0612020	.0334035	.0097593	-.0068560	-.0151363				
16	.0	.0	.0	.0	-.0034376	-.0084040	-.0111267	-.0081645		N-7	
	.0024102	.0205938	.0445784	.0712292	.0967470	.1173767	.1300505	.1328816			
	.1254513	.1088601	.0855407	.0588569	.0325418	.0100543	-.0060398				
17	.0	.0	.0	.0	.0	-.0030824	-.0073970	-.0094208		N-6	
	-.0059951	.0045945	.0222546	.0452257	.0705439	.0946643	.1141167	.1260901			
	.1283697	.1220786	.1067029	.0849054	.0596626	.0342839	.0119025				
18	.0	.0	.0	.0	.0	.0	-.0030058	-.0072291		N-5	
	-.0092458	-.0059679	.0043089	.0215489	.0441058	.0691572	.0932945	.1131417			
	.1259075	.1298003	.1242635	.1100152	.0889057	.0636310	.0373685				
19	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	-.0036470		N-4	
	-.0090902	-.0124925	-.0102608	-.0002687	.0176855	.0419659	.0695416	.0966225			
	.1193503	.1344389	.1396805	.1342652	.1188861	.0956315	.0676912				
20	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0		N-3	
	-.0056920	-.0147164	-.0216579	-.0212899	-.0104086	.0114325	.0419995	.0770101			
	.1110895	.1388448	.1558835	.1596262	.1497911	.1284561	.0996315				
21	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0		N-2	
	.0	-.0101691	-.0265123	-.0397729	-.0412160	-.0258506	.0063758	.0509055			
	.0999439	.1444284	.1761672	.1897552	.1838954	.1617867	.1302628				
22	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0		N-1	
	.0	.0	-.0186035	-.0477238	-.0702364	-.0711458	-.0434232	.0103591			
	.0794938	.1486331	.2022652	.2291535	.2257484	.1976053	.1578743				
23	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0		N	
	0.	.0	.0	-.0332824	-.0827030	-.1164830	-.1098436	-.0551421			
	.0368638	.1420181	.2314609	.2814686	.2819163	.2408719	.1828545				
	( .039)	( .084)	( .133)	( .182)	( .227)	( .263)	( .288)				

( ) poids traditionnels / traditional weights

### 3. POIDS DES MOYENNES HENDERSON À 5, 9, 13 ET 23 TERMES

Le tableau 3 présente les poids des moyennes Henderson à 5, 9, 13 et 23 termes calculés selon la méthode suggérée à la section 5. Les poids terminaux (relatifs à la valeur estimée N) proposés sont accompagnés entre parenthèses des poids terminaux traditionnels correspondants de Shiskin (1967).

Sauf pour la moyenne à 5 termes, les poids terminaux élaborés ici accordent moins de pondération à la dernière observation que ne le font ceux de Shiskin. Cela constitue un avantage en soi dans la mesure où les dernières observations sont moins fiables et plus sujettes à révision. Sous ce rapport, les poids à 5 termes de Shiskin s'avèrent préférables.

### 4. ANALYSE SPECTRALE DES POIDS TERMINAUX DES MOYENNES À 5, 9, 13 ET 23 TERMES

Les figures 2 à 5 présentent les gains des poids terminaux (relatifs à la dernière valeur estimée N) des moyennes Henderson à 5, 9, 13 et 23 termes, élaborés selon la méthode de la section 5. Chaque gain est accompagné du gain des poids terminaux correspondants de Shiskin et al. (1967) et du gain des poids centraux. (Les gains afférents aux autres valeurs estimées résident entre les gains central et terminal.) Le tableau 4 consigne les déphasages enregistrés par les poids terminaux proposés pour les moyennes à 5, 9, 13 et 23 termes, à certaines fréquences cycliques choisies. Ces déphasages, exprimés en nombre de mois (ou de trimestres dans le premier cas), sont suivis des déphasages des poids terminaux correspondants de Shiskin.

a) Analyse de la moyenne à 5 termes - Selon la figure 2, les poids terminaux proposés pour la moyenne Henderson à 5 termes amplifient les fréquences cycliques (à gauche de 10/360) et conservent les fréquences irrégulières (à droite) davantage que les poids traditionnels de Shiskin.

### 3. WEIGHTS OF THE 5-, 9-, 13- AND 23-TERM HENDERSON AVERAGES

Table 3 displays the weights of 5-, 9-, 13- and 23-term Henderson averages derived according to the method suggested in Section 5. The proposed end weights (relative to estimate N) are accompanied, between brackets, by the corresponding traditional end weights of Shiskin (1967).

Except for the 5-term average, the end weights derived herein attribute less weight to the last observation than their counterparts. This constitute an advantage per se, to the extent that the last observations are less reliable and are more subject to revision. In that respect, the 5-term weights of Shiskin prove preferable.

### 4. SPECTRAL ANALYSIS OF THE 5-, 9-, 13- AND 23-TERM AVERAGE END WEIGHTS

Figure 2 to 5 display the gains of the end weights (relative to last estimate N) of the 5-, 9-, 13- and 23-term Henderson averages, derived according to the method of Section 5. Each gain is accompanied by the gain of the corresponding end weights of Shiskin et al. (1967) and by the gain of the central weights. (The gains pertaining to the other estimates lie between the central and terminal gains.) Table 4 contains the phase shifts recorded for the end weights proposed for the 5-, 9-, 13- and 23 term averages at selected cyclical frequencies. Expressed in number of months (or quarters in the first case), these shifts are followed between brackets by the phase shifts of the corresponding end weights of Shiskin.

a) Analysis of the 5-term average - According to Figure 2, the end weight proposed for the 5-term Henderson average amplify the cyclical frequencies (left of 10/360) and preserve the irregular frequencies (right) more than the traditional Shiskin weights. This should trans-

Cela devrait se traduire par des valeurs estimées moins fiables avec les poids proposés. Du point de vue du gain, les poids de Shiskin s'avèrent donc préférables.

Du point de vue du déphasage toutefois, la situation opposée prévaut. Comme en témoigne le tableau 3, les poids traditionnels retardent de 0.26 trimestre même les cycles lents de 30 trimestres. Par contre, les poids proposés enregistrent un déphasage négligeable de 0.01 trimestre à la fréquence impliquée (2/60) et des déphasages inférieurs aux fréquences associées aux cycles plus rapides: 0.07 trimestres contre 0.27 à la fréquence 6/60, 0.11 contre 0.28 à la fréquence 8/60 et 0.15 contre 0.29 à la fréquence 10/60 (cycle de 6 trimestres).

late by less reliable estimates with the proposed weights. From the viewpoint of the gain, the Shiskin weights then prove preferable.

With respect to the phase shift, however, the opposite situation prevails. As testified by Table 3, the traditional end weights even delay the slow cycle of 30 quarters by 0.26 quarter. The proposed weights, on the other hand, score a negligible 0.01-quarter phase shift at the implied frequency (2/60) and lower phase shifts at the frequencies associated to faster cycles: 0.07 quarters against 0.27 at frequency 6/60, 0.11 against 0.28 at frequency 8/60 and 0.15 against 0.29 at frequency 10/60 (6-quarter cycle).

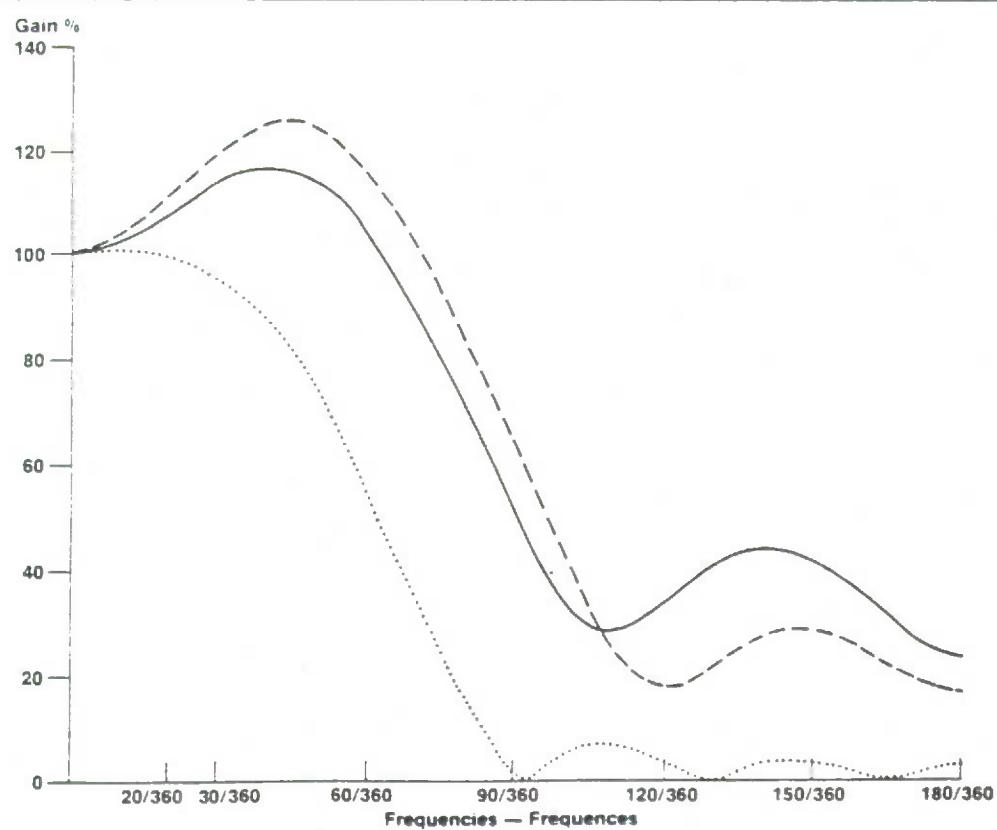


Figure 3: Gains des poids centraux (ligne pointillée) et des poids relatifs à la valeur estimée N de la Henderson à 9 termes selon Shiskin (ligne continue) et selon la méthode utilisée dans ce travail (tirets)

Figure 3: Gains of the central weights (dotted curve) and of the weights of the 9-term Henderson for estimate N according to Shiskin (solid curve) and according to the method used in this paper (dashed)

En privilégiant le critère du déphasage, on préférera les poids terminaux proposés pour la moyenne à 5 termes; en priviligeant le critère du gain, les poids terminaux traditionnels. On peut cependant dire que pour les séries contenant peu de fluctuations irrégulières ou bien beaucoup de cycles économiques rapides, les poids proposés sont préférables.

**b) analyse des moyennes à 9, 13 et 23 termes** - Selon les figures 3 à 5, les poids terminaux proposés pour les moyennes à 9, 13 et 23 termes amplifient les fréquences cycliques et éliminent les fréquences irrégulières rapides (à droite de l'abscisse) plus que leurs homologues de Shiskin. (Dans certains cas, la fréquence saisonnière fondamentale 30/360 est am-

If the phase shift criterion is considered more important, the 5-term average should be preferred. If the gain criterion matters more, one would prefer the traditional weights. It can, however, be stated that for series containing few irregular fluctuations or many fast economic cycles, the proposed weights are preferable.

**b) Analysis of the 9-, 13- and 23-term averages** - According to Figures 3 to 5, the end weights proposed for the 9-, 13- and 23-term averages amplify the cyclical frequencies and reduce the faster irregular frequencies (on the right of the abscissa) more than their Shiskin counterparts. (In some cases, the fundamental seasonal frequency

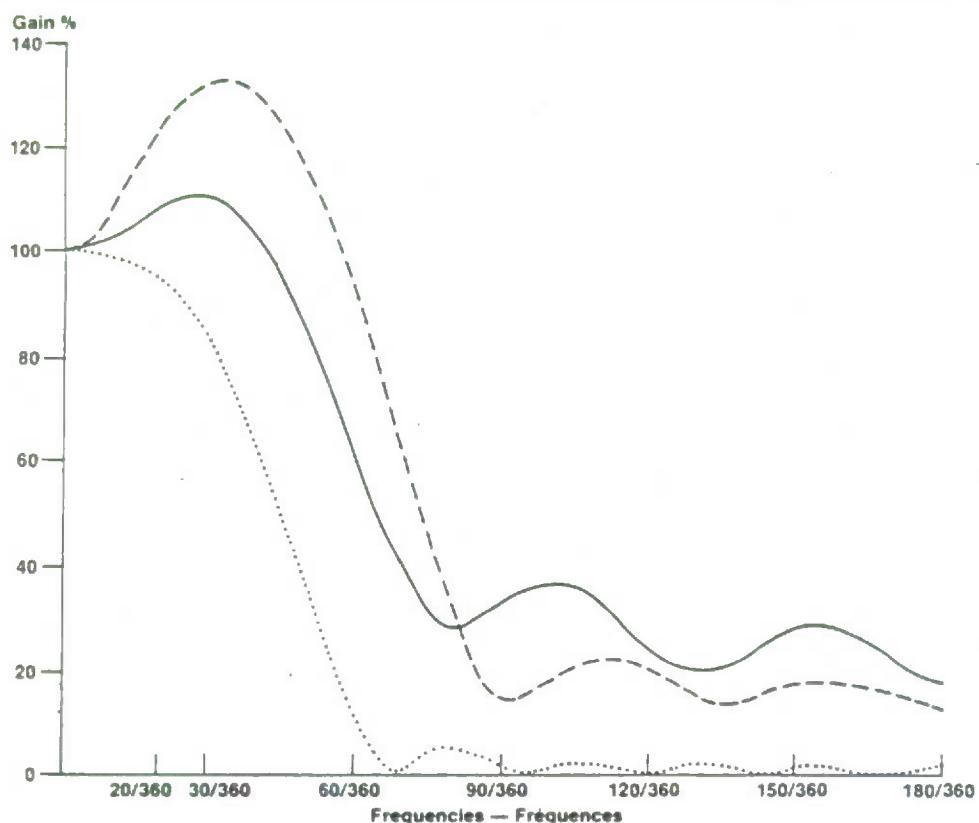


Figure 4: Gains des poids centraux (ligne pointillée) et des poids relatifs à la valeur estimée N de la Henderson à 13 termes selon Shiskin (ligne continue) et selon la méthode utilisée dans ce travail (tirets)

Figure 4: Gains of the central weights (dotted curve) and of the weights of the 13-term Henderson for estimate N according to Shiskin (solid curve) and according to the method used in this paper (dashed)

plifiée. Mais cela n'importe pas parce que les séries traitées ont déjà été désaisonnalisées).

La réduction supérieure de l'irrégularité rapide par les poids proposés se traduira généralement par une fiabilité améliorée des valeurs estimées. L'amplification supérieure des cycles rapides de 18 mois et plus (à gauche de 20/360) devrait faciliter la détection des changements cycliques récents par le conjoncturiste. Du point de vue du gain, on peut conclure que les performances des poids terminaux proposés sont au moins aussi satisfaisantes que celles des poids traditionnels déjà existant pour les moyennes à 9, 13 et 23 termes.

30/360 is amplified, but this does not matter since the series processed were already seasonally adjusted.)

This greater reduction of faster irregularity by the weights proposed will generally translate into an improved reliability of the estimates. The higher amplification of the rapid cycles of 18 months and more (left of 20/360) should enable the current economic analyst to detect recent cyclical changes more easily. From the point of view of the gain, one can conclude that the performances of the proposed end weights are at least as satisfactory as the traditional weights already available for the 9-, 13- and 23-term averages.

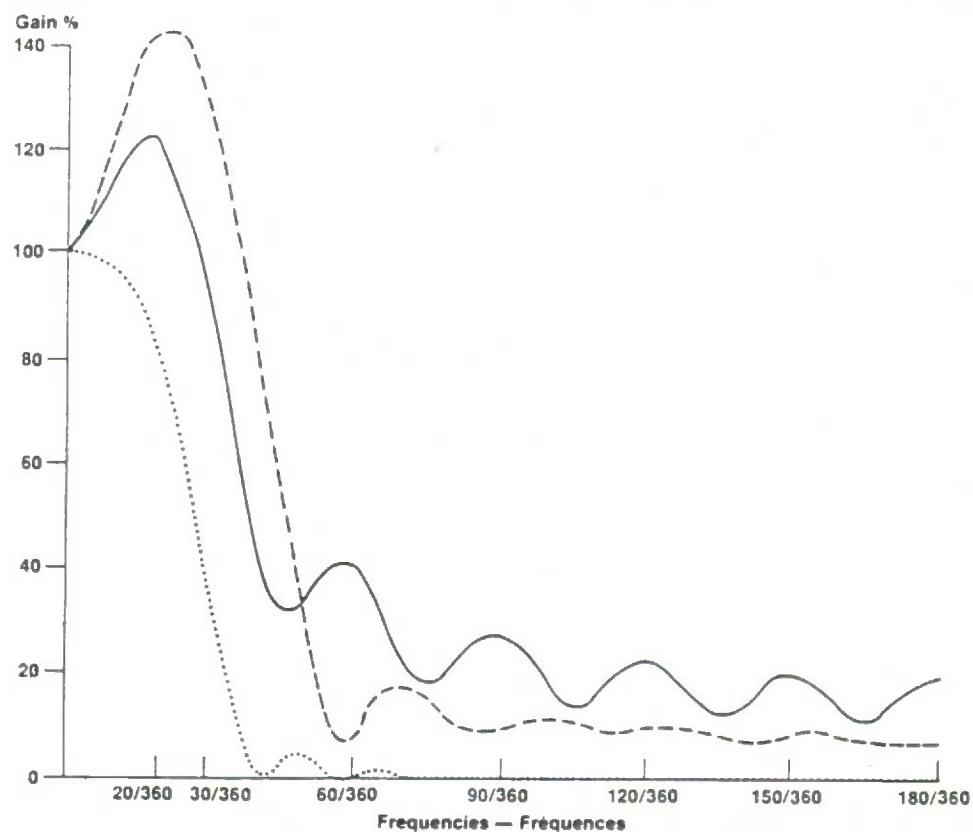


Figure 5: Gains des poids centraux (ligne pointillée) et des poids relatifs à la valeur estimée N de la Henderson à 23 termes selon Shiskin (ligne continue) et selon la méthode utilisée dans ce travail (tirets)

Figure 5: Gains of the central weights (dotted curve) and of the weights of the 23-term Henderson for estimate N according to Shiskin (solid curve) and according to the method used in this paper (dashed)

La situation est plus tranchée pour les déphasages. Les poids de Shiskin engendrent des déphasages plus prononcés: Par exemple, un cycle de 36 mois (fréquence 10/360) essuira un délai de 0.49 mois avec les poids terminaux traditionnels de la Henderson à 13 termes contre 0.17 avec les poids proposés; un cycle de 60 mois (6/360), 0.44 contre 0.07.

À la fréquence 20/360 (cycle de 18 mois) cependant, la situation inverse prévaut pour la moyenne à 23 termes: les poids terminaux proposés provoquent un déphasage de 1.90 mois contre 1.78 pour les poids traditionnels. Mais la Henderson à 23 termes ne devrait justement pas être utilisée pour les séries à fréquences cycliques aussi rapides. Dans la mesure où l'on observe cette prescription, on peut conclure que les poids terminaux proposés pour les moyennes Henderson à 9, 13 et 23 termes déphasent moins les cycles économiques pertinents que leurs homologues de Shiskin.

Tableau 4: Déphasages produits par les poids terminaux  $h_{nj}$  proposés pour les moyennes Henderson, comparés à ceux des poids correspondants de Shiskin (entre parenthèses), en nombre de mois ou de trimestres

The situation is more clear-cut for the phase shifts. The Shiskin weights generate greater phase shifts: For instance, cycles of 36 months (frequency 10/360) will be delayed by 0.49 month with the traditional end weights of the 13-term Henderson againts 0.17 month with the proposed weights; cycles of 60 months (6/360), 0.44 againts 0.07.

At frequency 20/360 (18-month cycle), however, the reverse situation prevails for the 23-term average, since the proposed end weights causes a 1.90-month phase shift against 1.78 for the traditional weights. But the 23-term Henderson should not be used for series with such fast cyclical frequencies. To the extent this rule is applied, one concludes that the end weights proposed for the 9-, 13- and 23-term Henderson averages produce less shift of the relevant economic cycles than their Shiskin counterpart.

TABLE 4: Phase shifts produced by the end weights  $h_{nj}$  proposed for the Henderson averages compared to the phase shifts of the corresponding weights of Shiskin (in brackets), in number of months or quarters

moyenne	fréquence / frequency				average
	2/60	6/60	8/60	10/60	
5 termes	0.01 (0.26)	0.07 (0.27)	0.11 (0.28)	0.15 (0.29)	5-term
	fréquence / frequency				
	6/360	10/360	14/360	20/360	
9 termes	0.02 (0.08)	0.05 (0.11)	0.10 (0.15)	0.18 (0.21)	9-term
13 termes	0.07 (0.44)	0.17 (0.49)	0.30 (0.56)	0.51 (0.68)	13-term
23 termes	0.37 (0.58)	0.84 (0.94)	1.31 (1.32)	1.90 (1.78)	23-term

Puisque les poids terminaux proposés ont des gains au moins aussi acceptables que ceux des poids traditionnels correspondants et puisque leurs déphasages sont inférieurs, on conclut que les poids non centraux élaborés dans ce travail pour les moyennes Henderson à 9, 13 et 23 termes devraient être utilisés.

## 5. ÉLABORATION DES POIDS DES MOYENNES HENDERSON

Henderson (1916) écrit qu'on peut obtenir les poids centraux d'une moyenne Henderson à  $n$  termes de trois manières différentes. L'une d'elles consiste à ajuster une parabole temporelle à un intervalle de  $n$  termes et à considérer les poids implicites associés à la valeur estimée centrale de l'intervalle comme ceux de la moyenne Henderson centrale à  $n$  termes. Cette approche est reprise ici, car elle indique des voies possibles à l'établissement de poids non centraux.

a) les poids centraux - Soit  $y_t$  ( $t=1, \dots, n$ ) les observations d'un intervalle de  $n$  termes d'une série chronologique de  $N$  termes ( $n \leq N$ ). Sur cet intervalle, on suppose que les observations suivent un polynôme du second degré, à une erreur aléatoire  $u_t$  près:

$$(1) \quad y_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + u_t, \quad t=1, \dots, n. \quad (1)$$

Sous forme matricielle, cette équation devient

$$(2) \quad \begin{matrix} y \\ nx1 \end{matrix} = \begin{matrix} T \\ nx3 \end{matrix} \begin{matrix} b \\ 3x1 \end{matrix} + \begin{matrix} u \\ nx1 \end{matrix}, \quad (2)$$

où la matrice  $T$  renferme les puissances du temps et le vecteur  $b$ , les paramètres recherchés:

$$(3) \quad \begin{matrix} T' \\ 3xn \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} b \\ 3x1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

L'estimation par les moindres carrés généralisés (Aitken, 1935) donne les valeurs suivantes des paramètres:

The proposed weights have gains which are at least as acceptable as those of the corresponding traditional weights. Moreover their phase shifts are lower. One concludes that the non-central weights developed in this paper for the 9-, 13- and 23-term Henderson averages should be used.

## 5. DERIVING THE WEIGHTS OF THE HENDERSON AVERAGES

Henderson (1916) writes that the central weights of an  $n$ -term Henderson average can be obtained in three different manners. One way consists of fitting a time parabola to a  $n$ -term interval and of considering the implicit weights pertaining to the central estimate of the interval as those of the central  $n$ -term Henderson. This approach is described again here, as it indicates possible avenues to derive non-central weights.

a) The central weights - Let  $y_t$  ( $t=1, \dots, n$ ) be the observations of an  $n$ -term interval of a  $N$ -term time series ( $n \leq N$ ). On this interval, the observations are assumed to behave as a second degree time polynomial plus a random error  $u_t$ :

In matrix algebra that equation becomes

where matrix  $T$  contains the powers of time and vector  $b$  the desired parameters:

$$\begin{matrix} T' \\ 3xn \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} b \\ 3x1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Estimation by means of generalized least squares (Aitken, 1935) yields the following estimates of the parameters:

$$(4) \quad \underline{b}^* = [\underline{T}' \underline{V}^{-1} \underline{T}]^{-1} \underline{T}' \underline{V}^{-1} \underline{y}, \quad (4)$$

où  $V$  désigne la matrice de covariance des résidus de Aitken. Les valeurs ajustées correspondantes sont

$$(5) \quad \underline{y}^* = \underline{T} \underline{b}^* = \underline{T} [\underline{T}' \underline{V}^{-1} \underline{T}]^{-1} \underline{T}' \underline{V}^{-1} \underline{y} = [\underline{p}_{ij}]_{nxn} \underline{y}, \quad (5)$$

où  $p_{ij}$  sont les poids directement applicables aux  $n$  observations de l'intervalle pour obtenir la  $i^e$  valeur ajustée  $y^*_{ij}$ .

Les poids  $p_{qj}$ , situés dans la  $q^e$  rangée (centrale) de  $[\underline{p}_{ij}]$ , s'avèrent identiques aux poids centraux  $h_{qj}$  d'une moyenne mobile Henderson à  $n$  termes (de Fontenay et Prieuret, 1972; Wallis, 1981), si  $n$  vaut  $2q-1$  et si la matrice de covariance utilisée dans (5) est

$$(6) \quad \underline{V}_{nxn} = \begin{vmatrix} 20 & -15 & 6 & -1 & 0 & \dots \\ -15 & 20 & -15 & 6 & -1 & \dots \\ 6 & -15 & 20 & -15 & 6 & \dots \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & \dots \\ 0 & -1 & 6 & -15 & 20 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}. \quad (6)$$

(Cette matrice est telle que  $\underline{z}' \underline{V} \underline{z}$  est la somme des carrés des tierces différences du vecteur  $\underline{z}$ .)

Les poids centraux des moyennes Henderson sont donc ceux qu'on obtient en ajustant une parabole aux observations au moyen des moindres carrés généralisés. Les moyennes Henderson centrales reproduisent donc une parabole (et même une cubique: Whittaker et Robinson, 1924, p. 295).

**b) les poids non centraux** - Une manière naturelle de trouver des poids non centraux d'une moyenne mobile Henderson à  $n$  termes, qui serait consistante avec l'approche utilisée pour les poids centraux, serait la suivante. Il suffirait simplement d'assimiler les poids dans la  $n^e$  rangée de  $[\underline{p}_{ij}]$  de l'équation (5) aux poids relatifs à la dernière valeur estimée de la Henderson à  $n$  termes; les poids

where  $V$  stands for the residual covariance matrix of Aitken. The corresponding fitted values are

where  $p_{ij}$  are the weights directly applicable to the  $n$  observations of the interval to obtain the  $i$ -th fitted value  $y^*_{ij}$ .

The weights  $p_{qj}$ , located in the (middle)  $q$ -th row of  $[\underline{p}_{ij}]$ , are identical to the central weights  $h_{qj}$  of a  $n$ -term Henderson moving average (de Fontenay and Prieuret, 1972; Wallis, 1981), if  $n$  equals  $2q-1$  and if the covariance matrix used in (5) is

(This matrix is such that  $\underline{z}' \underline{V} \underline{z}$  is the sum of squared third differences of vector  $\underline{z}$ .)

The central weights of Henderson averages are then those obtained from fitting a parabola to the observations by means of generalized least squares. The central Henderson averages consequently reproduce a parabola (and also a cubic: Whittaker and Robinson, 1924, p. 295).

**b) The non-central weights** - A natural way of finding non-central weights for a  $n$ -term Henderson moving average, which would be consistent with the approach used for the central weights, would be as follows. One could simply set the weights of the last estimate by the  $n$ -term Henderson equal to the weights in the  $n$ -th row of  $[\underline{p}_{ij}]$  of equation (5); those of the first-be-

dans l'avant-dernière rangée, aux poids relatifs à l'avant-dernière valeur estimée; etc. Toutes les valeurs estimées résideraient ainsi sur une même parabole sur l'intervalle de  $n$  termes.

Mais de tels poids non centraux manifestent des propriétés spectrales inacceptables. Selon les fonctions de gain, les poids de la dernière valeur estimée, par exemple, amplifieraient énormément la plupart des fréquences cycliques et même certaines des fréquences irrégulières. On assisterait également à des déphasages prononcés de certains cycles économiques. Ces poids différeraient d'ailleurs beaucoup des poids non centraux traditionnels des moyennes Henderson à 5, 9, 13 et 23 termes consignés dans Shiskin et al. (1967) et dans Dagum (1980).

L'origine des poids non centraux Henderson donnés dans ces ouvrages est d'ailleurs quelque peu "mystérieuse: ils ne sont pas dus à Henderson (1916), on ne cite aucune autre source, et ils ne sont pas le résultat de l'application du critère Henderson pour élaborer des filtres asymétriques" (Wallis, 1981, notre traduction). Kenny et Durbin (1981, p. 28) disent obtenir des poids non centraux semblables à ceux de Shiskin et de Dagum "en supposant que la série à filtrer peut être extrapolée par une ligne droite ajustée par les moindres carrés." Et c'est cette avenue qui sera maintenant explorée.

Soit  $z_s$  ( $s=1, \dots, m$ ) les  $m$  dernières observations de l'intervalle à  $n$  termes de la Henderson centrale ( $m \leq n$ ). On suppose que ces  $m$  observations se comportent comme une droite sur le sous-intervalle:

$$(7) \quad z_s = c_0 + c_1 s + u_t, \quad \frac{z}{mx1} = \frac{s}{mx2} \frac{c}{2x1} + \frac{u}{mx1}, \quad \underline{S}' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & m \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Les valeurs de paramètres, estimées par les moindres carrés généralisés avec la même matrice de corrélation  $V$  (6), sont:  $\underline{c}^* = [\underline{S}' \underline{V}^{-1} \underline{S}]^{-1} \underline{S}' \underline{V}^{-1} \underline{z}$ .

fore-last estimate, to the weights in the first-before-last row; etc. All estimates would thus lie on the same parabola on the  $n$ -term interval.

Such non-central weights, however, prove to have unacceptable spectral properties. According to the gain functions, the weights of the last estimate, for instance, would tremendously amplify most cyclical frequencies and even some of the irregular frequencies. Pronounced phase shifts of some economic cycles would also be displayed. Those weights would also strongly differ from the traditional non-central weights of the 5-, 9-, 13- and 23-term Henderson averages tabulated in Shiskin et al. (1967) and in Dagum (1980).

The origin of the non-central Henderson weights given in those documents "is something of a mystery: they are not due to Henderson (1916), no alternative source is cited, and they are not the result of applying Henderson's criteria to the design of asymmetric filters" (Wallis, 1981). Kenny and Durbin (1981, p. 28) claim to obtain non-central weights similar to those of Shiskin and of Dagum "by assuming that the series to be smoothed can be extended by a straight line fitted by least squares." And this is the approach which will now be explored.

Let  $z_s$  ( $s=1, \dots, m$ ) be the  $m$  last observations of the central Henderson  $n$ -term interval ( $m \leq n$ ). Those  $m$  observations are assumed to behave as a straight line on the sub-interval:

The parametre values, estimated by means of generalized least squares with the same correlation matrix  $V$  (6), are  $\underline{c}^* = [\underline{S}' \underline{V}^{-1} \underline{S}]^{-1} \underline{S}' \underline{V}^{-1} \underline{z}$ .

Les  $k$  premières prévisions linéaires à l'aide de ces paramètres sont

$$(8) \quad \begin{bmatrix} z^*_{m+1} \\ z^*_{m+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ z^*_{m+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m+1 \\ 1 & m+2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & m+k \end{bmatrix} [\underline{S}' \underline{V}^{-1} \underline{S}]^{-1} \underline{S}' \underline{V}^{-1} \underline{z} = [a^m_{ij}] \underline{z}, \quad (8)$$

$kxm$

où la matrice  $[a^m_{ij}]$  contient les poids directement applicables aux observations du sous-intervalle pour obtenir les prévisions linéaires mentionnées par Kenny et Durbin.

Les poids centraux de Henderson  $h_{qj}$  servent à calculer la  $q^e$  valeur estimée de l'intervalle comprenant  $n=2q-1$  termes. La valeur estimée  $q+k$  s'obtient en appliquant les  $m=n-k$  premiers poids centraux  $h_{qj}$  ( $j=1, \dots, n-k$ ) aux  $m$  dernières observations de l'intervalle,  $z_1, \dots, z_m$  ( $z_j = y_{j+k}$ ); et les  $k$  derniers poids  $h_{qj}$  ( $j=n-k+1, \dots, n$ ), aux  $k$  prévisions linéaires selon la droite ajustée aux mêmes  $m$  observations  $z_j$ :

$$(9) \quad y^*_{q+k} = [h_{qj}] \begin{bmatrix} z \\ mx1 \\ z^*_{m+1} \\ \vdots \\ z^*_{m+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{qj} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{1 \times n} \begin{bmatrix} I \\ mxm \\ a^m_{ij} \\ kxm \end{bmatrix}_{nxm} \underline{z} = [h_{q+k,j}] \begin{bmatrix} z \\ \vdots \\ z \end{bmatrix}_{1 \times m} \quad (9)$$

(m=n-k)

$$\Rightarrow y^*_{q+k} = \sum_{j=1}^n h_{q+k,j} y_j, \quad k=1, \dots, q-1$$

$(h_{q+k,j} = 0, j=1, \dots, k; y_j = z_{j-k}, j=k+1, \dots, n)$

où les coefficients  $h_{q+k,j}$  sont les poids recherchés de la moyenne pour la valeur estimée  $q+k$  et où les poids  $a^m_{ij}$  sont donnés par l'équation (8).

Par exemple, les poids centraux  $h_{4j}$  de la moyenne Henderson à 7 termes produisent la 4<sup>e</sup> valeur estimée de l'intervalle de 7 termes. Pour la 5<sup>e</sup>

The first  $k$  linear forecasts from these parameters are

where matrix  $[a^m_{ij}]$  contains the weights directly applicable to the observations of the sub-interval to get the linear forecasts mentioned by Kenny and Durbin.

The central Henderson weights  $h_{qj}$  are used to calculate the  $q^e$  estimate of the interval comprising  $n=2q-1$  terms. Estimate  $q+k$  is obtained by applying the  $m=n-k$  first central weights  $h_{qj}$  ( $j=1, \dots, n-k$ ) to the  $m$  last observations of the interval,  $z_1, \dots, z_m$  ( $z_j = y_{j+k}$ ); and the  $k$  last weights  $h_{qj}$  ( $j=n-k+1, \dots, n$ ), to the  $k$  linear forecasts according to the straight line fitted to the same  $m$  observations  $z_j$ :

where coefficients  $h_{q+k,j}$  are the desired Henderson weights for the estimate  $q+k$  and weights  $a^m_{ij}$  are given by equation (8).

For instance, the central weights  $h_{4j}$  of the 7-term Henderson average provide the 4th estimate of the 7-term interval. For the 5th estimate

valeur estimée  $y^*_5$ , on applique les 6 premiers poids centraux aux observations 2 à 7; et le 7<sup>e</sup> poids central, à la prévision linéaire correspondant à la ligne droite ajustée aux observations 2 à 7:

$$\begin{aligned}
 y^*_5 &= h_{41}y_2 + h_{42}y_3 + \dots + h_{46}y_7 + h_4(a^6_{11}y_2 + a^6_{12}y_3 + \dots + a^6_{16}y_7) \\
 &= (h_{41} + h_{47}a^6_{11})y_2 + (h_{42} + h_{47}a^6_{12})y_3 + \dots + (h_{46} + h_4a^6_{16})y_7 \\
 (10) \quad &= h_{52}y_2 + h_{53}y_3 + \dots + h_5y_7 \quad (h_{51} = 0), \quad (10)
 \end{aligned}$$

ou les poids  $a^6_{1j}$  sont données par l'équation (8). Les poids pour la 5<sup>e</sup> valeur estimée de la Henderson à 7 termes sont les coefficients  $h_{51}, h_{52}, \dots, h_5$  (de  $y_1, y_2, \dots, y_7$ ) et apparaissent dans la rangée 5 du tableau 1.

## 6. DISCUSSION

Le procédé utilisé à la section 5 pour trouver des poids non centraux donne  $m=q=k+1$  poids terminaux et implique  $k$  prévisions, pour une moyenne centrale à  $n=2q-1$  termes; par exemple, 12 poids terminaux et 11 prévisions pour la Henderson à 23 termes. Cela est du au fait que les droites d'extrapolation, utilisées dans le cas des poids terminaux, sont ajustées aux derniers  $m=q=k+1$  termes et non aux  $n$  termes de l'intervalle.

On pourrait observer qu'il est téméraire de faire  $k$  prévisions avec une droite estimée sur  $k+1$  observations: les dernières prévisions n'auront aucune fiabilité. En effet cette situation n'est pas idéale; mais, cependant, les pondérations centrales appliquées aux dernières prévisions sont très faibles, surtout dans le cas des moyennes de 13 et de 23 termes. Nous avons tout de même essayé d'augmenter le nombre de termes  $m$  impliqués dans l'estimation de la droite. Mais des déphasages accrus et des fonctions de gain détériorées en sont résultées.

Nous avons également essayé de faire moins de prévisions et d'appliquer des poids quasi centraux (de l'équa-

$y^*_5$ , the 6 first central weights are applied to observations 2 to 7; and the 7<sup>th</sup> central weight, to the linear forecast corresponding to the straight line fitted to observations 2 to 7:

where weights  $a^6_{1j}$  are given by equation (8). The weights for the 5<sup>th</sup> estimate of the Henderson are the coefficients  $h_{51}, h_{52}, \dots, h_5$  (of  $y_1, y_2, \dots, y_7$ ) and are found in row 5 of Table 1.

## 6. DISCUSSION

The procedure used in Section 5 to obtain non-central weights yields  $m=q=k+1$  end weights and implies  $k$  forecasts for a central average of  $n=2q-1$  terms; for instance, 12 end weights and 11 forecasts for the 23-term Henderson. This is because the forecast lines, used in the case of the end weights, are fitted on the last  $m=q=k+1$  terms and not on all the  $n$  terms of the interval.

One could argue that making  $k$  forecasts with a straight line estimated over  $k+1$  observations is quite daring: the last forecast will have no reliability. Indeed this situation is not ideal, but, on the other hand, the central weights values applied to the last forecasts are very small, especially in the case of the 13- and 23-term averages. We nevertheless tried estimating the straight line on a larger number of terms. But this translated into higher phase shifts and deteriorated gain functions.

We also tried to use less forecasts and to apply some near central weights (of equation (5)) pertaining

tion (5)) se rapportant à la parabole sous-jacente à la moyenne Henderson centrale. Encore là des détériorations de gain et de déphasage sont apparues.

À la section 4, nous avons implicitement supposé que l'amplification des fluctuations cyclo-économiques n'importait pas autant que le déphasage de ces fluctuations. Pour clarifier cette position, supposons qu'une série contienne un cycle de 18 mois et que la méthode d'estimation utilisée amplifie ce cycle de 20 %, mais sans déphasage. En se basant sur les valeurs estimées, le conjoncturiste pourra dater précisément les quatre phases du cycle économique: l'expansion, le retournement, la récession et la reprise. (Ce datage est crucial pour la prise de décision socio-économique optimale.) Selon le degré (connu) d'amplification, il pourrait même réévaluer l'intensité des mouvements enregistrés. En d'autres mots, en régime d'amplification sans déphasage, l'erreur est seulement quantitative.

Supposons maintenant que l'estimation n'amplifie pas le cycle étudié mais le déphase de .60 mois. Un retournement se produisant à la dernière période d'observation ne paraîtra dans les valeurs estimées qu'un mois plus tard (lorsqu'une nouvelle observation sera disponible). Entre-temps, le conjoncturiste croira faussement que l'expansion se poursuit. En régime de déphasage, l'erreur devient donc qualitative (quant à la phase du cycle) ainsi que quantitative. C'est pourquoi nous préférions les amplifications des fluctuations cyclo-économiques avec les poids proposés aux déphasages avec les poids traditionnels.

to the parabola underlying the central Henderson average. Once again, deteriorations were recorded in the gain and the phase shift.

In Section 4, we implicitly assumed that the amplification of cyclical economic fluctuations did not matter as much as the phase shift at those fluctuations. To clarify this position, assume that a series contains an 18-month cycle and that the estimation method amplifies that cycle by 20% without phase shift. On the basis of the estimates, the analyst of the current economic situation will be able to date exactly the four stages of the business cycle: expansion, turning point, recession and recovery. (This dating is crucial for good socio-economic decision making.). According to the (known) degree of amplification, he could even reassess the intensity of the recorded movements. In other words, in situations of amplification without shifting, the error is only quantitative.

Now assume that the estimation does not amplify the cycle considered but phases it by .60 month. A turning point occurring at the last observation period, will appear in the estimates one month later (when a new observation is available). Meanwhile, the analyst will wrongly believe that expansion is sustained. In situations of phase shift, the error then becomes qualitative (about the cycle stage) as well as quantitative. This is why we prefer the amplifications of the cyclical economic fluctuations by the weights proposed to the phase shifts by the traditional weights.

## CONCLUSION

Ce travail a établi des poids non centraux pour la moyenne mobile Henderson à 7 termes. Ces poids détiennent des propriétés spectrales acceptables, qui devraient se traduire par une fiabilité et une actualité raisonnables des valeurs estimées du cycle économique en fin de série.

La méthodologie utilisée, ensuite appliquée aux cas des moyennes Henderson à 5, 9, 13 et 23 termes, donne des poids terminaux qui engendrent moins de déphasage des cycles économiques récents que les poids traditionnels correspondants de Shiskin et al. (1967).

## CONCLUSION

This paper developed non-central weights for the 7-term Henderson moving average. These weights display acceptable spectral properties which should translate into reasonably reliable and timely estimates of economic cycles at the end of series.

Applied to the cases of the 5-, 9-, 13- and 23-term Henderson averages, the methodology used yields end weights which entail less phase shift of recent economic cycles than the corresponding traditional weights in Shiskin et al. (1967).

Références bibliographiques

References

- Aitken, A.C. (1935), "On Least Squares and Linear Combinations of Observations", **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**, Vol. 55, pp. 42-48.
- Dagum, E.B. (1980), La méthode de désaisonnalisation X-11-ARMMI, Statistique Canada, cat. 12-564F; The X-11-ARIMA Seasonal Adjustment Method, Statistics Canada, cat. 12-564E.
- Dagum, E.B. (1982), "The Effects of Asymmetric Filters on Seasonal Factor Revision", **J.A.S.A.**, Vol. 77, No. 380, pp. 732-738.
- de Fontenay, A., Prieuret, B. (1972), "Henderson's Moving average", Econometric Research Staff, **Statistics Canada**, Research Paper.
- Gouriéroux, C., Le Gallo, F. (1981), "Construction de moyennes mobiles par minimisation sous contraintes d'une forme quadratique des coefficients", **Annales de l'I.N.S.E.E.**, no. 42, pp. 93-110.
- Henderson, R. (1916), "Note on Graduation by Adjusted Averages", **Transaction of the Actuarial Society of America**, Vol 17, pp. 43-48.
- Kenny, P.B., Durbin, J. (1982), "Local Trend Estimation and Seasonal Adjustment of Economic and Social Time Series", **J.R.S.S. A**, Vol. 145, Part 1, pp. 1-41
- Laroque, G. (1977), "Analyse d'une méthode de désaisonnalisation: le programme X-11, du US Bureau of Census, version trimestrielle, **Annales de l'INSEE**, no. 28, pp. 105-127
- Shiskin, J., Young, A.H, Musgrave, J.C (1967), **The X-11 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program**, U.S. Bureau of the Census, Technical Paper No. 15.
- Wallis, K.F. (1981). "Models for X-11 and X-11-Forecasts Procedures for Preliminary and Revised Seasonal Adjustments", Paper presented at the A.S.A.-Census-N.B.E.R. Conference on Applied Time Series Analysis of Economic Data, Washington D.C. (Proceedings forthcoming).
- Wallis, K.F. (1982), "The Effects of Asymmetric Filters on Seasonal Factor Revisions", **J.R.S.S. A**, Vol. 145, pp. 74-85.
- Whittaker, E., Robinson G. (1924). **The Calculus of observations**, Blackie and Sons, 4-th 1944 ed.

QOS

STATISTICS CANADA LIBRARY  
BIBLIOTHEQUE STATISTIQUE CANADA



1010252619

3