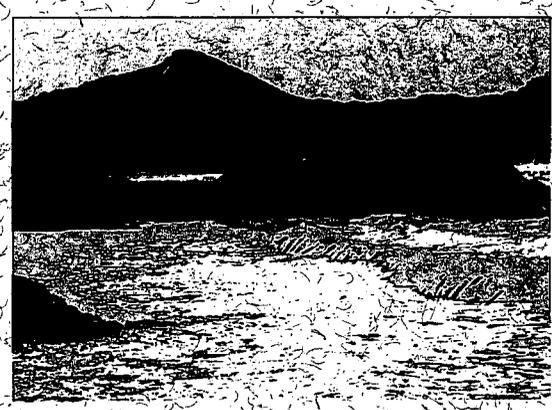
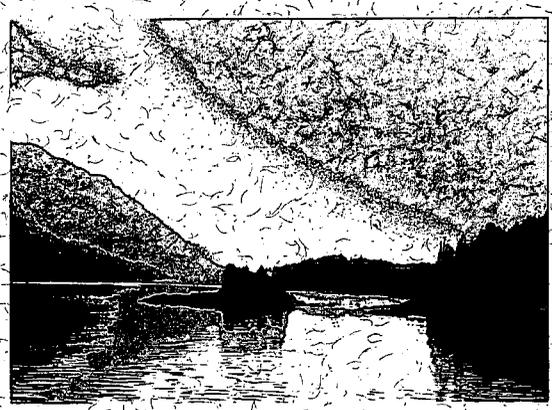
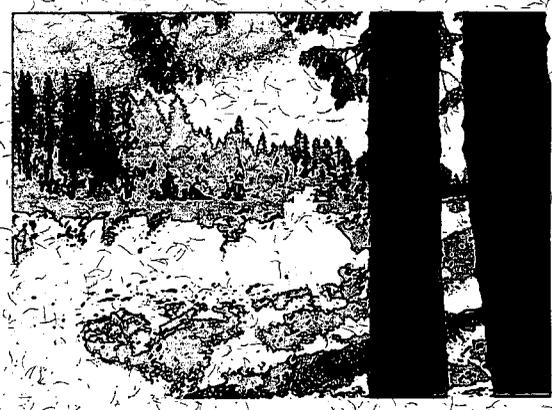


Dynamique du phosphore dans les systèmes lacustres

Bernard C. Kenney



RAPPORT N° 45 DE L'INRH
ETUDE N° 182, SÉRIE SCIENTIFIQUE DE LA DGEI

DIRECTION GÉNÉRALE DES EAUX INTÉRIEURES
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN HYDROLOGIE
CENTRE NATIONAL DE RECHERCHE EN HYDROLOGIE
SASKATOON (SASKATCHEWAN) 1990

(Available in English on request)

GB
707
C335
HQ 182F





Environnement
Canada

Environment
Canada

Conservation et
Protection

Conservation and
Protection

Dynamique du phosphore dans les systèmes lacustres

Bernard C. Kenney

RAPPORT N° 45 DE L'INRH

ÉTUDE N° 182, SÉRIE SCIENTIFIQUE DE LA DGEI

**DIRECTION GÉNÉRALE DES EAUX INTÉRIEURES
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN HYDROLOGIE
CENTRE NATIONAL DE RECHERCHE EN HYDROLOGIE
SASKATOON (SASKATCHEWAN) 1990**

(Available in English on request)

Canada



Imprimé sur du papier à base de matériels récupérés

Publié avec l'autorisation
du ministre de l'Environnement

© Ministre des Approvisionnements et Services Canada 1990

N° de cat. En 36-502/182F

ISBN 0-662-96462-4

Table des matières

	Page
RÉSUMÉ.....	v
ABSTRACT.....	v
PERSPECTIVE DE GESTION.....	vi
INTRODUCTION.....	1
MODÈLES ENTRÉE-SORTIE.....	1
Modèle de lac bien mélangé à une seule échelle de temps.....	2
Modèle à deux échelles de temps.....	4
MODÈLES DE LA CHARGE EN PHOSPHORE.....	6
Modèle de la charge hydraulique.....	6
Modèle perfectionné.....	8
HYPOTHÈSE DU RÉGIME PERMANENT.....	11
MODÈLE D'EDMONDSON ET LEHMAN.....	13
DYNAMIQUE DU PHOSPHORE DANS UN LAC.....	17
Constante de sédimentation, σ	18
Méthode du régime permanent.....	18
Méthode de la réponse à une fonction échelon.....	18
Méthode de la réponse forcée.....	19
Coefficients variables en fonction du temps.....	21
REMERCIEMENTS.....	22
RÉFÉRENCES.....	22

Tableau

1. Quelques valeurs typiques de l'échelle de temps efficace, du temps de renouvellement de l'eau, et de l'échelle de temps de sédimentation spéciale, obtenues à partir du modèle perfectionné.....	11
---	----

Illustrations

	Page
Figure 1. Réponse en fonction du temps du modèle entrée-sortie à une échelle de temps: temps de renouvellement de l'eau.....	4
Figure 2. Réponse en fonction du temps du modèle entrée-sortie à deux échelles de temps: renouvellement de l'eau et sédimentation.....	6
Figure 3. Temps de séjour relatif du phosphore en fonction du temps de séjour de l'eau.....	8
Figure 4. Rapport des concentrations de phosphore non dimensionnel en fonction du temps de séjour de l'eau pour 54 lacs.....	14
Figure 5. Taux annuel de sédimentation du phosphore calculé à partir du bilan de phosphore du lac Washington en fonction de l'apport de phosphore.....	16
Figure 6. Taux d'évacuation du phosphore prédit à l'aide du modèle d'Edmondson et Lehman en fonction du taux d'évacuation mesuré.....	16
Figure 7. Masse de phosphore dans le lac prédite par le modèle d'Edmondson et Lehman en fonction de la masse de phosphore mesurée.....	17

Résumé

L'application d'une dynamique linéaire du premier ordre servant à la prévision de l'eutrophisation des lacs est étudiée en fonction de la charge en phosphore. Une mauvaise compréhension du terme de la sédimentation et l'utilisation de l'hypothèse du régime permanent ont gêné les prévisions par le passé.

Un modèle de la dynamique du phosphore total d'un lac est établi. Ce modèle montre que les lacs réagissent comme un système forcé aux variations de la concentration en phosphore du débit entrant. Bien que la concentration en phosphore d'un lac corresponde à celle du débit entrant, il est montré qu'il importe de cerner les caractéristiques de la vidange et de la sédimentation afin de bien modéliser la dynamique.

Abstract

The application of first-order linear dynamics to predict eutrophication in lakes is reviewed within the framework of the phosphorus loading concept. Lack of understanding of the sedimentation term and use of the steady-state assumption have impeded predictions in the past.

A model of the dynamics of total phosphorus in lakes is derived which shows that lakes respond as a forced system to changes in inflow phosphorus concentration. Although the concentration of phosphorus in a lake is shown to scale with the inflow concentration, the time dependence of flushing and sedimentation is important to successful modelling.

Perspective de gestion

Pendant les mois d'été, un grand nombre de lacs canadiens sont envahis par des algues qui nuisent à la qualité de l'eau et limitent les utilisations potentielles du lac. Les algues prolifèrent grâce à des concentrations élevées de phosphore qui proviennent souvent d'effluents d'eau d'égout municipaux. Il est indispensable d'avoir une certaine compréhension du comportement du phosphore dans les lacs pour pouvoir évaluer les effets éventuels d'une amélioration du traitement des eaux d'égout.

Le présent rapport établit la théorie de la dynamique du phosphore pour des lacs dans lesquels le phosphore est éliminé par vidange et par sédimentation. Il examine ensuite la notion de charge en phosphore. Enfin, il démontre que, du fait de l'utilisation de modèles statiques et d'une mauvaise compréhension du processus de sédimentation, il n'a pas été possible de prédire correctement la concentration de phosphore dans un système lacustre.

Dynamique du phosphore dans les systèmes lacustres

Bernard C. Kenney

INTRODUCTION

Dans plusieurs rapports désormais classiques, Vollenweider (1968, 1975, 1976) a présenté des méthodes permettant de prévoir l'eutrophisation d'un lac à partir du principe de la charge en phosphore. Ce principe est basé sur une observation empirique, à savoir que la production de chlorophylle augmente lorsque l'apport de phosphore (ou la charge) dans le lac augmente. Le principe de la charge en phosphore a été quantifié sous forme de nomogrammes, appelés diagrammes de charge en phosphore, qui ont été utilisés pour prédire les changements de niveau trophique des lacs consécutifs à des variations de la charge. Ce principe porte le nom général de principe de la charge en éléments nutritifs et il s'applique à tout autre élément nutritif ou élément fertilisant.

Le présent rapport examine le principe de la charge en phosphore tel qu'il est appliqué dans des modèles d'équilibre entrée-sortie. Il considère ensuite certains problèmes théoriques et pratiques liés à plusieurs modèles du phosphore. Enfin, il explore la dynamique du phosphore total dans les lacs en faisant appel à une théorie linéaire du premier ordre avec des coefficients variables en fonction du temps.

MODÈLES ENTRÉE-SORTIE

Sawyer (1947) observa que, lorsque la concentration de phosphore dans un lac dépasse 10 à 20 mg/m³, les algues

ont tendance à proliférer. La limite inférieure mentionnée par Sawyer a été utilisée par Vollenweider (1975; 1976) comme critère d'eutrophisation. Pour prédire l'état trophique d'un lac, il suffit alors de prédire quand la concentration de phosphore dans le lac, P_L , dépasse 10 mg/m³, à partir de valeurs estimées de l'apport de phosphore, ou de la charge, L , dans le lac. La charge en phosphore a été définie comme étant la masse de phosphore total qui entre dans un lac par unité de temps, divisée par la superficie du lac. Le résultat requis peut être exprimé mathématiquement sous la forme d'une relation entre P_L et L (avec d'autres variables encore non spécifiées). La relation peut être exprimée en termes d'une fonction inconnue, f , de la façon suivante:

$$f(P_L, L, \dots) = 0. \quad (1)$$

La méthode empirique habituellement utilisée pour résoudre des problèmes de ce type consiste à mesurer P_L et L dans un certain nombre de cas et à déterminer la fonction inconnue, f . Cela revient en fait à effectuer un ajustement et la courbe obtenue (la fonction inconnue f) est souvent considérée comme étant universelle. Une fois f connue, on peut déterminer (ou «prédire») P_L à partir de valeurs estimées de L pour d'autres lacs. À l'inverse, on peut calculer une charge critique pour un lac donné en posant $P_L = 10 \text{ mg/m}^3$ dans l'équation (1). L'exactitude de la prédiction dépend avant tout de la validité de l'hypothèse relative à la similarité des lacs.

En ce qui concerne les applications techniques, la méthode empirique donne de bons résultats lorsque les données utilisées pour déterminer la fonction inconnue sont choisies judicieusement de façon à tenir compte de la gamme complète de situations dans lesquelles la courbe obtenue peut être utilisée. Dans le contexte de l'eutrophisation des lacs, il convient d'utiliser des données provenant d'une grande variété de lacs pour déterminer f . On suppose aussi implicitement que d'autres facteurs, tels que les différences géologiques et géochimiques entre les bassins lacustres, ne sont pas importants.

Pour inclure des paramètres importants tels que la vitesse de vidange d'un lac, Vollenweider (1975) proposa d'établir des modèles de la charge en phosphore plus complexes qui fassent intervenir le principe de conservation de la masse. Il obtint ainsi plusieurs modèles entrée-sortie. Ces modèles jouant un rôle important dans l'étude du principe de la charge en phosphore, il faut commencer par montrer comment ils ont été obtenus.

Deux modèles entrée-sortie seront considérés. Le premier s'applique à un lac bien mélangé comportant un seul affluent et un seul émissaire. Le phosphore est éliminé du lac uniquement par l'émissaire. Le second modèle est identique au premier, mais avec l'ajout d'un second mode d'élimination du phosphore, par sédimentation. Ce dernier modèle est équivalent au modèle selon lequel le phosphore n'est pas conservé dans la colonne d'eau, présenté par Vollenweider (1975, p.58).

Modèle de lac bien mélangé à une seule échelle de temps

Soit un «lac modèle» bien mélangé comportant une seule entrée et une seule sortie d'eau. Soit Q le débit volume d'eau dans le lac. On suppose que le niveau du lac est constant, avec une profondeur moyenne z . Le lac a une superficie A et la concentration de

phosphore total dans le lac est égale à P_L . La concentration de phosphore dans les eaux affluentes est égale à P_i et la concentration de phosphore dans les eaux effluentes est égale à P_L (car on suppose que le lac est bien mélangé). Les variables fondamentales habituelles sont donc P_i , P_L , Q , A , z , et t , où t est le temps.

Dans ses modèles entrée-sortie, Vollenweider (1975) a considéré la charge en phosphore, L , comme une grandeur fondamentale. Cependant, en réalité, la charge en phosphore est une grandeur, ou un paramètre, dérivée. Lorsque tout le phosphore est introduit dans le lac avec les eaux affluentes, $L = P_i Q / A$. Les variables fondamentales ci-dessus sont utilisées ici pour simplifier l'explication des modèles. Pour faciliter la comparaison avec Vollenweider (1975), certaines équations sont aussi exprimées en fonction de la charge en phosphore.

Il s'agit donc de déterminer P_L à un instant quelconque, t , après l'introduction continue de phosphore à l'entrée d'eau, P_i , en commençant soudainement au temps $t = 0$. On peut poser l'hypothèse, sans nuire à la généralisation, que la concentration initiale du lac était nulle au temps $t = 0$. Si l'on voulait examiner le problème d'un point de vue expérimental, la première tâche consisterait à effectuer une analyse dimensionnelle des variables indépendantes (Taylor, 1974). Les dimensions pertinentes dans ce problème sont la masse M , la longueur L et le temps T . On utilisera la convention de Taylor pour donner les dimensions des variables fondamentales. [] se lit «les dimensions de». Le signe = se lit «sont».

$$\begin{aligned} [P_i] &= \frac{M}{L^3} \\ [P_L] &= \frac{M}{L^3} \\ [Q] &= \frac{L^3}{T} \\ [A] &= L^2 \\ [z] &= L \\ [t] &= T \end{aligned}$$

Dans ce problème simple, on peut trouver deux groupes sans dimensions, soit par inspection, soit en utilisant le théorème de Buckingham II (Taylor, 1974). L'analyse dimensionnelle conduit au résultat suivant:

$$\frac{P_L}{P_i} = \text{Func} \left(\frac{Qt}{Az} \right). \quad (2)$$

L'équation (2) signifie que la grandeur sans dimension P_L/P_i est une fonction inconnue de la variable sans dimension Qt/Az . La relation fonctionnelle réelle dépend des équations qui gouvernent le processus. Avec la méthode empirique, la fonction inconnue serait obtenue par l'expérience. On pourrait, par exemple, établir une corrélation entre P_L/P_i et Qt/Az .

Dans ce cas simple, il n'est pas nécessaire de mener une série d'expériences pour déterminer la fonction inconnue. On peut écrire directement l'équation principale relative au lac modèle en utilisant le principe de conservation de la masse, soit:

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{P_i Q}{Az} - \frac{P_L Q}{Az}. \quad (3)$$

Dans cette équation différentielle, dP_L/dt est le taux de variation de la concentration de phosphore dans le lac. Ce taux est égal à la différence entre le taux d'augmentation de la concentration dans le lac, dû à l'entrée d'eau, et le taux de diminution de la concentration, dû à la sortie d'eau. Comme on a supposé que les eaux affluentes constituent la seule source de phosphore, on peut écrire l'équation (3) en fonction de la charge en phosphore, soit:

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - \frac{P_L Q}{Az}. \quad (4)$$

L'équation (4) est équivalente à l'équation 2.5 de Vollenweider (1975).

L'équation (3) est une équation différentielle ordinaire de premier ordre qu'on peut résoudre facilement en séparant les variables. La solution, en prenant comme conditions initiales $P_L = 0$ à $t = 0$, est la suivante:

$$\frac{P_L}{P_i} = 1 - \exp(-Qt/Az). \quad (5)$$

On vient ainsi d'établir la fonction inconnue de l'équation (2) pour ce «lac modèle» simple. Si l'équation principale était différente, en raison d'hypothèses initiales différentes (au sujet du mélange, par exemple), cette fonction inconnue serait aussi différente. Cette solution de l'équation (3) est appelée la réponse du lac à une fonction échelon en termes de concentration de phosphore. Elle décrit l'augmentation de la concentration de phosphore dans le lac en fonction du temps après une addition soudaine de phosphore au point d'entrée de l'eau. On peut utiliser une technique similaire avec une diminution soudaine, ou même une variation continue, de la concentration de phosphore dans les eaux affluentes.

La réponse à la fonction échelon est illustrée sur la figure 1 en fonction de l'échelle de temps $\tau_w = Az/Q$ du système. Par définition, lorsque $t = \tau_w$, $P_L = -1/e = 63\%$ de sa valeur finale. L'échelle de temps, Az/Q , dans ce problème simple, est la même que celle qu'on utilise souvent dans la réalité. Elle est appelée temps de séjour de l'eau ou temps de renouvellement de l'eau.

La figure 1 présente deux caractéristiques du modèle qui seront importantes dans la suite de l'étude. Premièrement, en régime permanent (c'est-à-dire lorsque $t \rightarrow \infty$), la concentration dans le lac est égale à la concentration dans l'apport d'eau (soit, $P_L = P_i$). Deuxièmement, on peut faire une estimation raisonnable de la valeur finale en régime permanent (par exemple,

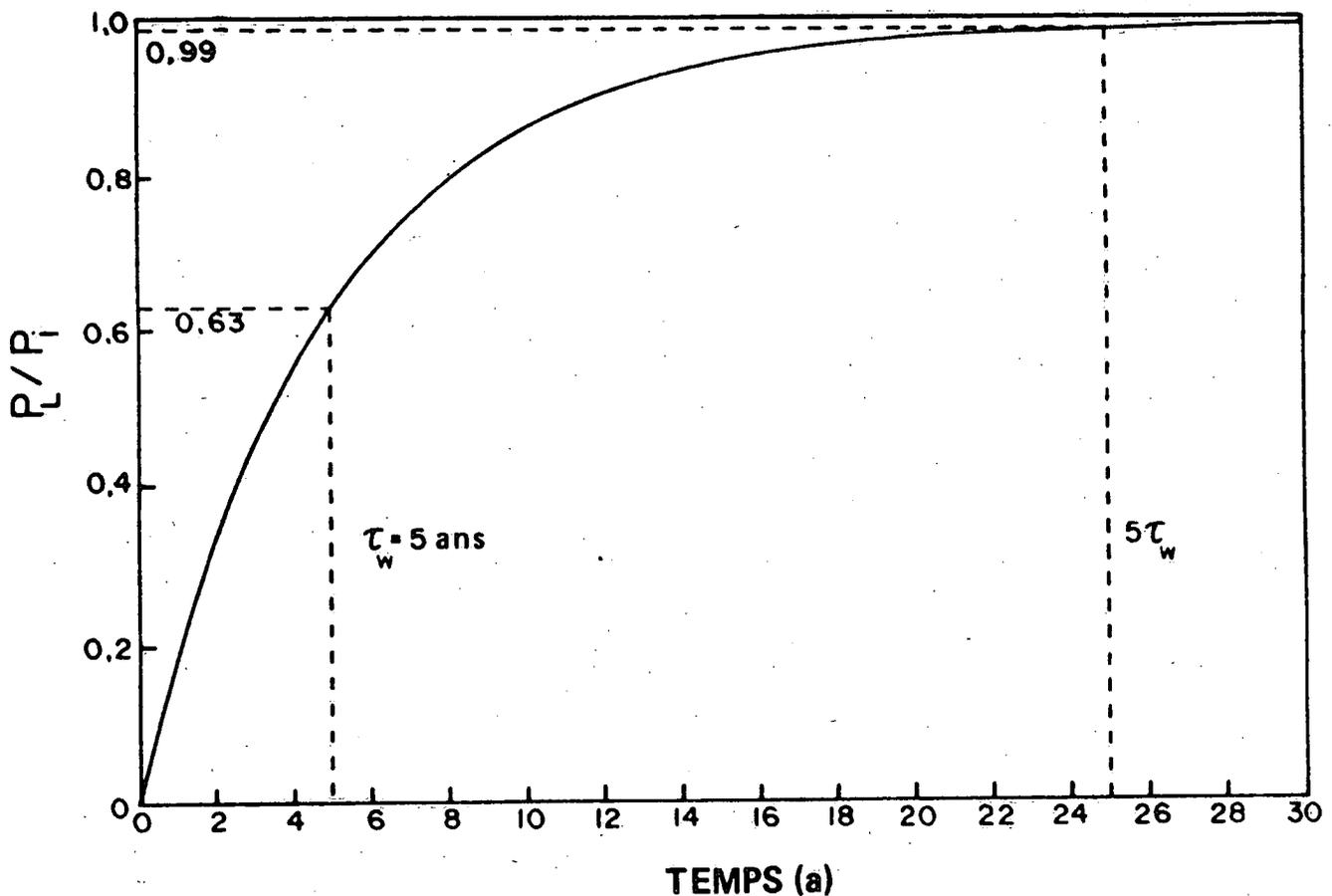


Figure 1. Réponse en fonction du temps du modèle entrée-sortie à une échelle de temps: temps de renouvellement de l'eau.

99 %) au bout d'un temps $t > 5 \tau_w$. Pour toutes les valeurs de $t < 5 \tau_w$, $P_L < p_i$.

L'analyse qui conduit à l'équation (5) est exacte. Si l'on construisait un modèle physique du «lac modèle» dans un laboratoire, qui satisfasse toutes les hypothèses, l'équation (5) pourrait aussi être déterminée expérimentalement. L'exactitude de l'équation (5) appliquée à un lac réel dépend uniquement de la validité des hypothèses du modèle. La validité des hypothèses en ce qui concerne les lacs réels sera examinée plus loin.

Modèle à deux échelles de temps

Le modèle précédent peut être étendu au cas où l'élément introduit dans le lac (le phosphore) peut être éliminé du lac par un autre moyen que l'émissaire, par exemple par sédimentation. On suppose que la vitesse d'élimination par sédimentation est proportionnelle à la concentration du phosphore dans le lac, P_L , et l'on désigne la constante de proportionnalité par la lettre σ . Les variables fondamentales sont maintenant P_i , P_L , Q , A , z , t , et σ , où $[\sigma] = T^{-1}$. L'analyse

dimensionnelle de ce nouveau modèle conduit au résultat suivant:

$$\frac{P_L}{P_i} = \text{Func} \left(\frac{Qt}{Az}, \sigma t \right). \quad (6)$$

Dans ce cas, la grandeur sans dimension est une fonction inconnue de deux variables sans dimensions indépendantes. S'il fallait déterminer expérimentalement la fonction inconnue, la tâche serait considérable, surtout si la fonction inconnue n'est pas linéaire.

Quoi qu'il en soit, dans cet exemple, on peut écrire directement l'équation principale, comme auparavant, en ajoutant un autre terme qui tienne compte de la sédimentation:

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{P_i Q}{Az} - \frac{Q P_L}{Az} - \sigma P_L. \quad (7)$$

(source) (puits) (puits)

L'équation gouvernant le nouveau lac modèle comporte donc un terme source et deux termes puits. Elle peut aussi être résolue par séparation des variables. La solution, en prenant encore comme condition initiale $P_L = 0$ à $t = 0$, est la suivante:

$$\frac{P_L}{P_i} = \frac{1}{1 + \frac{Az\sigma}{Q}} [1 - \exp(-Qt/Az)\exp(-\sigma t)]. \quad (8)$$

Là encore, on a déterminé la fonction inconnue, fonction $(Qt/Az, \sigma t)$. On observe que, dans ce problème, il y a deux échelles de temps: le temps de renouvellement de l'eau, $\tau_w = Az/Q$, comme dans le premier modèle, et une seconde échelle de temps, $\tau_s = 1/\sigma$, qui sera appelée le temps de sédimentation.

La forme de la solution est illustrée sur la figure 2. En régime permanent,

$$\frac{P_L}{P_i} = \frac{1}{1 + \frac{Az\sigma}{Q}} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_w}{\tau_s}} \cdot (t \rightarrow \infty) \quad (9)$$

La concentration dans le lac en régime permanent n'est plus égale à la concentration dans les eaux affluentes, elle est toujours inférieure ($P_L < P_i$). La valeur réelle en régime permanent de P_L dépend non seulement du temps de sédimentation, mais aussi du temps de renouvellement de l'eau. Par conséquent, deux lacs complètement différents (un premier avec une vitesse de renouvellement et une vitesse de sédimentation élevées, un second avec une vitesse de renouvellement et une vitesse de sédimentation faibles) peuvent avoir la même concentration en régime permanent (figure 2). Cependant, il faut beaucoup plus de temps au second lac pour atteindre le régime permanent. En général, plus la vitesse de renouvellement est élevée (c'est-à-dire, plus τ_w est faible), pour une vitesse de sédimentation donnée, plus la valeur de P_L en régime permanent est proche de celle de P_i . À l'inverse, plus la vitesse de sédimentation est élevée (c'est-à-dire, plus τ_s est faible), pour une vitesse de renouvellement donnée, plus la valeur finale de P_L est faible.

Étant donné la forme de la solution de ce modèle, on peut aussi définir une constante de temps globale, τ_0 , de la façon suivante:

$$\tau_0 = \frac{\tau_w}{1 + \frac{\tau_w}{\tau_s}}. \quad (10)$$

La constante de temps globale d'un système est toujours inférieure au temps de renouvellement de l'eau, pour toutes les valeurs finies de la vitesse de sédimentation. Comme avec le premier

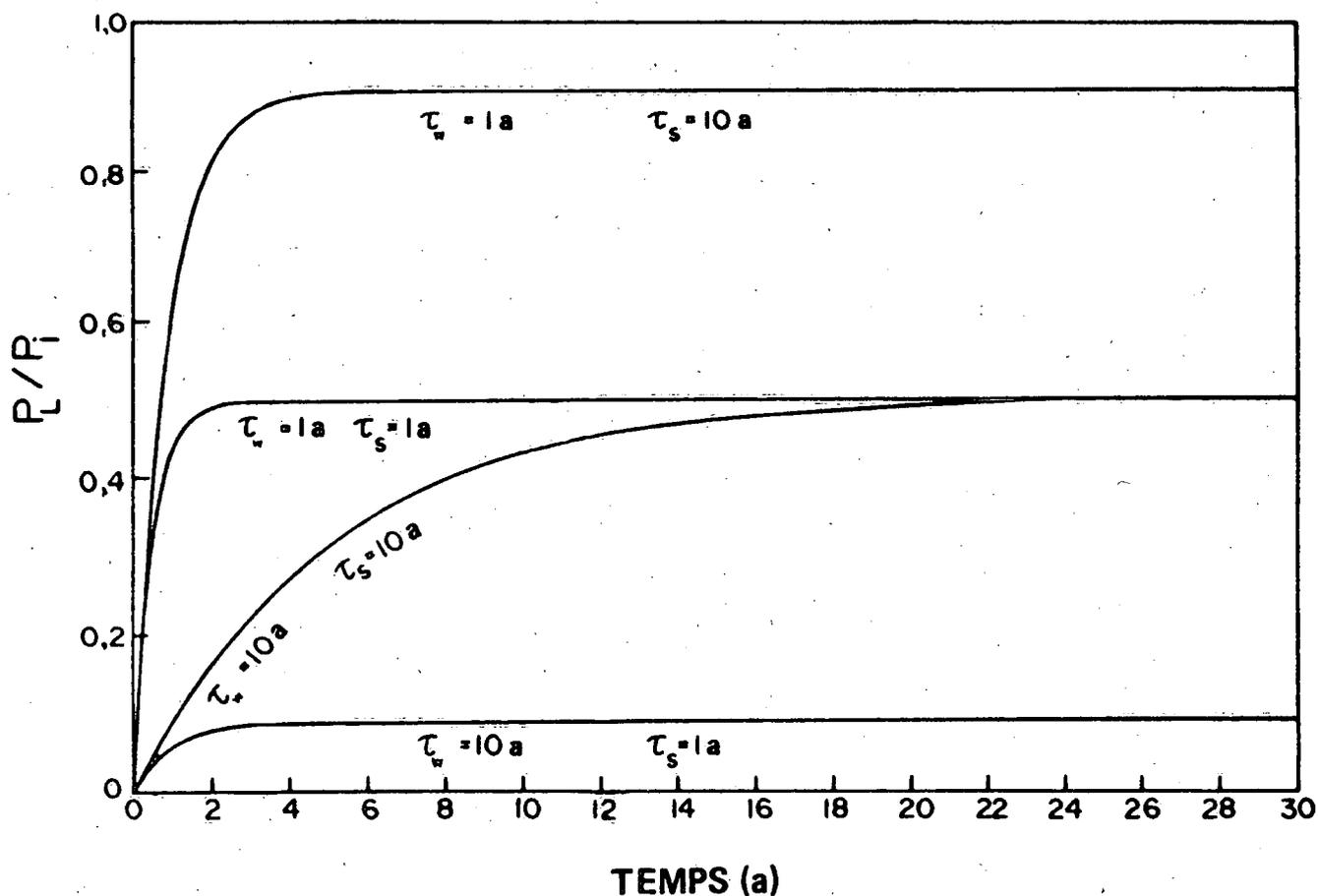


Figure 2. Réponse en fonction du temps du modèle entrée-sortie à deux échelles de temps: renouvellement de l'eau et sédimentation.

modèle, on atteint 99 % de la valeur en régime permanent en un temps $t = 5 \tau_0$.

MODÈLES DE LA CHARGE EN PHOSPHORE

Modèle de la charge hydraulique

Le modèle de la charge hydraulique présenté dans Vollenweider (1976) était basé sur le modèle entrée-sortie à une source (entrée d'eau) et deux puits (émissaire et sédimentation) décrit dans la section précédente. Les résultats du modèle étaient présentés sous forme d'un

graphique de la charge en phosphore en fonction de la charge hydraulique, la charge hydraulique étant définie comme la profondeur moyenne divisée par le temps de renouvellement de l'eau du lac. Toutefois, le modèle de la charge hydraulique comportait une erreur dans le traitement du terme relatif à la sédimentation. Dans la présente section, nous étudierons la nature et les conséquences de cette erreur.

Le modèle entrée-sortie requis était défini par l'équation (7), en fonction des variables fondamentales du problème.

L'équation (7) peut être réécrite en fonction de la charge en phosphore:

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - \frac{P_L}{\tau_w} - \sigma P_L. \quad (11)$$

La solution de l'équation (11) est le résultat cherché, c'est-à-dire une relation entre L et P_L . Il n'est pas nécessaire d'intégrer l'équation (11) pour obtenir la solution car on avait posé l'hypothèse (Vollenweider, 1976) que tous les lacs étaient en régime permanent en ce qui concerne le phosphore. Par conséquent, en posant $dP_L/dt = 0$ dans l'équation (11), on obtient le modèle de la charge hydraulique cherché:

$$L = P_L \left(\frac{z}{\tau_w} + z\sigma \right). \quad (12)$$

Lorsque z , τ_w et σ sont connus, l'équation (12) décrit la relation entre L et P_L (au moins avec les hypothèses initiales).

Il est difficile d'appliquer l'équation (12) aux lacs réels car le temps de sédimentation, σ^{-1} , est en général inconnu ou difficile à mesurer. Vollenweider (1975) précisait que σ ne pouvait pas être mesuré et qu'il fallait le déterminer à partir du modèle lui-même. Pour ce faire, l'équation (12) était réécrite sous la forme:

$$\sigma = \frac{1}{z} \left(\frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w} \right). \quad (13)$$

σ était alors déterminé pour 21 lacs différents à partir de valeurs de P_L , L, z et τ_w . Bien que cette méthode permette de déterminer la constante de sédimentation pour différents lacs, l'équation (13) n'est pas une équation

indépendante. Si l'on substitue l'équation (13) dans l'équation (12), on arrive à une identité:

$$\begin{aligned} L &= P_L \left(\frac{z}{\tau_w} + z\sigma \right) \\ &= P_L \left[\frac{z}{\tau_w} + \frac{z}{z} \left(\frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w} \right) \right] = L. \end{aligned} \quad (14)$$

Cette identité (14) signifie que l'équation (13) ne peut être utilisée comme relation fonctionnelle pour trouver la valeur de σ dans l'équation (12). Il convient donc d'établir une relation générale indépendante des équations (12) et (13) qui s'applique à tous les lacs.

Vollenweider (1976) a porté sur un graphique les valeurs estimées de σ pour 21 lacs en fonction de la profondeur moyenne, dans le but d'essayer d'obtenir une équation indépendante pour σ . Dans ce cas, la profondeur moyenne était un choix malheureux car la corrélation trouvée entre σ et z était une fausse auto-corrélation résultant du fait que l'on représentait un rapport en fonction de son propre dénominateur. Cette corrélation a été examinée par Kenney (1982) dans le cadre d'une analyse des formes de fausse auto-corrélation résultant de l'utilisation d'un terme commun. Le résultat de la corrélation était le suivant:

$$\sigma = \frac{10}{z}. \quad (15)$$

Par conséquent, au lieu de substituer directement l'équation (13) dans l'équation (12), ce qui aurait conduit à l'identité (14), on a substitué la fausse relation définie par l'équation (15) dans l'équation (12) pour obtenir le modèle final de la charge hydraulique, soit:

$$L = P_L \left(\frac{z}{\tau_w} + 10 \right). \quad (16)$$

Après substitution du critère de Sawyer, on est arrivé à l'équation suivante pour la charge en phosphore critique, L_c , d'un lac:

$$L_c = 10 \frac{z}{\tau_w} + 100 \cdot (\text{mg/m}^2/\text{a}) \quad (17)$$

Il est possible également de démontrer que le modèle de la charge hydraulique peut être obtenu directement à partir de la fausse corrélation et de l'équation (13):

$$\sigma = \frac{10}{z} = \frac{1}{z} \left(\frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w} \right). \quad (18)$$

L'équation (18) montre que l'acceptation de la fausse corrélation revient à supposer que:

$$10 = \frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w}. \quad (19)$$

Toutefois, l'équation (19) ne constitue pas une bonne approximation des données car $(L/P_L - z/\tau_w)$ varie de 3 à 60 (avec une moyenne de 15 et un écart type de 14). Néanmoins, l'équation (16) peut être obtenue directement à partir de l'équation (19), par simple réarrangement des termes.

Modèle perfectionné

Le modèle de la charge en phosphore qui sera considéré maintenant a aussi été établi par Vollenweider (1976). Ses paramètres incluent la profondeur moyenne et le temps de renouvellement de l'eau. Dans le présent rapport, il sera appelé le modèle perfectionné.

Le modèle perfectionné est obtenu en établissant une relation entre L et P_L . Soit:

$$L = P_L \frac{z}{\tau_w} (1 + \sqrt{\tau_w}). \quad (20)$$

Là encore, le résultat final peut être exprimé sous la forme d'une charge en phosphore critique qui ne doit pas être dépassée lorsqu'on substitue le critère de Sawyer (1947), à savoir $P_L \leq 10 \text{ mg/m}^3$.

Dans Vollenweider (1976), le modèle perfectionné résulte de l'application de l'hypothèse du régime permanent à l'équation (11). Cependant, il n'est pas nécessaire de faire appel à l'équation (11) pour obtenir le modèle perfectionné. Ce modèle peut être établi directement à partir de la régression entre τ_p/τ_w et τ_w , où τ_p est le temps de séjour du phosphore dans le lac (figure 3).

Plutôt que d'utiliser l'équation de régression exponentielle réelle pour les données de la figure 3, Vollenweider a fait appel à la représentation analytique suivante:

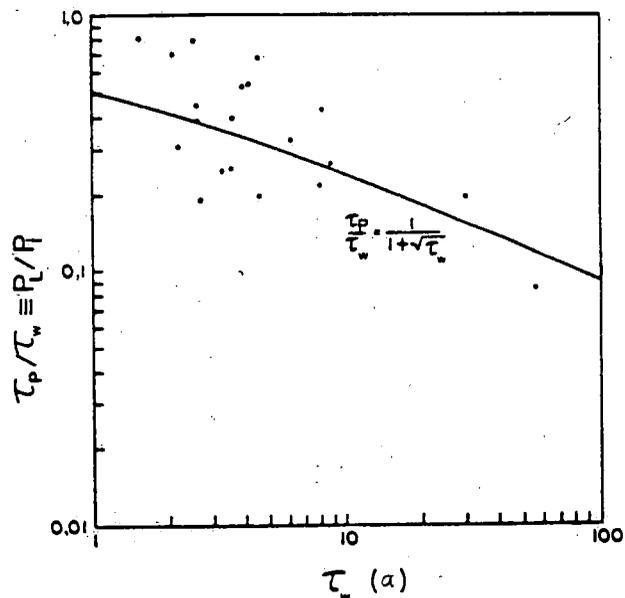


Figure 3. Temps de séjour relatif du phosphore en fonction du temps de séjour de l'eau (d'après Vollenweider, 1976).

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{1}{1 + \sqrt{\tau_w}} \quad (21)$$

L'équation (21) a été préférée à l'équation exponentielle car elle traduit mieux le comportement asymptotique prévu des lacs à vitesse de vidange élevée (lacs ayant des temps de renouvellement de l'eau courts). Bien que l'équation (21) représente presque aussi bien les 21 points de données de la figure 3 que l'équation exponentielle, il convient de noter que le succès de la régression (c'est-à-dire les coefficients de corrélation élevés obtenus) dépend fortement des deux points correspondant aux longs temps de renouvellement de l'eau. La validité de l'équation (21) sera examinée plus loin, mais, pour commencer, il faut montrer comment le modèle perfectionné est établi directement à partir de l'équation 21.

Le temps de séjour du phosphore, τ_p , est défini par Vollenweider (1976), par analogie avec le temps de séjour de l'eau, comme «le temps hypothétique nécessaire pour que la concentration de phosphore dans un lac atteigne sa valeur actuelle à partir d'une concentration nulle». Vollenweider (1976, p. 62, équation 6) a montré que le rapport entre le temps de séjour du phosphore et le temps de séjour de l'eau, τ_p/τ_w , était égal au rapport entre la concentration moyenne de phosphore dans le lac, P_L , et la concentration moyenne dans les eaux affluentes, P_i . Par conséquent, l'équation (21) peut être réécrite sous la forme:

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{P_L}{P_i} = \frac{1}{1 + \sqrt{\tau_w}} \quad (22)$$

L'hypothèse que la charge en phosphore totale de chaque lac était contenue dans les eaux affluentes était implicite dans

Vollenweider (1976). Avec cette hypothèse, l'équation (22) peut s'écrire:

$$\frac{P_L Q}{L A} = \frac{1}{1 + \sqrt{\tau_w}} \quad (23)$$

en réarrangeant les termes de l'équation (23):

$$L = P_L \frac{Q}{A} \frac{z}{z} (1 + \sqrt{\tau_w}), \quad (24)$$

et, puisque $\tau_w = Az/Q$, on arrive à l'équation du modèle perfectionné. Par conséquent, le modèle perfectionné est le résultat direct d'une analyse de régression empirique.

Il est instructif, cependant, d'examiner plus attentivement l'équation (11) pour voir comment elle est liée au modèle perfectionné. Si on compare l'équation (22) et l'équation (9), on constate que le modèle perfectionné peut être obtenu à partir du modèle entrée-sortie à deux échelles de temps si on suppose que $\sigma = 1/\sqrt{\tau_w}$. Cependant, avec cette hypothèse, on obtient un modèle entrée-sortie très différent. L'équation différentielle gouvernant le phosphore, pour le lac modèle perfectionné, n'est plus l'équation (7), ni l'équation (11), mais l'équation suivante:

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - \frac{P_L}{\tau_w} - \frac{P_L}{\sqrt{\tau_w}} \quad (25)$$

(source)(puits) (puits)

Il convient de noter que, bien que l'équation (25) contienne un terme source et deux termes puits, les deux termes puits ne sont pas indépendants. Plutôt qu'un modèle basé sur deux échelles de temps indépendantes (τ_w ,

σ^{-1}), l'équation différentielle gouvernant le phosphore dans le modèle perfectionné dépend uniquement du temps de renouvellement de l'eau, τ_w . En réécrivant l'équation (25):

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - P_L \left(\frac{1 + \sqrt{\tau_w}}{\tau_w} \right) \quad (26)$$

et substituant l'équation (21) on obtient l'équation simplifiée suivante:

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - \frac{P_L}{\tau_p} \quad (27)$$

La solution de l'équation (27) (par séparation des variables) montre que le temps de séjour du phosphore, τ_p , constitue l'échelle de temps efficace du modèle perfectionné. Il y a une différence importante entre l'échelle de temps efficace du modèle perfectionné décrite ici et l'échelle de temps globale (équation 10) examinée précédemment. L'échelle de temps globale comporte deux variables indépendantes qui décrivent deux processus indépendants, la vidange et la sédimentation; l'échelle de temps efficace décrit seulement un processus, la vidange.

Lorsqu'on a établi les modèles entrée-sortie, on a supposé que la vidange et la sédimentation étaient des processus indépendants. Cette hypothèse semble raisonnable pour la plupart des lacs. La vidange est régie par des paramètres hydrologiques tels que les précipitations, la taille du bassin versant, la taille du lac et la morphométrie. D'un point de vue physique, la sédimentation est un processus aléatoire non permanent qui dépend largement de la turbulence dans le lac et, partant, du vent. D'un point de vue biologique, la sédimentation dépend de

la vitesse de conversion biologique du phosphore dissous en phosphore particulaire par le biais de la croissance d'algues. En plus d'être un processus aléatoire non permanent, la croissance d'algues est hautement non linéaire et directement associée à de nombreux processus physiques à l'oeuvre dans les lacs. La sédimentation sera probablement différente dans les lacs peu profonds et dans les lacs suffisamment profonds pour se stratifier car le flux de sédiments à travers la thermocline est alors piégé, au moins jusqu'au renversement automnal. Il faut s'attendre à un couplage important entre les vitesses de vidange et de sédimentation seulement lorsque l'écoulement hydraulique dans le lac domine la production d'une turbulence (c'est-à-dire dans les lacs qui sont seulement de légers élargissements de cours d'eau à grand débit). De tels lacs existent, mais ils sont rares. Par conséquent, pour la plupart des lacs, il semble raisonnable de supposer que la vidange et la sédimentation sont des processus indépendants.

On peut aussi considérer que le modèle perfectionné représente un lac qui est le siège d'un type spécial de sédimentation, c'est-à-dire un lac dans lequel le temps de sédimentation est proportionnel à la racine carrée du temps de renouvellement de l'eau. Le tableau 1 compare des valeurs typiques de l'échelle de temps efficace obtenues à partir du modèle perfectionné avec les valeurs du temps de renouvellement de l'eau et de cette échelle spéciale du temps de sédimentation. D'après le tableau 1, dans les lacs où le temps de renouvellement de l'eau est long, c'est le phénomène de sédimentation qui domine. Dans les lacs où le temps de renouvellement de l'eau est court, les effets de la vidange et de la sédimentation ont la même importance. Par conséquent, pour un lac dont l'eau

se renouvelle très lentement, comme le lac Tahoe ($\tau_w = 700$ ans), le temps efficace du modèle perfectionné en ce qui concerne le phosphore est beaucoup plus court (25 ans) que τ_w . Or, on a vu que le temps nécessaire pour approcher du régime permanent était égal à 5τ . Par conséquent, le lac Tahoe atteindrait le régime permanent, en ce qui concerne le phosphore, au bout de 150 ans, selon le modèle perfectionné, contre 3500 ans en l'absence de sédimentation. Étant donné la différence, il est très important de savoir quelle échelle de temps est correcte. Dans la prochaine section, on examinera la validité du modèle perfectionné et quelques conséquences importantes de l'hypothèse relative au régime permanent.

Tableau 1. Quelques valeurs typiques de l'échelle de temps efficace, τ_p , du temps de renouvellement de l'eau, τ_w et de l'échelle de temps de sédimentation spéciale, τ_s , obtenues à partir du modèle perfectionné

τ_p (années)	τ_w (années)	τ_s (années)
0.5	1	1.0
0.83	2	1.4
1.25	4	2.0
2.4	10	3.16
9.1	100	10.0
25.5	700	26.5
30.7	1000	31.6

HYPOTHÈSE DU RÉGIME PERMANENT

Tous les modèles de la charge en phosphore présentés dans Vollenweider (1976) sont fondés sur l'hypothèse que les lacs sont en régime permanent en ce

qui concerne la concentration de phosphore. Malheureusement, ignorer le terme variable en fonction du temps dans les équations différentielles peut entraîner une erreur non négligeable. Cette section évalue l'incidence de l'hypothèse du régime permanent sur le modèle perfectionné.

Il a été montré précédemment que le modèle perfectionné est en fait basé sur la régression entre P_L/P_i et τ_w (figure 3). Dans ce cas, l'hypothèse du régime permanent est essentielle. Les figures 1 et 2 montrent le comportement de P_L/P_i en fonction du temps pour deux modèles entrée-sortie avant que le régime permanent soit atteint. Avec le modèle entrée-sortie à une seule échelle de temps (figure 1), la concentration de phosphore dans le lac en régime permanent était toujours égale à la concentration de phosphore dans les eaux affluentes. À toutes fins pratiques, le régime permanent est atteint au bout d'un temps égal à $5 \tau_w$. De plus, P_L peut être très inférieure à P_i , comme le montre la figure 1.

Par ailleurs, la figure 2 montre que, même en régime permanent, P_L est toujours inférieure à P_i avec un modèle entrée-sortie à deux échelles de temps (vidange et sédimentation). À toutes fins pratiques, avant d'atteindre le régime permanent, P_L peut donc être bien inférieure à P_i . Le problème est, de combien inférieure? De plus, pourquoi est-elle inférieure? P_L est-elle inférieure à P_i en raison d'une forte sédimentation dans un lac particulier ou est-ce simplement que le lac est loin d'avoir atteint le régime permanent? La validité du modèle perfectionné dépend des réponses à ces questions.

Si tous les lacs utilisés dans l'analyse de régression (figure 3) étaient véritablement en régime permanent, en termes de concentration de

phosphore, $\sigma = 1/\sqrt{\tau_w}$ pourrait être une estimation raisonnable de l'effet de la sédimentation du phosphore (ou de tout autre processus d'élimination du phosphore non traité explicitement). Cependant, si P_L/P_i est inférieur à sa valeur en régime permanent pour l'un quelconque des lacs de la figure 3, l'effet de la différence est simplement absorbé dans le terme relatif à la sédimentation. En d'autres termes, si P_L/P_i est faible parce que le lac est loin du régime permanent, le modèle perfectionné conclut automatiquement que ce lac est le siège d'une forte sédimentation. En effet, dans le modèle, la vitesse de sédimentation doit être élevée (τ_s court) pour que le rapport P_L/P_i soit faible en régime permanent (figure 2). On peut observer une telle tendance dans le tableau 1. Les lacs possédant de longs temps de renouvellement de l'eau (il y a de grandes chances que ces lacs n'aient pas atteint le régime permanent) subissent avant tout les effets de la sédimentation, selon le modèle perfectionné. Mais, le modèle perfectionné est-il correct? Pour évaluer correctement l'incidence de l'hypothèse du régime permanent sur le modèle perfectionné, il faut revenir à l'origine du modèle (figure 3). Comme on l'a vu précédemment, le succès de la régression dépend dans une large mesure des deux points de la figure 3 correspondant à un long τ_w (soit $\tau_w = 30$ ans et $\tau_w = 56$ ans). Si on élimine ces deux points, le coefficient de corrélation, qui avait un seuil de signification de 1 % (-0,674), devient un coefficient comportant un seuil de non signification de 5 % (-0,412). En d'autres termes, lorsque ces deux points sont éliminés, il n'y a pas de corrélation notable entre P_L/P_i et τ_w (au seuil de 5 %) et le fondement du modèle perfectionné disparaît. La validité du modèle perfectionné dépend donc fortement des données relatives à

deux lacs qui ont tous les deux de longs temps de renouvellement de l'eau. Par ailleurs, il y a très peu de chance que ces deux lacs soient en équilibre car il leur faut respectivement 150 ans et 280 ans pour atteindre le régime permanent (en ne tenant pas compte de la sédimentation). Le poids élevé attribué à la sédimentation dans le cas des lacs possédant de longs temps de renouvellement de l'eau résulte peut-être directement de l'utilisation de deux lacs éloignés de l'équilibre dans l'établissement du modèle perfectionné. Tant que les effets de la sédimentation n'auront pas été évalués avec précision, les prédictions faites à partir du modèle perfectionné devront être considérées comme douteuses.

Un autre problème vient du fait que le modèle perfectionné peut être vérifié avec des données relatives à d'autres lacs qui sont aussi éloignés de l'équilibre. Étant donné que les apports anthropogènes importants de phosphore dans les lacs sont relativement récents, la plupart des lacs qui ont de longs temps de renouvellement sont inclus dans cette catégorie. À l'heure actuelle, le modèle perfectionné peut sembler correct. Cependant, une surestimation de la sédimentation, comme le fait le modèle, et une gestion du lac correspondante (c'est-à-dire une augmentation de la charge en phosphore) pourraient avoir des effets désastreux pour les lacs ayant des τ_w élevés lorsque le régime permanent sera finalement atteint.

Larsen et Mercier (1976) ont présenté une analyse similaire à celle de Vollenweider (1976) en utilisant des données relatives à des séries de lacs différentes. Ils ont utilisé le même modèle entrée-sortie fondamental et la même hypothèse de régime permanent, mais ils ont fait intervenir le coefficient

de rétention, $R = 1 - P_L/P_i$. Le résultat de Larsen et Mercier,

$$R = \frac{1}{1 + \tau_w^{-1/2}}, \quad (28)$$

est équivalent à celui de Vollenweider (1976, équation 22), comme le montre une simple substitution de R dans l'équation (28). La figure 4 est un graphique de P_L/P_i en fonction de τ_w tracé à partir des données relatives aux 20 lacs utilisés par Larsen et Mercier pour établir l'équation (28). Ces lacs s'ajustent bien à l'équation (22) et ils pourraient être utilisés pour prouver la validité du modèle perfectionné. Malheureusement, la même critique (à savoir l'application de l'hypothèse du régime permanent à tous les lacs) vaut pour l'analyse de Larsen et Mercier. En outre, Larsen et Mercier ont choisi les 20 lacs (parmi 34 lacs pour lesquels ils disposaient de données) qui donnaient la meilleure relation empirique entre R et les caractéristiques du lac. Le choix subjectif de lacs qui donnent le plus grand coefficient de régression est discutable. Si l'on trace un graphique à partir des lacs de Larsen et Mercier (1976) et de Vollenweider (1976) (figure 4), on observe une plus grande dispersion. Cette dispersion peut être attribuée à des différences dans la sédimentation ou dans le degré de non permanence des lacs, ou encore à d'autres facteurs dont le modèle ne tient pas compte. Il est certain que les trois lacs de la figure 4 qui ont les temps de renouvellement de l'eau les plus longs ont aussi les plus petites valeurs de P_L/P_i , mais cela est-il dû à un taux de sédimentation élevé ou simplement au fait que ces lacs sont loin du régime permanent?

Dans les équations (22) et (28), et les figures 3 et 4, on suppose implicitement ou explicitement que P_L/P_i dépend seulement de τ_w . Cependant, on a

montré, dans l'établissement du modèle fondamental sur lequel sont basées les analyses de Vollenweider et de Larsen et Mercier, que P_L/P_i est une fonction de τ_w , σ et t (voir équation 6). Cette contradiction peut être résolue si σ ou t sont constants, ou si P_L/P_i est constant avec σ ou t variables, ou encore si σ ou t sont des fonctions de τ_w , ou enfin si plusieurs de ces conditions sont combinées. La conclusion du modèle perfectionné de Vollenweider est que P_L/P_i est constant avec t variable (hypothèse du régime permanent) et que σ est fonction de τ_w . Il ne semble pas y avoir de preuve mathématique ou physique convaincante qui vienne à l'appui d'une telle conclusion.

MODÈLE D'EDMONDSON ET LEHMAN

Edmondson et Lehman (1981) (EL dans la suite du texte) ont présenté un modèle d'eutrophisation qu'ils ont vérifié à l'aide de données recueillies dans le lac Washington. Ils sont partis de l'équation du modèle de lac bien mélangé à une seule échelle de temps (équation 3 dans le présent rapport, équation 10 dans EL). Leur modèle est intéressant car il fait intervenir une nouvelle façon de traiter le facteur relatif à la sédimentation du phosphore. En général, on se base sur une équation heuristique dans laquelle la sédimentation du phosphore est proportionnelle à la concentration de phosphore dans le lac; plus la concentration de phosphore est élevée, plus la vitesse de sédimentation est élevée. EL estiment qu'il est plus juste de supposer que la vitesse de sédimentation est proportionnelle à l'apport de phosphore, I (où $I = P_i Q$ en utilisant les symboles du présent rapport). On montrera que l'hypothèse de EL est incorrecte.

Pour obtenir le terme relatif à la sédimentation du phosphore, EL ont simplement réduit l'apport de phosphore en utilisant la constante de

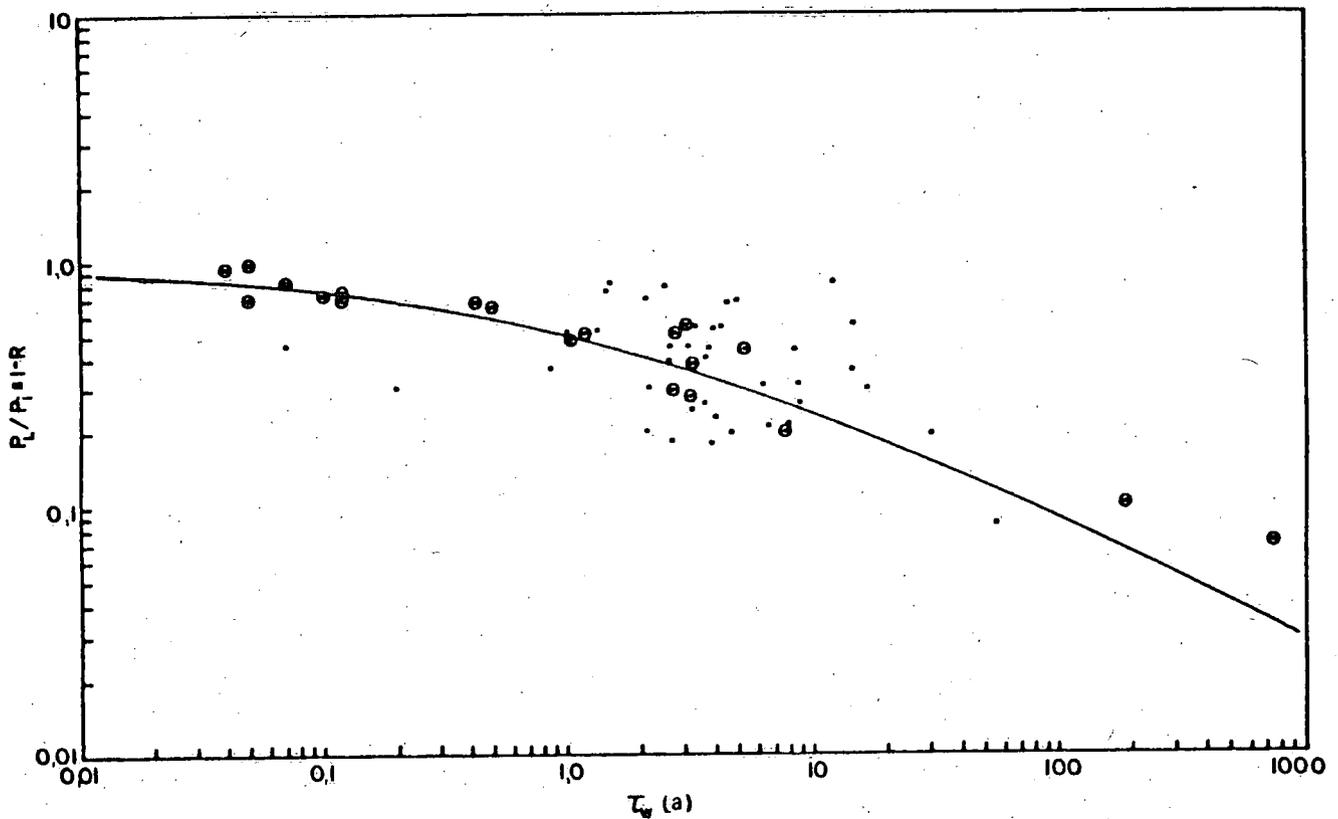


Figure 4. Rapport des concentrations de phosphore, P_L/P_i , non dimensionnel, en fonction du temps de séjour de l'eau, τ_w , pour 54 lacs étudiés par Larsen et Mercier (1976) et Vollenweider (1976). Les 20 lacs utilisés par Larsen et Mercier sont encerclés.

proportionnalité \underline{f} , égale à la pente de la droite de régression entre la sédimentation du phosphore, P_{sed} , et I . Le terme P_{sed} a lui-même été calculé à partir des autres termes du bilan du phosphore par différence. Ainsi, EL ont posé que la vitesse de sédimentation du phosphore était égale à l'apport annuel en phosphore moins l'évacuation annuelle de phosphore, P_o , moins la variation annuelle de la masse de phosphore dans le lac, dP , mesurée le 1^{er} janvier de chaque année. Soit:

$$\underline{f} = \text{fonction}(I, P_o, dP). \quad (29)$$

On montrera plus loin que l'équation du modèle de EL peut s'écrire:

$$dP = \text{fonction}(I, P_o, \underline{f}) \quad (30)$$

ou encore:

$$P_o = \text{fonction}(I, dP, \underline{f}). \quad (31)$$

Étant donné qu'aucune information nouvelle n'a été ajoutée entre les équations (29) et (31), le principe essentiel du modèle de EL est contenu dans \underline{f} et dans la droite de régression illustrée sur la figure 5. Les figures 6 et 7 qui sont présentées pour vérifier le modèle de EL ne sont que des reformulations de la figure 5. Les écarts par rapport à la droite correspondant à un accord de 100 % sur les figures 6 et 7 ne font que représenter les écarts par

rapport à la droite de régression de la figure 5. Si tous les points de la figure 5 s'étaient alignés sur la droite de régression, les «résultats» du modèle de EL sur les figures 6 et 7 auraient montré un accord parfait. En fait, le modèle de EL est tout simplement une tautologie.

Pour montrer encore mieux la tautologie, il convient d'examiner la figure 5 de façon approfondie. Cette figure représente la variation de l'apport annuel de phosphore dans les sédiments, $P_{séd}$, en fonction de la charge en phosphore, I . La droite de régression des moindres carrés pour les données de la figure 5 s'écrit:

$$\langle P_{séd} \rangle = \underline{f} I + \text{constante.} \quad (32)$$

Si l'apport annuel de phosphore dans le lac est connu pour une année quelconque, par exemple pour l'année J , la valeur estimée par les moindres carrés du taux annuel de sédimentation du phosphore pour l'année J , $\langle P_{séd} \rangle$, peut alors être obtenue à partir de l'équation (32).

Le modèle de EL prend la forme analogique discrète suivante (EL, équation 12):

$$P_{j+1} = I_j(1 - \underline{f}) + P_j(1 - Q_j/V) \quad (33)$$

où P_j est la teneur en phosphore du lac le 1^{er} janvier de chaque année. Cependant, EL ont comparé les prédictions obtenues à partir du modèle de l'évacuation annuelle avec les valeurs mesurées (figure 6) de telle sorte que les termes de l'équation du modèle doivent être réarrangés ainsi:

$$P_j Q_j / V = I_j(1 - \underline{f}) - (P_{j+1} - P_j) \quad (34)$$

= ÉVACUATION ANNUELLE PRÉDITE

L'équation (34) est l'équation du modèle

de EL qui permet de prédire l'évacuation de phosphore. On a substitué des valeurs de I_j , P_j et P_{j+1} dans le modèle de EL pour obtenir des valeurs du taux annuel d'évacuation du phosphore pour l'année J . La valeur de \underline{f} était constante et égale à la pente de 0.49 trouvée sur la figure 5. Ces valeurs prédites du taux d'évacuation ont été comparées avec les valeurs mesurées sur la figure 6. Une méthode similaire a été adoptée avec les valeurs de la concentration de P dans le lac de la figure 7.

L'équation (34) peut être développée sous la forme:

$$\begin{aligned} P_j Q_j / V &= I_j - \underline{f} I_j - (P_{j+1} - P_j) + P_{oj} - P_{oj} \\ &= I_j - P_{oj} - dP_j - \underline{f} I_j + P_{oj}. \end{aligned} \quad (35)$$

Mais,

$$P_{sédj} = (I - P_o - dP)_j \quad (36)$$

car $P_{séd}$ a été calculé par différence à partir du bilan. De plus, d'après l'équation (32), $\underline{f} I$ est la valeur estimée par les moindres carrés de $P_{séd}$ moins une constante. Soit:

$$\underline{f} I_j = \langle P_{séd} \rangle_j - \text{constante.} \quad (37)$$

Substituons les équations (36) et (37) dans l'équation (35). Nous obtenons le taux annuel d'évacuation du phosphore prédit par le modèle d'EL:

$$\begin{aligned} P_j Q_j / V &= P_{sédj} - \langle P_{séd} \rangle_j \\ &+ \text{constante} + P_{oj}. \end{aligned} \quad (38)$$

Pour les points de données qui tombent sur la droite de régression, $P_{séd}$ est identique à $\langle P_{séd} \rangle$. Pour tous les autres points, $P_{séd}$ est approximativement égal à $\langle P_{séd} \rangle$, à l'exception des points à l'écart de la droite de

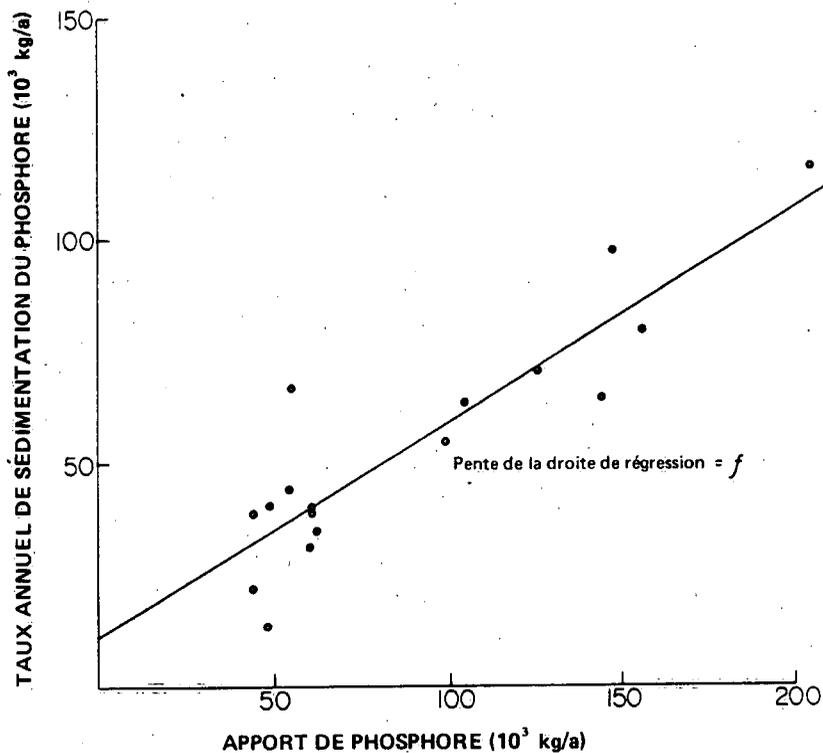


Figure 5. Taux annuel de sédimentation du phosphore calculé à partir du bilan de phosphore du lac Washington en fonction de l'apport de phosphore (d'après Edmondson et Lehman, 1981).

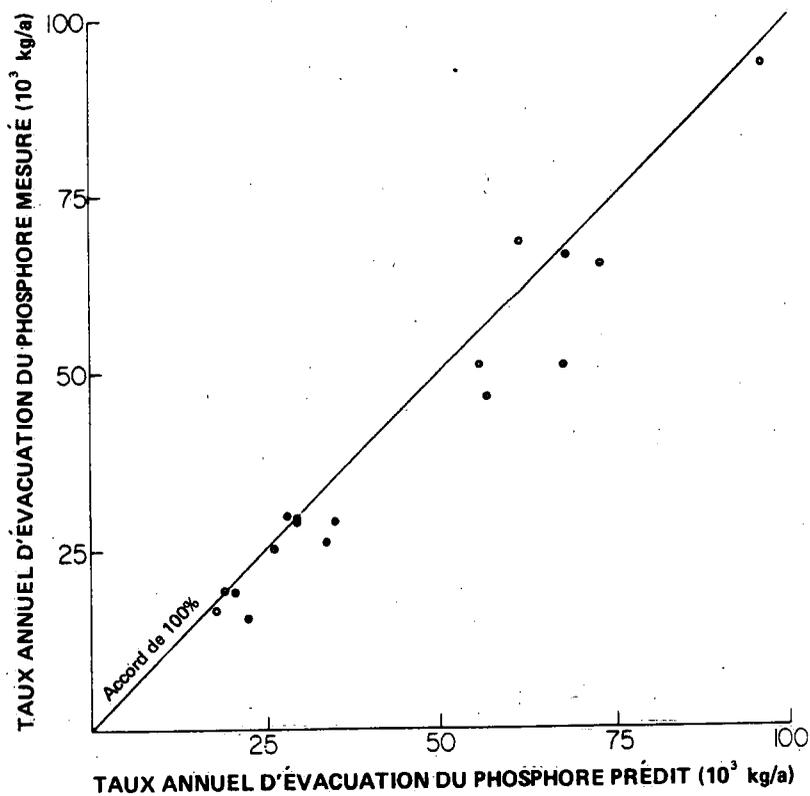


Figure 6. Taux d'évacuation du phosphore prédit à l'aide du modèle d'Edmondson et Lehman en fonction du taux d'évacuation mesuré (d'après Edmondson et Lehman, 1981).

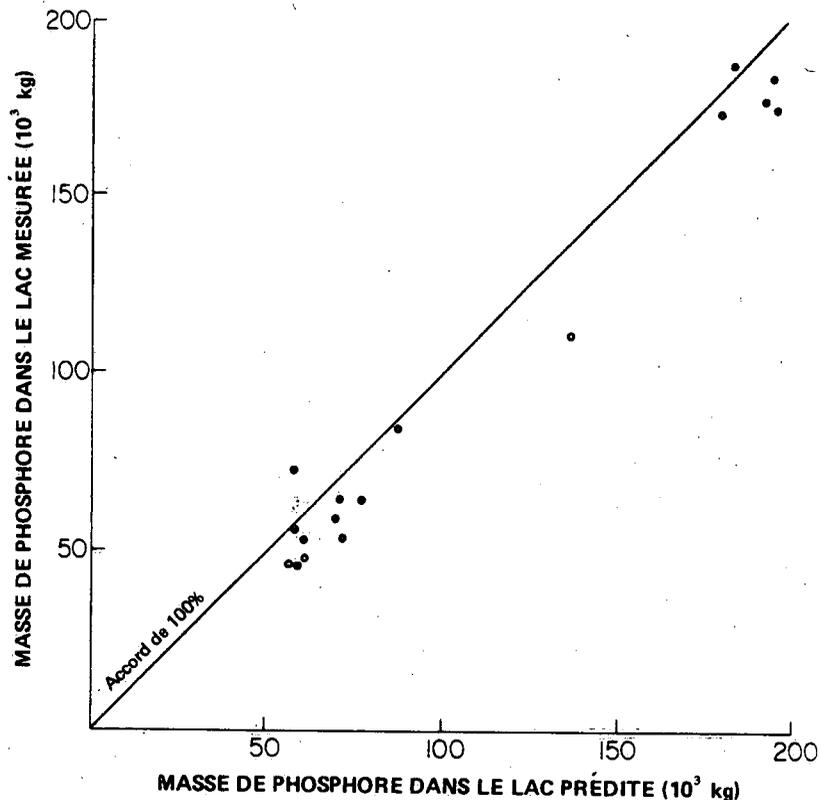


Figure 7. Masse de phosphore dans le lac prédite par le modèle d'Edmondson et Lehman en fonction de la masse de phosphore mesurée (d'après Edmondson et Lehman, 1981).

régression des moindres carrés. Par conséquent, l'équation (38) se réduit à:

$$P_j Q_j / V = P_{0j} + \text{constante} \pm \text{dispersion.} \quad (39)$$

On est donc revenu au point de départ. Le taux de phosphore évacué prédit est égal au taux de phosphore évacué mesuré plus une constante, plus ou moins une certaine dispersion. La constante, qui intervient du fait que la droite de régression de la figure 5 ne passe pas par l'origine, explique pourquoi la plupart des valeurs prédites se trouvent à droite de la droite théorique correspondant à un accord de 100 % entre les prédictions et les observations sur la

figure 6. Comme on l'a expliqué précédemment, la dispersion observée sur la figure 6 est simplement une réflexion de la dispersion observée sur la figure 5.

Les mêmes arguments s'appliquent à la figure 7 sur laquelle les valeurs prédites de la concentration de phosphore dans le lac se situent généralement à droite de la droite correspondant à un accord de 100 % avec les concentrations observées.

DYNAMIQUE DU PHOSPHORE DANS UN LAC

La présente section, examine plus en détail la nature des modèles entrée-sortie établis précédemment ainsi que plusieurs facteurs influant sur l'appli-

cation de ces modèles à des lacs réels. Il suppose que le phosphore est effectivement l'élément qu'il convient de modéliser et que le critère de Sawyer est correct. Par conséquent, la prédiction de l'eutrophisation peut se réduire à la prédiction du moment où $P_L > 10 \text{ mg/m}^3$, comme précédemment. Étant donné qu'il faut surtout déterminer les effets à long terme de la charge en phosphore dans un lac, c'est la valeur de P_L en régime permanent qui sera prédite.

La relation entre la charge en phosphore et la concentration de phosphore dans le lac en régime permanent a été donnée par l'équation (12) pour le modèle entrée-sortie à deux échelles, la vidange et la sédimentation. La charge critique en phosphore P_{L_c} dans un lac

donné peut être déterminée en substituant le critère de Sawyer dans l'équation (12). Soit:

$$L_c = 10z \left(\frac{1}{\tau_w} + \sigma \right) (\text{mg/m}^2/\text{an}). \quad (40)$$

Dans la limite des hypothèses posées, l'équation (40) est l'équation «prédictive» de l'eutrophisation du lac. Lorsque z , τ_w et σ sont connus, la charge critique en phosphore peut être calculée directement à partir de l'équation (40). Bien entendu, σ n'est généralement pas connu et c'est ce qui conduit aux problèmes examinés dans les chapitres précédents.

Constante de sédimentation, σ

Il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer indirectement σ pour un lac donné suivant le type de charge en phosphore associé à ce lac. Toutes les méthodes dépendent essentiellement de la validité du modèle entrée-sortie à deux échelles de temps. Toute erreur expérimentale dans les mesures (de même que toute erreur associée à d'autres sources ou puits non

inclus explicitement dans le modèle) est tout simplement absorbée dans la constante de sédimentation.

Méthode du régime permanent

La première méthode a été examinée brièvement lorsqu'on a envisagé le modèle de la charge hydraulique. Elle peut être appliquée à un lac donné si l'on sait que ce lac a atteint le régime permanent en ce qui concerne le phosphore. Supposer qu'un lac a atteint le régime permanent sans données corroborantes ne sert à rien. On peut vérifier l'état du lac en mesurant L et P_L pendant un certain temps. Si L et P_L restent constants pendant une période de temps égale ou supérieure à τ_0 , on peut supposer sans risques que le lac est en régime permanent. Si l'on dispose aussi de données pour z (et τ_w), on peut déterminer σ à partir de l'équation (13).

Si on cherche seulement à déterminer la charge critique en phosphore pour un lac donné en régime permanent, il n'est pas nécessaire de calculer la constante de sédimentation, σ . Pour un lac donné en régime permanent, le rapport L/P_L est constant. Par conséquent, il suffit de mesurer une seule fois L et P_L pour obtenir la constante, dans les limites des hypothèses requises, bien entendu. La charge critique en phosphore peut alors être déterminée à partir de l'équation:

$$\frac{L_c}{10} = \text{CONSTANTE} = \left(\frac{L}{P_L} \right) \text{ régime permanent} \quad (41)$$

L'équation (41) s'applique à chaque lac séparément, mais la valeur de la constante varie considérablement d'un lac à un autre.

Méthode de la réponse à une fonction échelon

On peut appliquer la deuxième méthode de détermination de la constante

de sédimentation s'il y a eu une variation soudaine de la charge en phosphore (augmentation ou diminution) et si les concentrations de phosphore dans le lac, P_L , sont mesurées immédiatement après la variation. Pour déterminer la constante de temps globale du lac, τ_0 , on ajuste une courbe exponentielle aux points représentant P_L en fonction du temps. Une fois que l'on connaît τ_0 , on peut calculer σ à partir de l'équation (10). Là encore, la charge critique en phosphore pour le lac donné peut être calculée à partir de l'équation (40).

Méthode de la réponse forcée

Dans beaucoup de lacs, la charge en phosphore n'est ni constante, ni sujette à des variations brusques; elle varie plutôt de façon continue. Dans ce cas, on doit examiner la réponse forcée du lac pour déterminer σ .

Pour simplifier l'étude des systèmes forcés, on présente d'abord une analyse de la réponse forcée du modèle entrée-sortie à une seule échelle de temps. L'équation linéaire de premier ordre gouvernant le modèle entrée-sortie à une échelle de temps (équation 3) peut être réécrite de la façon suivante:

$$\tau_w \frac{dP_L}{dt} + P_L = P_i(t) \quad (42)$$

où la concentration de phosphore dans les eaux affluentes, P_i , est maintenant la fonction de contrainte qui varie en fonction du temps pour le système. La fonction de contrainte la plus simple est donnée par l'équation:

$$P_i(t) = P_0 + P_1 \sin \omega t \quad (43)$$

où P_1 est l'amplitude d'une oscillation harmonique simple autour d'une certaine valeur constante de la concentration de phosphore, P_0 .

Les équations (42) et (43) se résolvent facilement en termes de l'amplitude relative des oscillations à la sortie et du déphasage entre l'entrée et la sortie, mais, pour abréger, la résolution de ces équations sera omise. Après décroissance des transitoires initiaux, la réponse du système forcé (P_L' , la partie oscillante de P_L dans cet exemple) a la même fréquence que la fonction de contrainte (c'est-à-dire ω). L'amplitude des oscillations à la sortie et le déphasage entre l'entrée et la sortie sont déterminés par les caractéristiques du système. Dans l'équation (42), il y a un seul paramètre qui caractérise le système au complet, le temps de renouvellement de l'eau, τ_w . L'amplitude relative de la réponse, G (c'est-à-dire l'ampleur de l'oscillation à la sortie par rapport aux oscillations à l'entrée, ou oscillations de contrainte) est donnée par l'équation:

$$G = \frac{P_L'}{P_1} = \frac{1}{(1 + \omega^2 \tau_w^2)^{1/2}} \quad (44)$$

Le retard de phase, ϕ , entre les oscillations à la sortie et les oscillations à l'entrée est donné par l'équation:

$$\phi = \tan^{-1} \omega \tau_w. \quad (45)$$

La réponse forcée du système est totalement décrite par G et ϕ en termes d'une fonction de la fréquence non dimensionnelle $\omega \tau_w$. Pour des oscillations de contrainte de basse fréquence (c'est-à-dire $\omega \tau_w$ petit), les oscillations à la sortie (P_L') suivent essentiellement les oscillations à l'entrée (P_1) avec une faible atténuation ou un faible déphasage. Par contre, les oscillations de contrainte de haute fréquence ($\omega \tau_w \gg 1$) sont très fortement atténuées. La concentration de phosphore dans le lac

accuse alors un retard d'environ 90° par rapport aux oscillations à l'entrée.

Soit par exemple un lac hypothétique ayant un temps de renouvellement de l'eau d'une année, soumis à une fonction de contrainte selon un cycle annuel. Les équations (44) et (45) donnent une réponse relative de seulement 0.16 avec un déphasage de 81° . Cela signifie que des oscillations de la concentration de phosphore à l'entrée de 100 mg/m^3 se traduiraient par une oscillation de la concentration de phosphore dans le lac de 16 mg/m^3 . Par conséquent, des oscillations annuelles de la concentration de phosphore à l'entrée constituent des oscillations de haute fréquence pour un lac dont le temps de renouvellement de l'eau est égal à une année. Des oscillations plus rapides de la concentration de phosphore à l'entrée (par exemple, mensuelles ou quotidiennes) sont plus atténuées dans ce lac hypothétique et elles doivent avoir une très grande amplitude pour que l'on puisse détecter des oscillations à la sortie.

Si l'on excepte le fait que les caractéristiques de la réponse sont déterminées par deux paramètres (τ_w et σ), la réponse forcée du modèle entrée-sortie à deux échelles de temps est similaire à la réponse décrite ci-dessus. L'équation principale (équation 7) peut être réécrite pour mettre en évidence le rôle de la fonction de contrainte sous la forme:

$$\tau_w \frac{dP_L}{dt} + (1 + \sigma\tau_w)P_L = P_0 + P_1 \sin \omega t \quad (46)$$

L'amplitude relative obtenue à partir de l'équation (46) est égale à:

$$G = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega\tau_w}{1 + \sigma\tau_w}\right)^2\right)^{1/2}} \quad (47)$$

Le déphasage est maintenant donné par l'équation:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega\tau_w}{1 + \sigma\tau_w}\right). \quad (48)$$

Lorsque le lac est soumis à une oscillation harmonique simple, c'est-à-dire une oscillation sinusoïdale de fréquence unique, on peut utiliser soit l'équation (47), soit l'équation (48) pour déterminer la constante de sédimentation dans la plage des fréquences non dimensionnelles, $0.1 \leq \omega\tau_w/(1 + \sigma\tau_w) \leq 10$. En dehors de cette plage de fréquences, la précision avec laquelle σ est déterminé est très mauvaise. Pour déterminer σ à partir de l'une ou l'autre des équations, il faut mesurer le temps de renouvellement de l'eau ainsi que les variations en fonction du temps des concentrations de phosphore dans l'apport d'eau et dans le lac sur une période suffisamment longue pour pouvoir calculer ω à partir des mesures. Lorsqu'on utilise l'équation (47), la réponse relative, G , est calculée à partir des variations en fonction du temps de l'apport et de l'écoulement de telle sorte que σ reste la seule inconnue dans l'équation (47). De même, le déphasage, ϕ , est mesuré directement à partir des variations en fonction du temps, ce qui permet d'utiliser l'équation (48) pour déterminer σ . Pour obtenir une précision raisonnable, il faut disposer de données recueillies pendant au moins un cycle complet de période $T = 2\pi/\omega$.

Lorsque les oscillations de contrainte ont une large bande de fréquences (c'est-à-dire lorsqu'elles sont composées d'un grand nombre de fréquences différentes), le déphasage entre les oscillations à l'entrée et les oscillations à la sortie peut encore être déterminé par une analyse interspectrale. Toutefois, les techniques spectrales requièrent des données recueillies pendant un grand nombre de

cycles complets et il est possible que l'on ne dispose pas d'un nombre suffisant de données pour effectuer une analyse spectrale si la fonction de contrainte est dominée par des basses fréquences. On insiste sur le fait que toutes les méthodes de détermination de σ décrites ici requièrent des données sur les variations en fonction du temps des concentrations de phosphore dans les eaux affluentes et dans le lac sur plusieurs τ_w . Par conséquent, dans un futur proche, la détermination de σ par analyse spectrale ne sera probablement appliquée qu'aux lacs pour lesquels τ_w est faible.

Coefficients variables en fonction du temps

Comme on l'a mentionné précédemment, le succès des modèles entrée-sortie en ce qui concerne la prédiction de l'eutrophisation dépend uniquement de la validité des hypothèses sur lesquelles les modèles sont basés. Autrement dit, le traitement mathématique est exact. On va maintenant examiner la validité d'une hypothèse qui influe considérablement sur l'application de ces modèles.

Tout au long du présent rapport, on a supposé que les coefficients des équations différentielles de premier ordre (soit τ_w , σ) étaient constants. Toutefois, la majorité des lacs réels sont sujets à de grandes variations de l'écoulement (Q) au cours d'une année car, dans un grand nombre de lacs tempérés, l'écoulement maximal se produit lors du ruissellement superficiel de printemps. Les variations du niveau du lac (z) et du volume (Az) peuvent aussi être importantes, en particulier avec les lacs utilisés pour la production d'électricité. Ces variables influent directement sur le temps de renouvellement de l'eau ($\tau_w = Az/Q$) de telle sorte que τ_w varie aussi en fonction du temps.

Les facteurs qui influent sur la constante de sédimentation, σ , ne sont pas très bien compris. On sait que la sédimentation est un processus aléatoire non permanent qui peut être positif ou négatif suivant la période considérée. Tous les lacs sont sujets à une certaine sédimentation négative dans la colonne d'eau et ce phénomène est très courant dans les lacs peu profonds. La sédimentation physique dépendant principalement du niveau de turbulence dans le lac, on peut s'attendre à ce que les grandes variations saisonnières de σ reflètent les différences entre la turbulence sous le manteau de glace en hiver et la turbulence en eaux libres dans les lacs tempérés.

Pour être plus réalistes, les modèles doivent donc faire intervenir des coefficients τ_w et σ qui varient en fonction du temps. Par exemple, l'équation

$$\tau_w(t) \frac{dP_L(t)}{dt} + \{1 + \sigma(t)\tau_w(t)\} P_L(t) = P_i(t) \quad (49)$$

remplace maintenant l'équation (46), (t) exprimant explicitement la variabilité en fonction du temps. Avant de pouvoir résoudre l'équation (49), il convient de connaître la variation temporelle de τ_w et de σ (ou de les prédire indépendamment), soit sous la forme de données historiques pour les variations aléatoires, soit sous la forme de fonctions analytiques pour les variations périodiques. La fonction de contrainte, $P_i(t)$ doit aussi être introduite dans le modèle. Cette fonction de contrainte peut prendre la forme de valeurs historiques de l'apport mesuré de phosphore dans un lac pour une prévision à posteriori de la réponse du lac. Des variations anticipées de l'apport de phosphore peuvent aussi être introduites

dans le modèle, soit sous forme de données historiques, soit sous forme de fonctions analytiques dans le but de prévoir les variations futures dans le lac.

Dans de nombreux lacs, les variations temporelles des coefficients peuvent être plus importantes que les variations de la concentration de phosphore dans les eaux affluentes (fonction de contrainte). Dans les lacs compliqués, la fonction de contrainte et les coefficients variables en fonction du temps peuvent même être couplés, par exemple par l'écoulement dans le lac, Q . En règle générale, on peut avancer qu'un ruissellement printanier important tend à égaliser la concentration de phosphore dans le lac et la concentration dans l'apport d'eau printanier en réduisant considérablement la valeur instantanée de τ_w . Par contre, la présence d'un manteau de glace a tendance à entraîner un accroissement de la sédimentation.

Une approximation quasi-stationnaire peut permettre de résoudre analytiquement l'équation (49) si les variations des coefficients sont faibles par rapport à la fréquence de la fonction de contrainte. Cependant, étant donné que les variations saisonnières de τ_w et σ sont souvent prédominantes, l'approximation quasi-stationnaire s'appliquera rarement. En général, les équations telles que l'équation (49) requièrent une résolution numérique.

Plusieurs exemples de l'application de la théorie décrite dans ces pages à des lacs réels sont présentés dans Kenney (1990a, 1990b).

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier K. Patalas, F.M. Boyce, D.W. Schindler, C. Gray, M. Waiser, et R.A. Vollenweider qui ont bien voulu examiner les premières ver-

sions du manuscrit et me faire part de leurs commentaires. Je désire aussi exprimer ma reconnaissance à J. Mollison qui a préparé les figures.

RÉFÉRENCES

- Edmondson, W.T., et J.T. Lehman. 1981. The effect of changes in the nutrient income on the condition of Lake Washington. *Limnol, Oceanogr.*, 26: 1-29.
- Kenney, B.C. 1982. Beware of spurious self-correlations! *Water Resour. Res.*, 18: 1041-1048.
- Kenney, B.C. 1990a. Dynamique du phosphore dans une chaîne de lacs: les lacs Fishing. Rapp. n° 44 de l'INRH, Étude n° 176, série scientifique, Institut national de recherche en hydrologie, Centre national de recherche en hydrologie, Direction générale des eaux intérieures, Environnement Canada, Saskatoon (Sask.).
- Kenney, B.C. 1990b. Lake dynamics and the effects of flooding on total phosphorus. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 47: 480-485.
- Larsen, D.P., et H.T. Mercier. 1976. Phosphorus retention capacity of lakes. *J. Fish. Res. Board Can.*, 33: 1742-1750.
- Sawyer, C.N. 1947. Fertilization of lakes by agricultural and urban drainage. *J. N. Engl. Water Works Assoc.*, 61: 109-127.
- Taylor, E.S. 1974. Dimensional analysis for engineers, Londres, Oxford University Press.
- Vollenweider, R.A. 1968. Scientific fundamentals of the eutrophication of lakes and flowing water, with particular reference to phosphorus and nitrogen as factors in eutrophication. OECD Tech. Rep. DAS/CS1/68.27. 159 p.
- Vollenweider, R.A. 1975. Input-output models with special reference to the phosphorus loading concept in

limnology. Schweiz. Z. Hydrol.,
37: 53-84.

Vollenweider, R.A. 1976. Advances in
defining critical loading levels for
phosphorus in lake eutrophication,
Mem. Ist. Ital. Idrobiol.,
33: 53-83.

Environment Canada Library, Burlington



3 9055 1017 2849 0

9649