DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

(2)

METHODE D'IDENTIFICATION POUR LA DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES STRUCTURELLES D'UNE SOUS-STRUCTURE D'UN SATELLITE

(1)

MASSOUD,Mounir
BELIVEAU,Jean-Guy
BOURASSA,PAUL

FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke / Québec / Canada

(2)

METHODE D'IDENTIFICATION POUR LA DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES STRUCTURELLES D'UNE SOUS-STRUCTURE D'UN SATELLITE

(1)

MASSOUD,Mounir
BELIVEAU,Jean-Guy
BOURASSA,PAUL

Gouvernement du Canada
Ministère de Communications

RAPPORT D'ENTREPRENEUR DU MDC MDC-CR-PS- 82-019

MINISTERE DES COMMUNICATIONS - OTTAWA - CANADA

PROGRAMME SPATIAL

TITRE: METHODE D'IDENTIFICATION POUR LA DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES STRUCTURELLES D'UNE SOUS-STRUCTURE D'UN SATELLITE

AUTEUR(S): MASSOUD, Mounir
BELIVEAU, Jean-Guy
BOURASSA, Paul

PUBLIE PAR L'ENTREPRENEUR COMME RAPPORT N°:

ENTREPRENEUR: Départment de Génie Méchanique
Université de Sherbrooke

N° DE CONTRAT DU MINISTERE DES APPROVISIONNEMENTS ET SERVICES: DOSSIER: MAS 20SU.36001-1-1805
SERIE: OSU81-00276

AUTORITE SCIENTIFIQUE DU MDC: F.R. Vigneron, T.D. Harrison

CLASSIFICATION: UNCL

DATE: 29 Mars 1982

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Description du problème

Un grand nombre de projets spatiaux vont faire appel, pendant la décade à venir, à de grosses structures. A cause des contraintes de poids, ces structures devront être flexibles et probablement légèrement amorties. Le problème de base pour l'évaluation de ces structures est le développement de modèle mathématique décrivant le système à des fins de design, d'analyse dynamique et surtout de contrôle. Il est pratiquement impossible qu'une structure compliquée puisse être modélisée de façon réaliste sans les efforts conjoints des ingénieurs responsables de la structure, de l'expérimentation et du contrôle. Dans les années 50 et au début des années 60, l'ingénieur expérimentateur développait et utilisait des méthodes au sol pour le test dynamique de ces structures. (F.7, G.4, K.1) Un bref rappel des bases mathématiques est donné au chapitre 2 et le chapitre 3 rappelle les principes de ces tests et souligne les principes mathématiques qui ont permis de tirer les premières estimations des paramètres modaux des structures à tester. Le succès de l'application de ces méthodes demande une compréhension très poussée des expressions mathématiques pour la réponse.

L'ingénieur de la construction, à ce stade, possède les techniques permettant de résoudre un problème direct; la structure doit être fabriquée, et ensuite les tests dynamiques suivent. Si le comportement prévu diffère du comportement mesuré, les changements appropriés doivent alors être

introduits. Les ingénieurs de la construction se mirent ensuite à étudier le problème inverse, à savoir les techniques d'identification de système, pendant les années 60 et au début des années 70. Ces techniques avaient pour but d'obtenir des informations sur les paramètres structuraux directement à partir de l'estimation initiale des paramètres modaux mesurés. Ces procédés sont décrits au chapitre 4. Des articles sur l'étude de ces techniques sont disponibles (N.1, P.1)

Le progrès réalisé dans les processus numériques utilisant la discrétisation d'éléments continus, introduisit un élément nouveau dans les procédés d'identification. Dans le chapitre 5 figure une brève discussion sur une de ces méthodes: les éléments finis. L'accent est mis dans ce chapitre sur un programme approprié à l'Astromast.

La nécessité d'identifier les paramètres de structure en tant que partie du processus entier de contrôle, conduisit à l'entrée de l'ingénieur de contrôle dans le procédé d'identification. Ce dernier est caractérisé par un modèle mathématique donné et le procédé consiste alors à estimer les paramètres par des processus d'itération appropriés. Ces processus figurent au chapitre 6, ainsi qu'un programme pour estimer le paramètre convenable pour l'Astromast.

1.2 Remarques sur les procédés d'identification

Très tôt, les procédés d'identification sont basés sur le test et l'analyse de la structure complexe complète comme une seule unité. Le

résultat de ce procédé est un modèle mathématique possédant un très grand nombre de degrés de liberté. Les données caractéristiques dynamiques du test sont cependant conservées dans un nombre limité des premiers modes qui peuvent être excités. Cela conduit à des difficultés numériques dans les procédés d'estimation et à l'introduction d'erreurs spécialement dans l'estimation des paramètres d'amortissement.

Une méthodologie mieux adaptée à ces structures a été développée au cours des dix dernières années. Dans cette méthode, la structure complète est divisée en plusieurs sous-systèmes. Ces derniers sont alors identifiés par les méthodes classiques et les résultats sont assemblés à l'aide de techniques de couplage pour synthétiser le modèle mathématique complet. La matrice d'amortissement obtenue avec les techniques de sous-structuration s'est révélée être plus précise.que celle obtenue précédemment. Ce rapport discute des procédés d'identification quant à leur application aux sous-structures en mettant l'accent sur la modélisation de la sous-structure de l'Astromast.

Les techniques de couplage sont l'objet d'un prochain rapport.

1.3 Remarques sur les procédés expérimentaux

Les approches utilisées dans les procédés expérimentaux pour trouver les estimations initiales des paramètres modaux se classent en 3 catégories:

1. techniques dans le domaine des fréquences; méthodes modales
2. techniques dans le domaine du temps
3. techniques dans le domaine des fréquences, méthodes non modales (tests de choc, excitations aléatoires).

La première catégorie est encore la plus populaire, sa popularité étant due, à l'origine, à la facilité des procédés de test. Cependant, ils exigent que la structure à tester soit isolée ou que le test soit mené hors place. Les techniques dans le domaine du temps conviennent pour les tests sur place, comme par exemple le test du satellite sur orbite. Les techniques non modales dans le domaine des fréquences nécessitent des estimations sur les densités spectrales des fonctions d'excitation et de réponse. Le présent rapport discute du domaine des fréquences, uniquement en ce qui concerne les méthodes modales.

1.4 Bibliographie

De nombreux articles couvrant les expériences faites en Europe et en Amérique du Nord sont disponibles. Ces articles dressent une liste extensive des références sur ce sujet. Ce n'est pas le but de ce rapport de répéter toutes les références citées dans ces articles. Les dernières conférences importantes dans ce domaine sont seulement citées dans ce rapport. Seules les vieilles références classiques sont mentionnées. Voici quelques exemples d'articles (P.1, N.1, B.6, D.1, I.1, K.3)

CHAPITRE 2

FORMULATION MATHÉMATIQUE: ASPECT DES MODES DE RÉPONSE DU SYSTÈME

2.1 Introduction

Les tests expérimentaux ont pour but d'exploiter la théorie relative aux propriétés des vibrations linéaires afin de construire un modèle mathématique de la structure. Cependant les différentes techniques expérimentales ne peuvent être évaluées que si le mouvement du système sous test est correctement compris. Cela peut être fait par l'interprétation correcte d'une solution appropriée du système linéaire reflétant un phénomène observable. Il existe de nombreuses techniques mathématiques (H.1, H.2, G.4, D.2) pour solutionner la technique mathématique linéaire; cependant les solutions basées sur la superposition des modes sont les mieux appropriées aux techniques expérimentales concernant les tests de résonance. Ces solutions expriment le mouvement du système à la résonance comme un vecteur dans un espace Euclidien n x n engendré par n vecteurs propres indépendants (formes des modes) et les composantes sur ces vecteurs sont les coordonnées principales (K.1). La réponse peut alors être exprimée par un nombre limité de modes de vibration ou de vecteurs propres.

On a résumé dans ce chapitre les expressions des réponses des structures amorties utilisant une approche modale en mettant l'accent sur les données de réponse en un point dû à une force unique appliquée à un autre point ou à plusieurs forces à tous les n points de la structure. Ce n'est pas le but de ce chapitre de présenter des formules mathématiques rigoureuses et l'accent est mis principalement sur les résultats pratiques qui couvrent la majorité des applications.

2.2 Formulation mathématique: problème des valeurs propres

2.2.1 Aspects de l'espace de configuration et de l'espace d'état

L'équation d'un petit mouvement forcé d'un système en vibration peut s'écrire dans la forme conventionnelle de l'espace de configuration:

$$M\,x^{\circ\circ}(t) + C\,x^{\circ}(t) + K\,x(t) = f(t) \qquad (1)$$

M_{nxn} = matrice de masse

C_{nxn} = matrice d'amortissement

K_{nxn} = matrice de rigidité

X_{nx1} = vecteur de réponse

$f(t)$ = fonction de forcement

Comme on procède quelquefois au calcul de l'identification du système dans l'espace d'état, les n équations (1) du 2è ordre sont transformées en 2n équations du 1er ordre dans l'espace d'état (D.2), M et K et C sont symmétrique.

$$A\,z^{\circ}(t) + B\,z(t) = g(t) \qquad (2)$$

où,

$$A_{2n\times 2n} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{nxn} & M_{nxn} \\ \hline M_{nxn} & C_{nxn} \end{array}\right]$$

$$B_{2n\times 2n} = \left[\begin{array}{c|c} -M & 0 \\ 0 & K \end{array}\right]$$

$$g_{2n\times 1}(t) = \left[\begin{array}{c} 0_{nx1} \\ \hline f_{nx1} \end{array}\right]$$

Le mécanisme physique responsable de l'amortissement est très compliqué et est associé à l'interaction de la structure et de son environnement. On n'a pas besoin de connaître son origine dans ce chapitre, du moment que son influence sur la réponse est connue. Toutefois, nous nous ramenons à un amortissement arbitraire lorsqu'aucune contrainte n'est imposée sur la forme de la matrice C, et à un amortissement proportionnel pour [illegible] (C.3). Toutes les données sur les amortissements peuvent être trouvées en référence (C.1, 5.4, 0.1) La partie homogène de l'équation (1) ou de l'équation (2) est un problème classique de valeurs propres. L'accent dans les expressions qui suivent est porté sur les résultats suivants:

i) les valeurs propres ou fréquences caractéristiques;

ii) vecteurs propres ou formes des modes;

iii) conditions d'orthogonalité des formes des modes.

2.2.2 Problème des valeurs propres dans l'espace de configuration

Considérons la partie homogène de l'équation (1),

$$M\,x^{\circ\circ}(t) + C\,x^{\circ}(t) + K\,x(t) = 0 \tag{3}$$

Posons,

$$x_{n\times 1} = \frac{1}{2}\left[\left[\mathrm{diag.}\, e^{\lambda t}\right]_{n\times n} X_{n\times 1} + \left[\mathrm{diag.}\, e^{\lambda^* t}\right]_{n\times n} X^*_{n\times 1}\right], \tag{4}$$

Où X est un vecteur complexe et X^* son conjugué.

De (3) et (4), nous tirons:

$$\left[M\left[\mathrm{diag.}\,\lambda^2\right] + C\left[\mathrm{diag.}\,\lambda\right] + K\right]\left[\mathrm{diag.}\, e^{\lambda t}\right] X = 0 \tag{5}$$

$$\left[M\left[\mathrm{diag}\,\lambda^{*2}\right] + C\left[\mathrm{diag.}\,\lambda^*\right] + K\right]\left[\mathrm{diag.}\, e^{\lambda^* t}\right] X^* = 0 \tag{6}$$

Table 1. Types of Proportional Damping

Tableau 1. Amortissement proportionnel

Structural	$\Lambda_j = i\,\Omega_j\,\sqrt{1+i\,\gamma}$
$[C] = \dfrac{\gamma}{\sqrt{1+i\gamma}}\,[K][\phi][\Omega]^{-1}[\phi]^{-1}$	$\zeta_j = \dfrac{(\gamma/2)}{\sqrt{1+i\gamma}}$
Rayleigh	$\Lambda_j = -\left(\dfrac{(\alpha+\beta\Omega_j^2)}{2}\right) + i\sqrt{\Omega_j^2 - \left(\dfrac{\alpha+\beta\Omega_j^2}{2}\right)^2}$
$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$	$\zeta_j = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{\Omega_j} + \beta\,\Omega_j\right)$
Caughey *(generalized Rayleigh)* *	$\Lambda_j = -\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\,\Omega_j^{2k-2} + i\sqrt{\Omega_j^2 - \left(\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\,\Omega_j^{2k-2}\right)^2}$
$[C] = [M][\phi]\left[\sum_{k=1}^{m}\sigma_k[\Omega]^{2k-2}\right][\phi]^{-1}$	$\zeta_j = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\,\Omega_j^{2k-3}$ $\quad m \leq n$: *degrees of freedom*
Dyadic (* *)	$\Lambda_j = \begin{cases} -\mu_j\Omega_j + i\Omega_j\sqrt{1-\mu_j^2} & j=1,2\ldots m \\ i\,\Omega_j & j=m+1\ldots n \end{cases}$
$[C] = 2[M]\left[\sum_{k=1}^{m}\mu_k\Omega_k\{u_k\}\{v_k\}^T\right]$	$\zeta_j = \begin{cases} \mu_j : & j=1,2\ldots m \\ 0 & j=m+1\ldots n \end{cases}$

(*) *Rayleigh case is a special one of Caughey when $m=2$*

(**) *modal damping ratios are set arbitrarily; with modes of no interest $\zeta_i = 0$.*

Les équations caractéristiques de (5) et (6) sont:

$$\left| M\,[\mathrm{diag}\,\lambda^2] + C\,[\mathrm{diag}\,\lambda] + K \right| = 0 \qquad (7)$$

$$\left| M\,[\mathrm{diag}\,\lambda^{*2}] + C\,[\mathrm{diag}\,\lambda^*] + K \right| = 0 \,. \qquad (8)$$

L'équation (7) est une matrice qui a n racines complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et les n racines complexes conjuguées $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*$. De même l'équation (8) a n racines complexes $\lambda_1^*, \ldots \lambda_n^*$ et n racines complexes conjuguées $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, où,

$$\lambda_r = -a_r + j\,b_r \quad ; \quad r = 1, \ldots n \qquad (9)$$

$$\lambda_r^* = -a_r - j\,b_r \quad ; \quad r = 1, \ldots n$$

On a découvert (H.2, C.5, S.4) que l'amortissement joue un rôle important uniquement lorsque la fréquence de la force conductrice est proche de la fréquence de résonance de la structure et on peut établir un taux constant d'amortissement visqueux équivalent ξ_r qui tient compte du facteur de perte de la structure. L'équation (9) peut donc s'écrire de la façon suivante:

$$\lambda_r = -\Omega_r \xi_r + j\,\Omega_r^d = -\delta_r + j\,\Omega_r^d$$

et (10)

$$\lambda_r^* = -\Omega_r \xi_r - j\,\Omega_r^d = -\delta_r - j\,\Omega_r^d$$

où,

Ω_r = $r^{\text{ième}}$ fréquence naturelle du système non amorti $= \sqrt{a_r^2 + b_r^2}$

ξ_r = taux d'amortissement associé au $r^{\text{ième}}$ mode. $= \dfrac{a_r}{\sqrt{a_r^2 + b_r^2}}$

Ω_r^d = $r^{\text{ième}}$ fréquence naturelle du système amorti

$$= \Omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \tag{11}$$

$\delta_r = \Omega_r \xi_r$ = taux de décroissance.

On a également avancé (H.2) que les termes de couplage d'amortisseur sont importants seulement lorsque 2 modes ou plus du système ont des fréquences si proches que de petites forces d'amortissement dans le système entraînent le passage de quantités importantes d'énergie d'un mode à l'autre. Hasselman (H.2) a mentionné que les termes de couplage pouvaient être négligés si,

$$\left[\zeta_r \Big/ \left[\frac{\Omega_{r+1}^2}{\Omega_r^2} - 1 \right] \right]^{1/2} \frac{c_{r,r+1}}{c_{rr}} << 1$$

c_{ij} element de C.

Pour les formules suivantes, on a posé comme hypothèse que les fréquences étaient suffisamment espacées. Les corrections pour les fréquences rapprochées viendront plus tard, d'après les tests expérimentaux.

Posons,

$$\phi_r^d = \left[\text{diag}\, e^{j\theta_{sr}} \right] X_r = \text{eigen vector of } \lambda_r \text{ ; } X_r \text{ is a real vector, } s = 1, .. n$$

$$\phi_r^{d*} = \left[\text{diag}\, e^{-j\theta_{sr}} \right] X_r = \text{eigen vector of } \lambda_r^* . \tag{12}$$

Le mouvement correspondant à la $r^{\text{ième}}$ harmonique est donné par les équations (4), (10) et (12);

$$x_r = \frac{1}{2} \left[\left[\text{diag}\, e^{\lambda_r t} \right] \phi_r^d + \left[\text{diag}\, e^{\lambda_r^* t} \right] \phi_r^{d*} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{diag}\, e^{-\delta_r t} \right] \left[\left[\text{diag.}\, e^{j(\Omega_r^d t + \theta_{sr})} \right] + \left[\text{diag}\, e^{-j(\Omega_r^d t + \theta_{sr})} \right] \right] X_r$$

$$= \left[\text{diag}\, e^{-\delta_r t} \right] \left[\text{diag}\, \cos(\Omega_r^d t + \theta_{sr}) \right] X_r \equiv \text{real value} \quad . \tag{13}$$

2.2.3 Modes amortis

A partir des équations (12) et (13), en négligeant l'élément d'amortisseur $e^{-\delta rt}$, le $r^{\text{ième}}$ mode amorti est donné par:

$$x_r = \frac{1}{2}\left[\left[\operatorname{diag} e^{j\Omega_r^d t}\right]\Phi_r^d + \left[\operatorname{diag} e^{-j\Omega_r^d t}\right]\Phi_r^{d*}\right]$$

$$[x_1 \ldots x_r \ldots x_n] = \begin{bmatrix} X_{11}\cos(\theta_{11}+\Omega_1^d t) \ldots & X_{1r}\cos(\theta_{1r}+\Omega_1^d t) & \ldots & X_{1n}\cos(\theta_{1n}+\Omega_n^d t) \\ X_{21}\cos(\theta_{21}+\Omega_1^d t) \ldots & X_{2r}\cos(\theta_{2r}+\Omega_r^d t) & \ldots & X_{2n}\cos(\theta_{2n}+\Omega_n^d t) \\ \vdots & & & \\ X_{n1}\cos(\theta_{n1}+\Omega_1^d t) \ldots & X_{nr}\cos(\theta_{nr}+\Omega_r^d t) & \ldots & X_{nn}\cos(\theta_{nn}+\Omega_n^d t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

la $r^{\text{ième}}$ valeur propre ou mode amorti est donnée par la $r^{\text{ième}}$ colonne de la matrice ci-dessus et est représentée par les projections horizontales des vecteurs de rotation suivants:

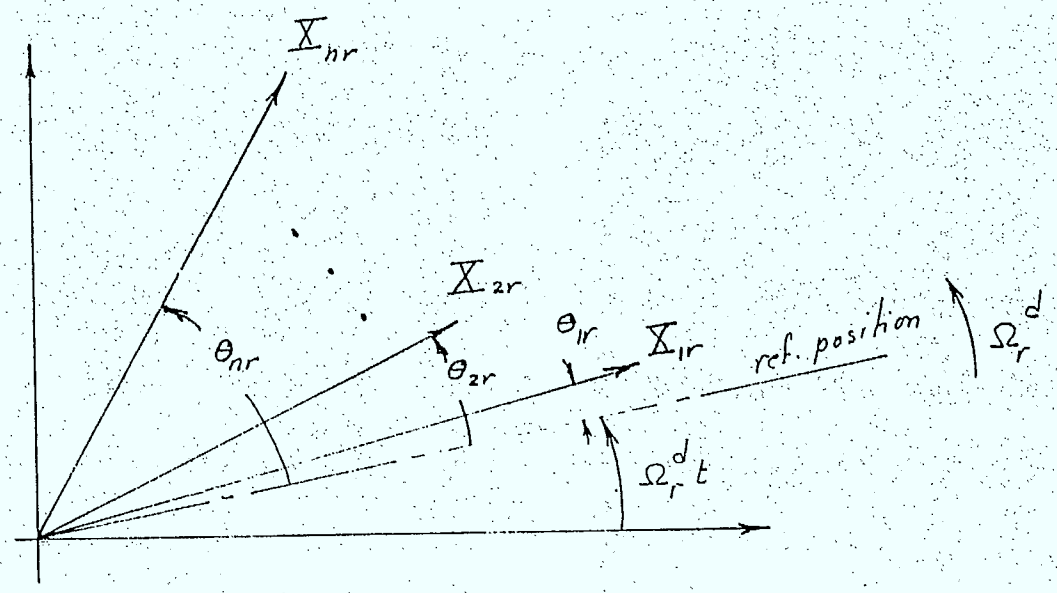


Fig. 1 Modes amortis

L'équation (14) est une matrice modale. Néanmoins en prenant sa valeur pour t = 0, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\left[\Phi^{d} + \Phi^{d*}\right] = \begin{bmatrix} X_{11}\cos\theta_{11} & \cdots & X_{1r}\cos\theta_{1r} & \cdots & X_{1n}\cos\theta_{1n} \\ X_{21}\cos\theta_{21} & \cdots & X_{2r}\cos\theta_{2r} & \cdots & X_{2n}\cos\theta_{2n} \\ \vdots & & & & \\ X_{n1}\cos\theta_{n1} & \cdots & X_{nr}\cos\theta_{nr} & \cdots & X_{nn}\cos\theta_{nn} \end{bmatrix} \tag{15}$$

où

$$\Phi^{d} = \left[\phi_1^{d} \cdots \phi_r^{d} \cdots \phi_n^{d}\right] = \begin{bmatrix} X_{11}e^{j\theta_{11}} & \cdots & X_{1r}e^{j\theta_{1r}} & \cdots & X_{1n}e^{j\theta_{1n}} \\ X_{21}e^{j\theta_{21}} & \cdots & X_{2r}e^{j\theta_{2r}} & \cdots & X_{2n}e^{j\theta_{2n}} \\ \vdots & & & & \\ X_{n1}e^{j\theta_{n1}} & \cdots & X_{nr}e^{j\theta_{nr}} & \cdots & X_{nn}e^{j\theta_{nn}} \end{bmatrix}$$

et

$$\Phi^{d*} = \left[\phi_1^{d*} \cdots \phi_r^{d*} \cdots \phi_n^{d*}\right] = \begin{bmatrix} X_{11}e^{-j\theta_{11}} & \cdots & X_{1r}e^{-j\theta_{1r}} & \cdots & X_{1n}e^{-j\theta_{1n}} \\ X_{21}e^{-j\theta_{21}} & \cdots & X_{2r}e^{-j\theta_{2r}} & \cdots & X_{2n}e^{-j\theta_{2n}} \\ \vdots & & & & \\ X_{n1}e^{-j\theta_{n1}} & \cdots & X_{nr}e^{-j\theta_{nr}} & \cdots & X_{nn}e^{-j\theta_{nn}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Les modes ci-dessus se rapportent à l'équation (1) dans l'espace de configuration où les colonnes de $\bar{\Phi}^{d}$ représentent la forme complexe des vecteurs de rotation de la figure (1) dans le plan complexe;

$$\Phi^{d} = \text{matrice modale d'amortissement}$$

$$\Phi_r^{d} = r^{\text{ième}} \text{ mode amorti} \tag{17}$$

2.2.4 Modes amortis complexes

Les matrices modales $\bar{\Phi}^d$ et $\bar{\Phi}^{d*}$ du mode amorti peuvent être combinées en une matrice complexe (2n x 2n) du mode amorti, très utile pour la solution du modèle dynamique exprimée dans l'espace d'état.

De l'équation (13), nous tirons:

$$[x_1 \dots x_r \dots x_n]_{n\times n} = \frac{1}{2}\left[\Phi^d_{n\times n}[\text{diag. } e^{\lambda_r t}]_{n\times n} + \Phi^{d*}_{n\times n}[\text{diag. } e^{\lambda_r^* t}]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi^d \,\middle|\, \Phi^{d*}\right]_{n\times 2n} \begin{bmatrix} \text{diag. } e^{\lambda_r t} \\ \hline \text{diag. } e^{\lambda_r^* t} \end{bmatrix}_{2n\times n} .$$

En dérivant par rapport à t,

$$[\dot{x}_1 \dots \dot{x}_r \dots \dot{x}_n] = \frac{1}{2}\left[\Phi^d[\text{diag } \lambda_r] \,\middle|\, \Phi^{d*}[\text{diag } \lambda_r^*]\right]\begin{bmatrix} \text{diag } e^{\lambda_r t} \\ \hline \text{diag } e^{\lambda_r^* t} \end{bmatrix} .$$

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x}_1 \dots \dot{x}_r \dots \dot{x}_n \\ \hline x_1 \dots x_r \dots x_n \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \Phi^d[\text{diag } \lambda_r] & \Phi^{d*}[\text{diag. } \lambda_r^*] \\ \hline \Phi^d & \Phi^{d*} \end{array}\right]\begin{bmatrix} \text{diag } e^{\lambda_r t} \\ \hline \text{diag } e^{\lambda_r^* t} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \Phi^{cd}_{2n\times 2n} \quad \begin{bmatrix} \text{diag } e^{\lambda_r t} \\ \hline \text{diag } e^{\lambda_r^* t} \end{bmatrix} ,$$

où

Φ^{cd} = matrice modèle complexe amortie

$= [\Phi_1^{cd} \dots \Phi_r^{cd} \dots \Phi_n^{cd}]$

Φ_r^{cd} = $r^{\text{ième}}$ mode complexe amorti (18)

L'équation (18) peut être écrite sous une forme différente, très utile pour la solution de l'équation (2):

$$\left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{x}_1 \cdots \overset{\circ}{x}_r \cdots \overset{\circ}{x}_n \\ \hline x_1 \cdots x_r \cdots x_n \end{array}\right]_{2n\times n} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \Phi^{d}\,\mathrm{diag}\,\lambda_r & \Phi^{d*}\,\mathrm{diag}\,\lambda_r^{*} \\ \hline \Phi^{d} & \Phi^{d*} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathrm{diag}\, e^{\lambda_r t} \\ \hline \mathrm{diag}\, e^{\lambda_r^{*} t} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left[\begin{array}{c} \Phi^{d}\,\mathrm{diag.}\,\lambda_r \\ \hline \Phi^{d} \end{array}\right]_{2n\times n}\left[\mathrm{diag}\, e^{\lambda_r t}\right]_{n\times n} + \left[\begin{array}{c} \Phi^{d*}\,\mathrm{diag}\,\lambda_r^{*} \\ \hline \Phi^{d*} \end{array}\right]\left[\mathrm{diag}\, e^{\lambda_r^{*} t}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\; z_{r\,2n\times n} + z^{*}_{r\,2n\times n}\;\right] \qquad (19)$$

ou encore,

$$\left[\, z_r \;\middle|\; z_r^{*} \,\right]_{2n\times 2n} = \Phi^{cd}\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}\, e^{\lambda_r t} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{diag}\, e^{\lambda_r^{*} t} \end{array}\right] \qquad (20)$$

Quelque fois la valeur de Φ^{cd-1} est utile ; (B.12),

$$\Phi^{cd-1} = \left[\begin{array}{c|c} \Phi^{d-1} E^{-1} & -\Phi^{d-1} E^{-1} [\mathrm{diag}\,\lambda_r]\,\Phi^{d-1} \\ \Phi^{d*-1} E^{*-1} & -\Phi^{d*-1} E^{*-1} \Phi^{d} [\mathrm{diag}\,\lambda_r]\,\Phi^{d-1} \end{array}\right]$$

E est imaginaire ;

$$E = \Phi^{d}[\mathrm{diag.}\,\lambda_r]\,\Phi^{d-1} - \Phi^{d*}[\mathrm{diag.}\,\lambda_r^{*}]\,\Phi^{d*-1}$$

2.2.5 Conditions d'orthogonalité

Les équations (5) et (6) ne sont pas écrites sous la forme standard des problèmes de valeurs propres $[A - \lambda I] X = 0$. Ainsi les vecteurs propres ne sont pas orthogonaux par rapport à chacune des matrices* M, K et C. Cependant des conditions spéciales d'orthogonalité peuvent être écrites comme suit:

Des équations (5) et (12), on tire:

$$\left[M [\, diag\, \lambda_r^2 \,] + C\, [\, diag\, \lambda_r \,] + K \right] \phi_r^d = 0 \,,$$

en multipliant à gauche par ϕ_r^{d*T} et en transposant,

$$\phi_r^{dT} \left[M [\, diag\, \lambda_r^2 \,] + C\, [\, diag\, \lambda_r \,] + K \right] \phi_\ell^{d*} = 0 \,. \qquad (21)$$

De même on tire de (6) et (12),

$$\left[M [\, diag\, \lambda_\ell^{*2} \,] + C\, [\, diag\, \lambda_\ell^* \,] + K \right] \phi_\ell^{d*} = 0 \,,$$

en multipliant à gauche par ϕ_r^{dT},

$$\phi_r^{dT} \left[M [\, diag\, \lambda_\ell^* \,]^2 + C\, [\, diag\, \lambda_\ell^* \,] + K \right] \phi_\ell^{d*} = 0 \,. \qquad (22)$$

En soustrayant (22) de (21), on obtient

$$\left[\phi_r^{dT} M \phi_\ell^{d*} (\lambda_r + \lambda_\ell^*) + \phi_r^{dT} C \phi_\ell^{d*} \right] (\lambda_r - \lambda_\ell^*) = 0 \,, \qquad (23)$$

et en ajoutant (22) à (21),

$$\left[\phi_r^{dT} M \phi_\ell^{d*} (\lambda_r^2 + \lambda_\ell^{*2}) + \phi_r^{dT} C \phi_\ell^{d*} (\lambda_r + \lambda_\ell^*) + 2 \phi_r^{dT} K \phi_\ell^{d*} = 0 \qquad (24)$$

---

* Le cas particulier de non amortissement proportionnel peut être formulé sous forme de problème standard de valeurs propres, ce qui entraîne que les formes de modes respectent les conditions standard d'orthogonalité comme on le montrera plus tard.

If $\lambda_r \neq \lambda_\ell^*$ we get,

$$\phi_r^{dT} M \phi_\ell^{d*} (\lambda_r + \lambda_\ell^*) + \phi_r^{dT} C \phi_\ell^{d*} = 0 \quad , \tag{25}$$

et de (24) et (25), on tire,

$$\phi_r^{dT} K \phi_\ell^{d*} - \phi_r^{dT} M \phi_\ell^{d*} \lambda_r \lambda_\ell^* = 0 . \tag{26}$$

Comme $\lambda_r \neq \lambda_r^*$ on a,

$$\phi_r^{dT} M \phi_r^{d*} (\lambda_r + \lambda_r^*) + \phi_r^{dT} C \phi_\ell^{d*} = 0 \quad , \tag{27}$$

$$\phi_r^{dT} K \phi_r^{d*} - \phi_r^{dT} M \phi_r^{d*} \lambda_r \lambda_r^* = 0 . \tag{28}$$

On remarque que d'après (10), $(\lambda_r + \lambda_r^*) = -2\,\Omega_r\,\zeta_r$ et $\lambda_r \lambda_r^* = \Omega_r^2$

En répétant le même procédé on peut écrire:

$$\phi_r^{dT} M \phi_\ell^{d} (\lambda_r + \lambda_\ell) + \phi_r^{dT} C \phi_\ell^{d} \begin{cases} = 0 & , \; r \neq \ell \\ = \alpha_r & , \; r = \ell \end{cases} \tag{29}$$

$$\phi_r^{d*T} M \phi_\ell^{d*} (\lambda_r^* + \lambda_\ell^*) + \phi_r^{d*T} C \phi_\ell^{d*} \begin{cases} = 0 & , \; r \neq \ell \\ = \alpha_r^* & , \; r = \ell \end{cases} \tag{30}$$

$$\phi_r^{dT} K \phi_\ell^{d} - \phi_r^{dT} M \phi_\ell^{d} (\lambda_r \lambda_\ell) \begin{cases} = 0 & , \; r \neq \ell \\ = \beta_r & , \; r = \ell \end{cases} \tag{31}$$

$$\phi_r^{d*T} K \phi_\ell^{d*} - \phi_r^{d*T} M \phi_\ell^{d*} (\lambda_r^* \lambda_\ell^*) \begin{cases} = 0 & , \; r \neq \ell \\ = \beta_r^* & , \; r = \ell \end{cases} \tag{32}$$

Pour $r = \ell$, et à partir de (21) (en remplaçant $\bar{\phi}_r^{d*}$ par $\bar{\phi}_r^{d}$) on tire,

$$\phi_r^{dT} K \phi_r^{d} = - \phi_r^{dT} M \phi_r^{d} \lambda_r^2 - \phi_r^{dT} C \phi_r^{d} \lambda \quad ,$$

En substituant cette expression dans (32) et en utilisant (29), on peut démontrer que:

$$\beta_r = - \lambda_r \alpha_r \quad \text{and} \quad \beta_r^* = - \lambda_r^* \alpha_r^* .$$

Les équations (25) à (32) peuvent être écrites sous une forme plus concise, et en utilisant les résultats (17), (18) et l'équation (2), on a:

$$\left[\begin{array}{c|c} [\mathrm{diag}\,\lambda_r]\,\Phi^{dT} & \Phi^{dT} \\ \hline [\mathrm{diag}\,\lambda_r^*]\,\Phi^{d*T} & \Phi^{d*T} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline M & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \Phi^{d}[\mathrm{diag}\,\lambda_r] & \Phi^{d*}[\mathrm{diag}\,\lambda_r^*] \\ \hline \Phi^{d} & \Phi^{d*} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}\,\alpha_r & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{diag}\,\alpha_r^* \end{array}\right] ,$$

ou,

$$\Phi^{cdT} \quad A \quad \Phi^{cd} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}\,\alpha_r & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{diag}\,\alpha_r^* \end{array}\right] . \qquad (33)$$

Aussi,

$$\left[\begin{array}{c|c} [\mathrm{diag}\,\lambda_r]\,\Phi^{dT} & \Phi^{dT} \\ \hline [\mathrm{diag}\,\lambda_r^*]\,\Phi^{d*T} & \Phi^{d*T} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} -M & 0 \\ \hline 0 & K \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \Phi^{d}[\mathrm{diag}\,\lambda_r] & \Phi^{d*}[\mathrm{diag}\,\lambda_r^*] \\ \hline \Phi^{d} & \Phi^{d*} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} -\mathrm{diag}\,\lambda_r\alpha_r & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{diag}\,\lambda_r^*\alpha_r^* \end{array}\right]$$

ou,

$$\Phi^{cdT} \quad B \quad \Phi^{cd} = \left[\begin{array}{c|c} -\mathrm{diag}\,\lambda_r\alpha_r & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{diag}\,\lambda_r^*\alpha_r^* \end{array}\right] \qquad (34)$$

2.2.6 Le problème des valeurs propres dans l'espace d'état

Les résultats précédents peuvent être obtenus en résolvant directement l'équation (2).

La solution a été proposée par Duncan (D.2) et est devenue depuis lors la méthode standard de résolution du problème d'amortissement. Posons une solution de la forme,

$$z_{2n\times 1} = [\,\mathrm{diag}\; e^{\lambda t}\,]\, Z_{2n\times 1}\,, \tag{35}$$

où λ et Z sont des valeurs complexes; en remplaçant dans l'équation (2) on obtient,

$$[A\,[\,\mathrm{diag}\;\lambda\,] + B]\,[\,\mathrm{diag}\; e^{\lambda t}\, Z\,] = 0 \tag{36}$$

L'équation (36) est un problème standard de valeurs propres qui a 2n racines. Si les valeurs propres et les vecteurs propres sont complexes, ils apparaissent sous forme conjuguée et peuvent s'écrire;

$$\lambda_r\;;\; r = 1, \ldots n \quad \text{and} \quad z_r = \mathrm{diag}\; e^{\lambda_r t}\, Z_r$$
$$\lambda_r^*\;;\; r = 1, \ldots n \quad \text{and} \quad z_r^* = \mathrm{diag}\; e^{\lambda_r^* t}\, Z_r^*$$

or

$$[z_1 \ldots z_n \mid z_1^* \ldots z_n^*] = [Z_1 \ldots Z_n \mid Z_1^* \ldots Z_n^*] \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}\, e^{\lambda_r t} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{diag}\, e^{\lambda_r^* t} \end{array}\right]$$

$$= \Phi^{cd} \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}\, e^{\lambda_r t} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{diag}\, e^{\lambda_r^* t} \end{array}\right] \tag{37}$$

L'équation (37) est semblable à l'équation (20).

D'après les caractéristiques des problèmes standards de valeurs propres, on a,

$$\Phi^{cdT} A \Phi^{cd} = \text{matrice diagonale}$$

et,

$$\Phi B \Phi^{cd} = \text{matrice diagonale},$$

qui sont les résultats (33) et (34).

2.2.7 Cas particulier No. 1: pas d'amortissement, C = 0

L'équation (1) devient,

$$M x^{\circ\circ} + K x = 0, \tag{38}$$

Avec la même solution de l'équation (4), on obtient à deux problèmes identiques de valeurs propres (équations (5) et (6)). Les valeurs propres sont données par les valeurs imaginaires,

$$\lambda_r = j\,\Omega_r \qquad \lambda_r^* = -j\,\Omega_r ,$$

et,

$$\phi_r^d \equiv \phi_r^{d^*} \equiv \phi_r = \text{mode normal}$$

Les vecteurs de rotation représentant le mode normal de la figure 1 sont tous en phase, ou encore $\theta_{sr} = 0$.

Les conditions d'orthogonalité sont données par les équations (29) et (31), d'où,

$$\bar{\Phi}^T M \Phi = \text{diag } m_r ,$$
$$\Phi K \Phi = \text{diag } k_r . \tag{39}$$

et $k_r = \Omega_r^2 m_r$.

L'équation (38) est quelquefois appelée problème généralisé de valeurs propres pour lequel on peut développer d'autres conditions d'orthogonalité

Soit le problème classique de valeurs propres

$$M\,u = \lambda\,u$$

Si M est symétrique, définie positive, les valeurs propres $\lambda^{(m)}$ sont positives et réelles et les vecteurs propres $u_i^{(m)}$ sont orthogonaux de sorte que,

$$[u_i^{(m)}]^T [u_i^{(m)}] = I \quad \text{matrice identité}$$
$$[u_i^{(m)}]^T [M][u_i^{(m)}] = [\mathrm{diag}\,\lambda^{(m)}].$$

De même la matrice $[M]^{\frac{1}{2}}$ a pour vecteur propre $u^{(m)}$ et pour valeurs propres $\lambda_i^{(m)^{\frac{1}{2}}}$ de sorte que,

$$[M]^{\frac{1}{2}} = [u_i^{(m)}][\sqrt{\lambda^{(m)}}][u_i^{(m)}]^T$$
$$[M]^{-\frac{1}{2}} = [u_i^{(m)}][\frac{1}{\sqrt{\lambda^{(m)}}}][u_i^{(m)}]^T.$$

On peut écrire l'équation (38) sous la forme classique du problème de valeurs propres,

$$[K][M]^{-\frac{1}{2}}[M]^{\frac{1}{2}}x = \Omega^2 [M]^{\frac{1}{2}}[M]^{\frac{1}{2}}x,$$
$$[M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}}][M^{\frac{1}{2}}x] = \Omega^2 [M^{\frac{1}{2}}x].$$

Let
$$[M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}}] = \bar{K}$$
$$[M^{\frac{1}{2}} x] = \bar{x} \qquad \cdots (40)$$

Soit
$$\bar{K}\bar{x} = \Omega^2 \bar{x},$$

est un problème classique de valeurs propres ayant i vecteurs propres $\bar{u}_i^{(\bar{K})}$ et i valeurs propres Ω_i^2 où

$$[\bar{u}_i^{(\bar{K})}]^T [\bar{u}_i^{(\bar{K})}] = I.$$
$$[\bar{u}_i^{(\bar{K})}]^T M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} [\bar{u}_i^{(\bar{K})}] = [\mathrm{diag}\,\Omega_i].$$

et finalement,

$$\phi_r = M^{-\frac{1}{2}} \bar{u}_r^{(\bar{K})}. \qquad (41)$$

Ces équations sont utiles pour les techniques d'identification présentées dans le chapitre 5.

Une autre alternative de cette méthode est d'exprimer la matrice de masse par,

$$M = U^T U$$

et U est une ... e triangulaire superieure; equation (38) est,

$$K U^{-1} U x = \Omega^2 U^T U x$$

$$[U^{-T} K U^{-1}][U x] = \Omega^2 [U x]$$

$$\bar{\bar{K}} \quad \bar{\bar{x}} = \Omega^2 \bar{\bar{x}}.$$

Les vecteurs propres sont, $[\bar{\bar{u}}^{(\bar{k})}]$ et.

$$\phi_i = U^{-1} \bar{\bar{u}}_i^{(\bar{k})}$$

2.2.8 Car particulier No. 2: amortissement proportionnel, $C = \alpha M + \beta K$

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = 0$$

$$C = \alpha M + \beta K$$

On peut démontrer que la matrice modale est la même que la matrice du mode normal de l'équation (39). Les valeurs propres sont données par les équations (10) et (11).

$$\lambda_r = - \delta_r + j \Omega_r^d$$

$$\lambda_r^* = - \delta_r - j \Omega_r^d$$

et $$\zeta_r = \frac{\alpha}{\Omega_r} + \beta \Omega_r \qquad (42)$$

Les conditions d'orthogonalité sont;

$$\Phi^T M \Phi = \text{diag } m_r$$

$$\Phi^T K \Phi = \text{diag } k_r$$

$$= \text{diag } \Omega_r^2 m_r \qquad (43)$$

$$\Phi^T C \Phi = \text{diag } c_r = \text{diag } 2m_r \Omega_r \xi_r \text{ (amortissement visqueux)}$$

2.3 Formulation mathématique: problème de vibration forcée

La solution du problème de vibration forcée ;

1. Solution pour l'état stationnaire avec superposition des modes
2. Réponse en un point d'une force appliquée à un autre point
3. Images du mode forcé et conditions de génération d'un mode normal pur.

2.3.1 Solution de regieme permenante : super-position modale

Considérons les équations (1) et (2), et soit,

$$\underset{n\times 1}{f(t)} = \frac{1}{2}\left[\left[\text{diag } e^{j\omega t}\right]\underset{n\times n}{F} + \left[\text{diag } e^{-j\omega t}\right]\underset{n\times n}{F^*}\right],$$

ou,

$$\underset{2n\times 1}{g(t)} = \frac{1}{2}\left[\left[\text{diag } e^{j\omega t}\right]\underset{2n\times 2n}{G} + \left[\text{diag } e^{-j\omega t}\right]\underset{2n\times 2n}{G^*}\right], \qquad (44)$$

où,

$$G = \left[\frac{0}{F}\right], \quad G^* = \left[\frac{0}{F^*}\right],$$

et,

$$\underset{n\times 1}{x(t)} = \frac{1}{2}\left[\left[\text{diag } e^{j\omega t}\right]X + \left[\text{diag } e^{-j\omega t}\right]X^*\right]$$

$$\underset{n\times 1}{x^{\circ}(t)} = \frac{1}{2}\left[\left[\text{diag } j\omega e^{j\omega t}\right]X + \left[\text{diag}(-j\omega)e^{j\omega t}\right]X^*\right]. \qquad (45)$$

$$z(t) = \left[\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\right] = \frac{1}{2}\left[\left[\mathrm{diag}\, e^{j\omega t}\right]\left[\frac{j\omega X}{X}\right] + \left[\mathrm{diag}\, e^{-j\omega t}\right]\left[\frac{-j\omega X^*}{X^*}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left[\mathrm{diag}\, e^{j\omega t}\right] Z + \left[\mathrm{diag}\, e^{-j\omega t}\right] Z^*\right].$$

En substituant (44) et (45) dans (2), et en séparant les valeurs complexes de leurs conjuguées, on obtient,

$$[\mathrm{diag}\ j\omega]\ A\ Z + B\ Z = G\ ,$$

$$[\mathrm{diag}\ (-j\omega)]\ A\ Z^* + B\ Z^* = G^* \qquad (46)$$

Soit, $\quad Z_{2nx1} = \Phi^{cd}\ \gamma_{2nx1}\ , \qquad (47)$

où Φ^{cd} est la matrice modale amortie complexe (équation (18),

et γ_{2nx1} = vecteur complexe constant $\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ \hline \gamma_1^* \\ \vdots \\ \gamma_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{nx1} \\ \hline \gamma_{nx1}^* \end{bmatrix}$

En substituant (47) dans (46) et en multipliant à gauche par Φ^{dt}, on obtient,

$$[\mathrm{diag}\ j\omega]\ \Phi^{cdT} A\, \Phi^{cd} + \Phi^{cdT} B\, \Phi^{cd} = \Phi^{cdT} G.$$

En remplaçant par les équations (33) et (34), on obtient,

$$[\mathrm{diag}\ j\omega]_{2nx2n}\left[\begin{array}{c|c} [\mathrm{diag}\,\alpha_r] & 0 \\ \hline 0 & [\mathrm{diag}\,\alpha_r^*] \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \gamma \\ \hline \gamma^* \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} [\mathrm{diag}(-\lambda_r\alpha_r)] & 0 \\ \hline 0 & [\mathrm{diag}(-\lambda_r^*\alpha_r^*)] \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \gamma \\ \hline \gamma^* \end{array}\right]$$

$$= \Phi^{cdT} G. \qquad (48)$$

où α_r et γ_r sont donnés par les équations (29) et (10).

L'équation (48) peut s'écrire,

$$[\,diag.\,j\omega\,]_{n\times n}[\,diag.\,\alpha_r\,]_{n\times n}[\gamma]_{n\times 1} - [\,diag.\,\lambda_r\alpha_r\,][\gamma] = \Phi^{dT}_{n\times n}\,F_{n\times 1},$$

$$[\,diag.\,j\omega\,][\,diag\,\alpha_r^*\,][\gamma^*] - [\,diag.\,\lambda_r\alpha_r^*\,][\gamma^*] = \Phi^{d*T}\,F, \qquad (49)$$

où $\bar{\Phi}^d$ est la matrice modale d'amortissement (équation (17).

Des équations (49), (29) et (30), on tire,

$$[\gamma]_{n\times 1} = \left[diag.\ \frac{1}{\alpha_r(j\omega-\lambda_r)}\right]_{n\times n}\Phi^{dT}_{n\times n}\,F_{n\times 1}, \qquad (50)$$

$$[\gamma^*] = \left[diag.\ \frac{1}{\alpha_r^*(j\omega-\lambda_r^*)}\right]\Phi^{d*T}\,F,$$

où

$$\gamma_r = \frac{1}{\alpha_r(j\omega-\lambda_r)}\,[\,\phi_r^{dT}\,F\,],$$

$$\gamma_r^* = \frac{1}{\alpha_r^*(j\omega-\lambda_r^*)}\,[\,\phi_r^{d*T}\,F\,].$$

L'équation (50) peut encore s'écrire,

$$\gamma_{2n\times 1} = \left[\begin{array}{c|c} \left[\text{diag.}\ \dfrac{1}{\alpha_r(j\omega-\lambda_r)}\right] & 0 \\ \hline 0 & \left[\text{diag.}\ \dfrac{1}{\alpha_r^*(j\omega-\lambda_r^*)}\right] \end{array}\right] \Phi^{cdT} G, \qquad (51)$$

De (45), (47) et (50), on a,

$$Z_{2n\times 1} = \left[\begin{array}{c} j\omega X \\ \hline X \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \Phi^{d}\left[\text{diag}\,\lambda_r\right] & \Phi^{d*}\left[\text{diag.}\,\lambda_r^*\right] \\ \hline \Phi^{d} & \Phi^{d*} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \left[\text{diag.}\ \dfrac{1}{\alpha_r(j\omega-\lambda_r)}\right] & 0 \\ \hline 0 & \left[\text{diag.}\ \dfrac{1}{\alpha_r^*(j\omega-\lambda_r^*)}\right] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Phi^{dT} F \\ \hline \Phi^{d*T} \Gamma \end{array}\right]. \qquad (52)$$

Ainsi,

$$X_{n\times 1} = \Phi^{d}\left[\text{diag.}\ \frac{1}{\alpha_r(j\omega-\lambda_r)}\right]\Phi^{dT} F + \Phi^{d*}\left[\text{diag.}\ \frac{1}{\alpha_r^*(j\omega-\lambda_r^*)}\right]\Phi^{d*T} F$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_r^{dT} F}{\alpha_r(j\omega-\lambda_r)}\,\phi_r^{d} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_r^{d*T} F}{\alpha_r^*(j\omega-\lambda_r^*)}\,\phi_r^{d*}. \qquad (53)$$

L'amplitude du déplacement du point p est alors

$$X_p = \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{pr}^{d}}{\alpha_r(j\omega-\lambda_r)}\,\phi_r^{dT} F + \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{pr}^{d*}}{\alpha_r^*(j\omega-\lambda_r^*)}\,\phi_r^{d*T} F. \qquad (54)$$

Si plus loin une force F_k s'exerce en un point k, le déplacement du point p est,

$$x_p = \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{pr}^{d} \; \phi_{kr}^{d}}{\alpha_r (j\omega - \lambda_r)} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{pr}^{d*} \; \phi_{kr}^{d*}}{\alpha_r^{*} (j\omega - \lambda_r^{*})} \right] \cdot F_k \; , \qquad (55)$$

où ϕ_{pr}^{d} est le $p^{\text{ième}}$ élément du $r^{\text{ième}}$ mode amorti,

et $\dfrac{\phi_{pr}^{d} \; \phi_{kr}^{d}}{\alpha_r}$ est appelé le résidu au pôle r.

On aboutit de la même façon, à partir de l'équation (46) à,

$$X^{*} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_r^{dT} F^{*}}{\alpha_r (-j\omega - \lambda_r)} \phi_r^{d} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_r^{d*T} F^{*}}{\alpha_r^{*} (-j\omega - \lambda_r^{*})} \phi_r^{d*} \qquad (56)$$

A partir de (53), (56) et (65) la solution de l'équation (1) peut s'écrire,

$$x_p = \frac{1}{2} \left[\left\{ \sum \frac{\phi_r^{dT} F}{\alpha_r (j\omega - \lambda_r)} \phi_r^{d} + \frac{\phi_r^{d*T} F}{\alpha_r^{*} (j\omega - \lambda_r^{*})} \phi_r^{d*} \right\} e^{j\omega t} \right.$$

$$\left. + \left\{ \sum \frac{\phi_r^{dT} F^{*}}{\alpha_r (-j\omega - \lambda_r)} \phi_r^{d} + \frac{\phi_r^{d*T} F^{*}}{\alpha_r^{*} (-j\omega - \lambda_r^{*})} \phi_r^{d*} \right\} e^{-j\omega t} \right] . \qquad (57)$$

Si une force s'exerce en un point k, alors $F = F^{*} = \{0 \cdots F_k \cdots 0\}$ où F_k est une valeur réelle et le déplacement du point p s'écrit,

$$x_p = \frac{1}{2}\left[\sum\left(\frac{\phi_{pr}^{d}\,\phi_{kr}^{d}}{\alpha_r(j\omega-\lambda_r)} + \frac{\phi_{pr}^{d*}\,\phi_{kr}^{d*}}{\alpha_r^*(j\omega-\lambda_r^*)}\right)e^{j\omega t}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\phi_{pr}^{d}\,\phi_{kr}^{d}}{\alpha_r(-j\omega-\lambda_r)} + \frac{\phi_{pr}^{d*}\,\phi_{kr}^{d*}}{\alpha_r^*(-j\omega-\lambda_r^*)}\right)e^{-j\omega t}\right]F_k \,. \qquad (58)$$

Des équations (16) et (58), on peut écrire,

$$\phi_{pr}^{d} = X_{pr}\,e^{j\theta_{pr}} \quad , \quad \phi_{pr}^{d*} = X_{pr}\,e^{-j\theta_{pr}}$$

$$\phi_{pr}^{d}\,\phi_{kr}^{d} = X_{pr}X_{kr}\,e^{j(\theta_{pr}+\theta_{kr})}$$

$$\phi_{pr}^{d*}\,\phi_{kr}^{d*} = X_{pr}X_{kr}\,e^{-j(\theta_{pr}+\theta_{kr})} \,,$$

et,

$$x_p = \frac{1}{2}\left[(X_{pr}X_{kr})\left\{\frac{e^{j(\theta_{pr}+\theta_{kr}+\omega t)}}{\alpha_r(j\omega-\lambda_r)} + \frac{e^{-j(\theta_{pr}+\theta_{kr}+\omega t)}}{\alpha_r^*(-j\omega-\lambda_r^*)}\right\}\right.$$

$$\left. + (X_{pr}X_{kr})\left\{\frac{e^{j(\theta_{pr}+\theta_{kr}-\omega t)}}{\alpha_r(-j\omega-\lambda_r)} + \frac{e^{-j(\theta_{pr}+\theta_{kr}+\omega t)}}{\alpha_r^*(j\omega-\lambda_r^*)}\right\}\right] .$$

2.3.2 Cas d'amortissement proportionnel

$$\bar{\phi}_r^{d} = \bar{\phi}_r^{d*} = \phi_r = \text{mode normal}$$

On tire des équations (43), (29), (30) et (10),

$$\alpha_r = 2m_r\lambda_r + 2m_r\zeta_r\Omega_r = 2j\,m_r\Omega_r\sqrt{(1-\zeta_r^2)}$$

$$\alpha_r^* = 2m_r\lambda_r^* + 2m_r\zeta_r\Omega_r = -2j\,m_r\Omega_r\sqrt{(1-\zeta_r^2)} \,. \qquad (59)$$

De (59) et (58),

$$\frac{x_p}{F_k} = \frac{1}{2} \sum \frac{\phi_{pr}\,\phi_{kr}}{m_r} \left\{ \frac{e^{j\omega t}}{2\Omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}} \left(\frac{1}{j(j\omega-\lambda_r)} - \frac{1}{j(j\omega-\lambda_r^*)} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-j\omega t}}{2\Omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}} \left(\frac{1}{j(-j\omega-\lambda_r)} - \frac{1}{j(-j\omega-\lambda_r^*)} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum \frac{\phi_{pr}\,\phi_{kr}}{m_r} \left\{ \frac{e^{j\omega t}}{(\Omega_r^2-\omega^2)+j2\zeta_r\Omega_r\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{(\Omega_r^2-\omega^2)-j2\zeta_r\Omega_r\omega} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum \frac{\phi_{pr}\,\phi_{kr}}{m_r} \left\{ \frac{e^{j(\omega t-\theta_r)}}{\sqrt{(\Omega_r^2-\omega^2)^2+(2\zeta_r\omega\Omega_r)^2}} + \frac{e^{-j(\omega t-\theta_r)}}{\sqrt{(\Omega_r^2-\omega^2)^2+(2\zeta_r\Omega_r\omega)^2}} \right\}, \quad (60)$$

où $\cos\theta = \dfrac{(\Omega_r^2-\omega^2)}{\sqrt{(\Omega_r^2-\omega^2)^2+(2\zeta_r\Omega_r\omega)^2}}$,

$\sin\theta = \dfrac{2\zeta_r\Omega_r\omega}{\sqrt{(\Omega_r^2-\omega^2)^2+(2\zeta_r\Omega_r\omega)^2}}$,

$$\frac{x_p}{F_k} = \sum \frac{\phi_{kr}\,\phi_{pr}\,\cos(\omega t-\theta_r)}{m_r\sqrt{(\Omega_r^2-\omega^2)^2+(2\zeta_r\Omega_r\omega)^2}}, \quad (61)$$

L'équation (60) peut encore s'écrire,

$$\frac{x_k}{f_p} = \frac{1}{2}\left[\sum A_{kp}^{r}\, Y\, e^{j\omega t} + A_{kp}^{r}\, Y^{*}\, e^{-j\omega t}\right], \qquad (62)$$

où, A_{kp}^{r} = résidu au pôle r = $\dfrac{\phi_{pr}\ \phi_{kr}}{m_r}$

Y = fonction de transfert

$$= \frac{1}{(\Omega_r^2 - \omega^2) + j\, 2\zeta_r\, \Omega_r \omega}$$

$$= \frac{\cos\theta_r}{\sqrt{(\Omega_r^2-\omega^2)^2 + (2\zeta_r\Omega_r\omega)^2}} - j\,\frac{\sin\theta_r}{\sqrt{(\Omega_r^2-\omega^2)^2 + (2\zeta_r\Omega_r\omega)^2}}$$

$$Y^{*} = \frac{1}{(\Omega_r^2 - \omega^2) - j\, 2\xi_r\, \Omega_r \omega},$$

On peut également écrire,

$$A_{kp}^{r} = \frac{\phi_{pr}\ \phi_{kr}}{j\, 2 m_r\, \Omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2}} = \frac{\phi_{pr}\ \phi_{kr}}{\alpha_r}$$

$$Y = \frac{1}{(j\omega - \lambda_r)} - \frac{1}{(j\omega - \lambda_r^{*})}$$

$$Y^{*} = \frac{1}{(j\omega + \lambda_r^{*})} - \frac{1}{(j\omega + \lambda_r)}$$

N.B.: La fonction de transfert Y représente le taux de déplacement y_r et la force généralisée F_r' est obtenue à partir de l'équation,

$$m_r \ddot{y}_r + 2\zeta_r \Omega_r \dot{y}_r + k_r y_r = \phi_r F_k = F_r'.$$

2.3.3. Solution pour l'état stationnaire; impédance dynamique

Les solutions précédentes développées dans 2.3.2 sont utiles pour l'interprétation des résultats expérimentaux. D'autres solutions sont utiles pour l'évaluation numérique. La solution suivante peut être employée pour l'analyse de sensibilité discutée dans le chapitre 6.

A partir de l'équation (2) et des équations (44) et (45), on a,

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \qquad \text{.... (2)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}F + e^{-j\omega t}F^*\right] \qquad \text{.... (44)}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}X + e^{-j\omega t}X^*\right] \qquad \text{.... (45)}$$

D'où

$$[K - M\omega^2 + j\omega C]X = F$$

$$[K - M\omega^2 - j\omega C]X^* = F^*$$

et

$$X = [K - M\omega^2 + j\omega C]^{-1}F$$

$$X^* = [K - M\omega^2 - j\omega C]^{-1}F^* \qquad \text{.... (63)}$$

Ces deux expressions sont équivalentes aux équations (53) et (56).

2.3.4 Solution complète exprimée en fonction des propriétés propres

On peut utiliser la solution suivante pour obtenir une réponse - impulsion utile pour le processus d'identification basé sur l'analyse des fréquences non harmoniques.

Pour la formulation linéaire par blocs de l'équation (2), la solution à une charge arbitraire f(t) peut s'exprimer (B.11) dans le cas de [A] et [B]

sont constantes .

$$z(t) = \Phi^{cd} \left[\begin{array}{c|c} \text{dig. } e^{\lambda_r t} & 0 \\ \hline 0 & \text{diag } e^{\lambda_r^* t} \end{array} \right] \Phi^{cd^{-1}} z_0$$

$$+ \int_0^t \Phi^{cd} \left[\begin{array}{c|c} \text{dig. } e^{\lambda_r t} & 0 \\ \hline 0 & \text{diag. } e^{\lambda_r^* t} \end{array} \right] \Phi^{cd^{-1}} A^{-1} g(\tau) d\tau.$$

où Φ^{cd}, $\Phi^{cd^{-1}}$, λ_r sont donnés par les équations (18), (10) et (20). La première partie de la solution correspond aux conditions initiales comprenant les vitesses et les déplacements initiaux. Pour les applications aux tests de résonance, le second terme donne la solution stationnaire et on a, pour les systèmes stables à valeurs propres complexes,

$$Z = \Phi^{cd} \left[\begin{array}{c|c} \text{diag.} \frac{1}{\lambda_r} & 0 \\ \hline 0 & \text{diag} \frac{1}{\lambda_r^*} \end{array}\right] \Phi^{cd-1} A^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ F \end{array}\right]$$

qui [illegible]

La réponse d'impulsion du système obtenue par l'équation (58) peut être obtenue en faisant une transformation inverse (K.2) pour avoir,

$$\frac{x_p}{F_k} = \frac{1}{2}\left[\sum_{r=1}^{n} \left(A_{pk}^{r} e^{\lambda_r t} + A_{pk}^{r*} e^{\lambda_r^* t}\right) + \sum_{r=1}^{n} \left(A_{pk}^{r} e^{-\lambda_r t} + A_{pk}^{r*} e^{-\lambda_r^* t}\right)\right], \qquad (63)$$

où $A_{pk}^{r} = \dfrac{\bar{\phi}_{pr}^{d}\, \bar{\phi}_{kr}^{d}}{\alpha_r}$.

Pour

$$\lambda_r = -\xi_r \Omega_r + j\,\Omega_r \sqrt{1-\xi_r^2}\,,$$

$$\frac{x_p}{F_k} = \sum_{r=1}^{n} |A_{pk}^{r}|\, e^{-\xi_r \Omega_r t} \cos\left(\Omega_r \sqrt{1-\xi_r^2} + \theta_{pk}^{r}\right).$$

2.3.5 Cas No. 3: fonction de transfert de deux déplacements

Klosterman (K.3) est parti de l'équation (58) pour arriver à l'équation suivante:

$$\frac{x_c}{x_k} = \left[\sum \frac{F_{kr}\, \phi_{cr}}{\alpha_r (j\omega - \lambda_r)} + \frac{F_{kr}^{*}\, \phi_{cr}^{*}}{\alpha_r^{*} (j\omega - \lambda_r)}\right]$$

où F_{kr} = force de réaction dans la direction k à la base de la structure quand la structure dans son $r^{\text{ième}}$ mode de base fixe de vibration.

x_k = mouvement à la base où est installée la table vibrante.

2. - Modes forcés

Sous certaines conditions d'excitation harmonique forcée, le mouvement du système peut être un mode normal pur (G.4, F.2).

Le mouvement est décrit par l'équation (1), et x(t) et f(t) sont donnés par les équations (44) et (45). Soit:

$$M\,x^{\circ\circ} + C\,x^{\circ} + K\,x = f(t) \quad \ldots (1)$$

$$f(t) = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{diag}\ e^{j\omega t}]\,F + [\mathrm{diag}\ e^{-j\omega t}]\,F^{*} \quad \ldots\ldots (44)$$

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{diag}\ e^{j\omega t}]\,X + [\mathrm{diag}\ e^{-j\omega t}]\,X^{*} \quad \ldots\ldots (45)$$

2.4.1 Cas No. 1: toutes les forces composantes sont en phase

$$\overline{F} = 0 - j\,F \qquad\qquad F^{*} = 0 + j\,F$$

et f(t) est un mouvement harmonique pur:

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\mathrm{diag}\,(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right\}(-jF) + \left\{\mathrm{diag}\,(\cos\omega t - j\sin\omega t)(jF)\right\}\right]$$

$$= \left[\mathrm{diag}\ \sin\omega t\right] F\ .$$

On cherche une solution pour x(t) telle que l'équation (45) puisse être réduite à la forme,

$$x(t) = [\mathrm{diag}\ \sin\,(\omega t - \theta)]\,X, \qquad (64)$$

où le déplacement en chaque point est en retard d'un angle constant par rapport à la composante correspondante de la force s'exerçant sur ce point. Des équations (1), (63) et (64), on tire:

$$M\left[\mathrm{diag}.\left\{-\omega^{2}\sin(\omega t-\theta)\right\}\right] + C\left[\mathrm{diag}\left\{\omega\cos(\omega t-\theta)\right\}\right]$$

$$+\ K\left[\mathrm{diag}.\sin(\omega t-\theta)\right] = \left[\mathrm{diag}.\ \sin(\omega t)\right] F\ . \qquad (65)$$

En séparant les co-facteurs en sin ωt et les co-facteurs, on a

$$\Big[[\text{diag} \cos \theta]\ [K - M[\text{diag}\ \omega^2] + [\text{diag} \sin \theta]]C\ [\text{diag}\ \omega]\Big]\ X = F \quad , \quad (66)$$

$$\Big[-[\text{diag} \sin \theta]\ [K - M\ \text{diag}\ \omega^2] + [\text{diag} \cos \theta]\ C\ [\text{diag}\ \omega]\Big]\ X = 0 \quad , \quad (67)$$

Si $\cos \theta \neq 0$ on peut multiplier l'équation (67) par $[\text{diag} \cos \theta]^{-1}$ et obtenir

$$\Big[[\text{diag} \tan \theta]\ [K - M[\text{diag}\ \omega^2]] - C[\text{diag}\ \omega]\Big]\ X = 0 \qquad (68)$$

L'équation (68) est un problème standard de valeurs propres avec $\theta \equiv$ valeur propre. Pour chaque $\omega \neq \Omega_r$, les racines $\tan \theta_r$ sont réelles et les vecteurs propres correspondants sont orthogonaux comme suit,

$$\begin{aligned} \Phi^{fT}\ [K - M\ (\text{diag}.\omega^2)]\ \Phi^f &= [\text{diag.}\ a_r] \\ \Phi^{fT}\ [C\ (\text{diag}.\omega)]\ \Phi^f &= [\text{diag.}\ b_r], \end{aligned} \qquad (69)$$

et

$$\begin{aligned} \Phi^f &= \text{Forced Modal Matrix} \\ &= \{\phi_1^f\ \phi_2^f, \ldots\ \phi_n^f\} \\ \phi_r^f &= \text{Forced Mode} \end{aligned} \qquad (70)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} a_r &= \phi_r^{fT}\ [K - M(\text{diag}\ \omega^2)]\ \phi_r^f \\ b_r &= \phi_r^{fT}\ [C\ (\text{diag.}\ \omega)]\ \phi_r^f \end{aligned} \qquad (71)$$

$$\tan \theta_r = \frac{b_r}{a_r}$$

$$\sin \theta_r = \frac{b_r}{\sqrt{a_r^2 + b_r^2}} \quad , \quad \cos \theta_r = \frac{a_r}{\sqrt{a_r^2 + b_r^2}} \; . \tag{72}$$

Pour le cas particulier $\omega = \Omega_r$, il existe une singularité pour la valeur de $\tan \theta_r$ quand $\theta_r = \frac{\Pi}{2}$. D'après (71) et (72) cela arrive si $a_r = 0$ ou

$$\phi_r^{fT} K \phi_r^f = \phi_r^f M \phi_r^f \Omega_r^2 \; .$$

D'après l'équation (40) ce cas est possible si ,

$$\phi_r^f = \phi_r = \text{mode normal} \; .$$

L'avantage présenté dans ce cas particulier est que par excitation multiple à une fréquence correspondant à une fréquenne naturelle non amortie, on peut exciter un mode normal vrai sans relation avec l'amortissement du système. Il est seulement nécessaire de trouver les éléments de F qui peuvent exciter le système en harmonique avec des composantes en phase et déphasées de $\frac{\Pi}{2}$ par rapport à la force.

Soit F_r le vecteur de force engendrant la valeur propre θ_r, alors

$$[\text{diag} \cos \theta_r] \, [K - M \, \text{diag} \, \omega^2] + [\text{diag} \sin \theta_r] \, C \, [\text{diag} \, \omega] \quad \phi_r^f = F_r \; . \tag{73}$$

En multipliant à gauche par ϕ_s^{fT} on obtient,

$$\phi_s^{fT} [\text{diag} \cos \theta_r] \, [K - M \, \text{diag} \, \omega^2] \, \phi_r^f + \phi_s^{fT} [\text{diag} \sin \theta_r] \, [C \, \text{diag} \, \omega] \, \phi_r^f = \phi_s^f F_r \; . \tag{74}$$

De (69), (71) et (74), on tire,

$$\begin{aligned} &\text{pour } r \neq s : \quad \phi_s^{fT} F_r \neq 0 \\ &\text{pour } r = s : \quad \phi_r^{fT} F_r = 0 \end{aligned} \tag{75}$$

On peut voir d'après (73) et (67) que,

$$F_r = \left[\text{diag.} \frac{1}{\cos \theta_r} \right] \left[K - M (\text{diag}\, \omega^2) \right] \phi_r^f$$
$$= \left[\text{diag.} \frac{1}{\sin \theta_r} \right] \left[C\, (\text{diag}\, \omega) \right] \phi_r^f . \qquad (76)$$

Ces résultats sont regroupés dans le tableau ( ) et la figure (3)

Tableau

Resume of case 1 : Modes

θ_s = eigen values

$X \rightarrow$ displacement eigenvectors $\equiv$ FORCED DAMPED MODES $\equiv \phi_s^f$

$F \rightarrow$ Force eigen vectors $\equiv \Sigma^{(s)}$

$f(t) = [\text{diag}\,(\sin\omega t)]\,F$; F real

$x(t) = [\text{diag}\,\sin(\omega t - \theta)]\,X$; X real θ const.

natural freq of undamped sy: $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_r, \ldots \Omega_n$

normal modes : $\phi_1^f, \phi_2^f, \ldots \phi_r^f, \ldots \phi_n^f$

s	ω very small, $K \gg M\omega^2$			$\omega = \Omega_r$			$\Omega_r < \omega < \Omega_{r+1}$ General case $\theta_r \neq \pi/2$			$\omega = \Omega_{r+1}$			ω very high, $M\omega^2 \gg K$		
	θ_s	ϕ_s^f	$\Sigma_s^{(s)}$	θ_s	ϕ_s^f	Σ	θ_s	ϕ_s^f	$\Sigma^{(s)}$	θ_s	ϕ_s^f	$\Sigma^{(s)}$	θ_s	ϕ_s^f	Σ_s^s
1	$\uparrow \pi$ θ_1			$\uparrow \pi$ θ_1			$\uparrow \pi$ θ_1			$\uparrow \pi$ θ_1			$\uparrow \pi$ θ_1		
2															
⋮															
r				$\frac{\pi}{2}$	$\boxed{\phi_r}$										
p	$0 \leftarrow \theta_p$						θ_p	ϕ_p^f	F_p				$\theta_p \rightarrow \pi$		
r+1	—									$\frac{\pi}{2}$	$\boxed{\phi_{r+1}}$				
⋮															
n-1															
n	$\theta_n \downarrow 0$			$\theta_n \downarrow 0$			$\theta_n \downarrow 0$			$\theta_n \downarrow 0$			$\theta_n \downarrow 0$		

$\rightarrow |K - M\Omega^2| = 0$

$\rightarrow |\tan\theta(K - M\omega^2) - C\omega| = 0$

$\rightarrow |\tan\theta(K - M\omega^2) - C\omega| = 0$

$\theta_p < \frac{\pi}{2}$

eigen values

$\boxed{0} \leftarrow \theta_p$ small ——— ω small ← — . . . $\theta_p = \dfrac{\phi_p^{fT}[C\omega]\phi_p^f}{\phi_p^{fT}[K - M\omega^2]\phi_p^f}$ . . . → ω high → θ_p nearness π →

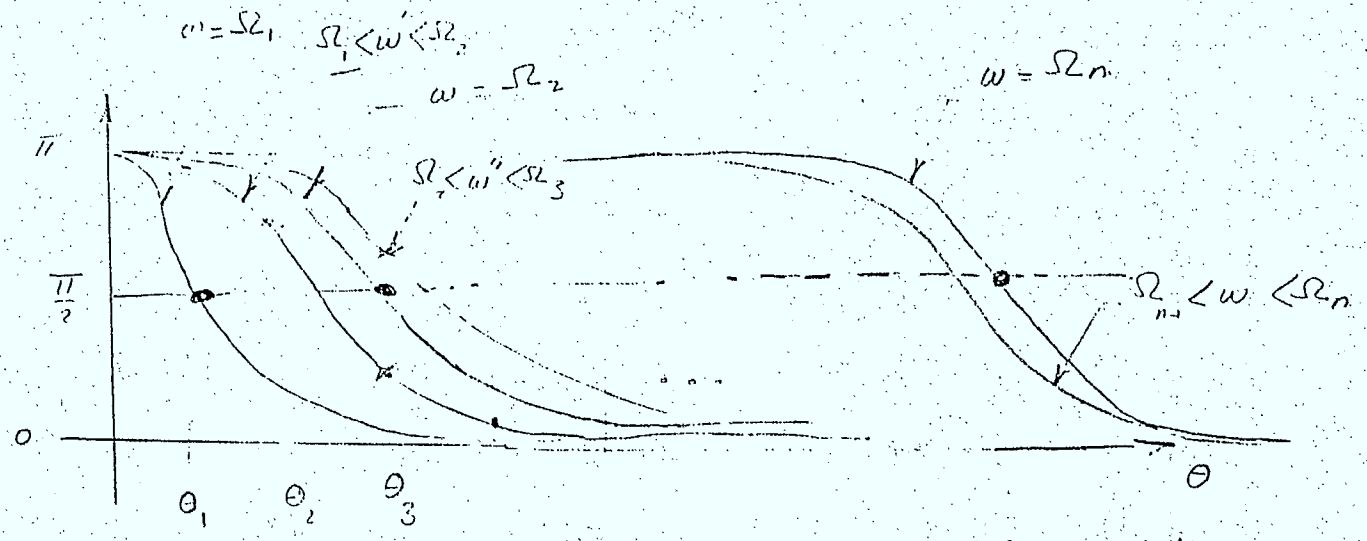
eigen vectors

$$\phi_s^{fT}[K - M\omega^2]\,\phi_r^f = 0 \qquad r \neq s$$

$$\phi_s^{fT}[C\omega]\,\phi_r^f = 0$$

$$\phi_s^{fT}\,\Sigma^{(r)} = 0$$

$$\Sigma^{(r)} = \left[\text{diag}\,\frac{1}{\cos\theta_r}\right][K - \omega^2 M]\,\phi_r^f = \left[\text{diag}\,\frac{1}{\sin\theta_r}\right][C\omega]\,\phi_r^f$$



variation of eigen values for constant exciting ω

also moving horizontally on the table of page 6.5; or vertically on θ_r on the above curve as of

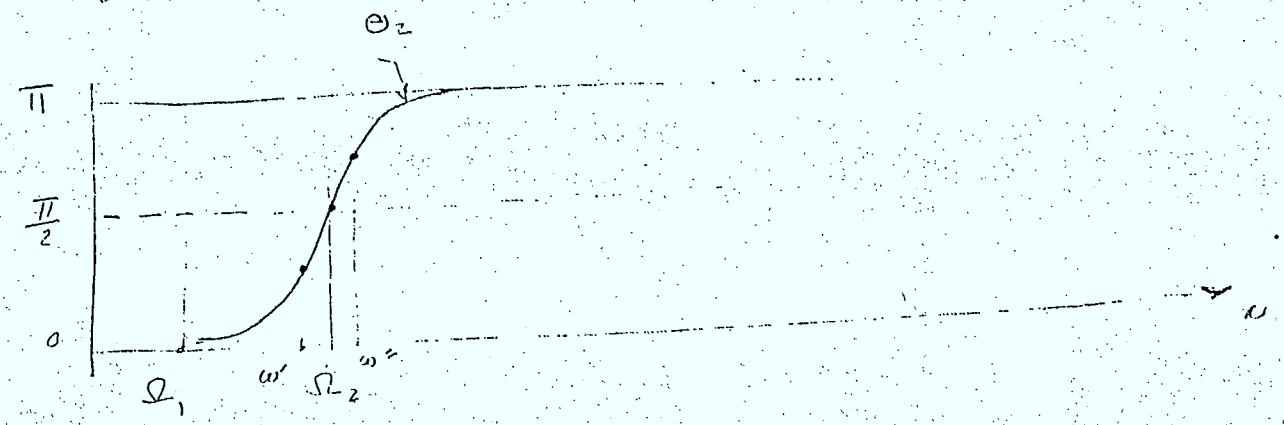


Figure 12.3

2.4. Réponse à une vibration forcée en modes forcés

Revenons à l'équation (1)

$$M\,x^{\circ\circ} + C\,x^{\circ} + K\,x = f(t) \qquad (1)$$

Soit F(t), tel que décrit dans le cas no. 1, équation (63)

$$f(t) = [\text{diag} \sin \omega t]\, F. \qquad (63)$$

Développons l'équation (63) en termes de forces propres F_r, équation (76),

$$f(t) = [\,\text{diag.} \sin \omega t\,]F = \sum_{r=1}^{n} [\,\text{diag.}(\rho_r \sin \omega t)\,]\, F_r\,, \qquad (77)$$

où ρ_r = constant.

En multipliant à gauche l'équation (77) par le mode forcé ϕ_r^{fT} on obtient,

$$\phi_r^{fT}[\,\text{diag.} \sin \omega t\,]F = \phi_r^{fT} \sum_{r=1}^{n} [\,\text{diag.}(\rho_r \sin \omega t)\,]\, F_r$$

$$\phi_{r\,1\times n}^{fT} F_{n\times 1} = \phi_{r\,1\times n}^{fT} [\,F_1\, F_2 \ldots \ldots F_n\,][\rho_r]_{n\times 1}\,.$$

Des conditions d'orthogonalité (75) on tire,

$$\rho_r = \frac{\phi_r^{fT} F}{\phi_r^{fT} F_r}\,,$$

$$[\rho_r]_{n\times 1} = [\,\text{diag.} \frac{1}{\phi_r^{fT} F_r}\,]\, \Phi_{n\times n}^{fT} F_{n\times 1}\,. \qquad (78)$$

De (76) et (71),

$$\phi_r^{fT} F_r = \frac{1}{\cos\theta_r}\, \phi_r^{fT}[\,K - M(\text{diag}\,\omega^2)\,]\,\phi_r^{f} = \frac{a_r}{\cos\theta_r} \qquad (79)$$

$$= \frac{1}{\sin\theta_r}\, \phi_r^{fT}[\,C\,\text{diag}\,\omega\,]\,\phi_r^{f} = \frac{b_r}{\sin\theta_r}\,.$$

De (78) et (79)

$$\rho_r = \phi_r^{fT} F \frac{\cos\theta_r}{a_r} = \phi_r^{fT} F \frac{\sin\theta_r}{b_r} = \frac{\phi_r^{fT} F}{\sqrt{a_r^2 + b_r^2}}$$

$$[\rho_r]_{n\times 1} = \left[\text{diag.} \frac{\cos\theta_r}{a_r}\right] \Phi^{fT} F = \left[\text{diag} \frac{\sin\theta_r}{b_r}\right] \Phi^{fT} F$$

$$= \left[\text{diag.} \frac{1}{\sqrt{a_r^2 + b_r^2}}\right] \Phi^{fT} F . \tag{80}$$

Finalement, l'équation (77) peut s'écrire,

$$f(t) = [\text{diag } \sin\omega t] F = \sum_{r=1}^{n} \left[\text{diag.} \frac{\phi_r^{fT} F}{\phi_r^{fT} F_r} \sin\omega t\right] F_r$$

$$= [F_1 \ldots F_n] \left[\text{diag.} \frac{\sin\omega t}{\phi_r^{fT} F_r}\right] \Phi^{fT} F , \tag{81}$$

et

$$\phi_r^{fT} F_r = \frac{a_r}{\cos\theta_r} = \frac{b_r}{\sin\theta_r} = \sqrt{a_r^2 + b_r^2} . \tag{82}$$

La réponse du système à chaque harmonique en (81) est donnée par,

la force harmonique $[\text{diag}(\sin\omega t)] F_r$

la réponse harmonique $[\text{diag} \sin(\omega t - \theta_r)] \phi_r^f$.

Ainsi, la réponse totale est,

$$x(t)_{n\times 1} = \sum_{r=1}^{n} \text{diag} \frac{\phi_r^{fT} \sin(\omega t - \theta_r)}{\phi_r^{fT} F_r} \phi_r = \Phi^f \left[\text{diag} \frac{\sin(\omega t - \theta_r)}{\phi_r^{fT} F_r}\right] \Phi^{fT} F , \tag{83}$$

où $\phi_r^{fT} F_r$ peut être remplacée par l'une quelconque des équations (82). Le déplacement du point p dans l'expression (83) est alors

$$x_p(t) = \sum_{r=1}^{n} \phi_r^{fT} F \sin(\omega t - \theta_r) \phi_{pr}^f \cdot \frac{1}{\phi_r^{fT} F_r} .$$

Si plus loin une force harmonique F_k s'exerce sur le point k, on a,

$$\frac{x_p(t)}{f_k} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{kr}^f \phi_{pr}^f \sin(\omega t - \theta_r)}{\left[\left\{\phi_r^{fT}[C\omega]\phi_r^f\right\}^2 + \left\{\phi_r^f[K - M\omega^2]\phi_r^f\right\}^2\right]^{1/2}}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{kr}^f \phi_{pr}^f \sin\theta_r \sin(\omega t - \theta_r)}{\left[\phi_r^{fT}[C\omega]\phi_r^f\right]}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{kr}^f \phi_{pr}^f \cos\theta_r \sin(\omega t - \theta_r)}{\left[\phi_r^{fT}[K - M\,\mathrm{diag}\,\omega^2]\phi_r^f\right]} \quad . \tag{84}$$

En comparant les expressions (84) et (61), on peut conclure qu'en utilisant le mode forcé, on a exprimé la fonction de transfert entre les points p et k par une formule analogue à celle utilisée pour l'amortissement proportionnel. Dans le cas de l'amortissement proportionnel, on peut montrer que tous les <u>n modes d'amortissement forcés</u> deviennent des <u>modes normaux</u>, de telle sorte que,

$$\phi_r^f = \phi_r \quad \text{et} \quad \phi^f = \Phi$$

Des équations (72), (71) et (43) il vient,

$$\tan\theta_r = \frac{2\zeta_r \Omega_r \omega}{\Omega_r^2 - \omega^2} \tag{85}$$

et l'équation (84) devient:

$$\frac{x_p}{f_k} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{kr}\phi_{pr} \sin(\omega t - \theta_r)}{m_r\sqrt{(\Omega_r^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_r\Omega_r\omega)^2}} ,$$

c'est-à-dire l'équation (61).

2.4.3 Cas No. 2: les forces composantes de F sont harmoniques, mais pas en phase, ainsi (7.2)

$$F = [\text{diag } e^{j\beta_s}]\, F_o \;,\; F^* = [\text{diag } e^{-j\beta_s}]\, F_o \;,\; F_o \equiv \text{real}$$

L'équation (44) donne,

$$f(t) = \frac{1}{2}\,[\text{diag } e^{j(\omega t+\beta_s)} + \text{diag. } e^{-j(\omega t+\beta_s)}]\, F_o$$

$$= [\text{diag } \cos(\omega t+\beta_s)]\, F_o \,, \tag{86}$$

On cherche pour x(t) une solution de la forme,

$$x(t) = \frac{1}{2}\,[[\text{diag } e^{j\omega t}]\, X + [\text{diag } e^{-j\omega t}]\, X^*] \,, \tag{87}$$

$$,\quad X = [\text{diag } e^{j\alpha_s}]\, X_o \;,\quad X^* = [\text{diag } e^{-j\alpha_s}]\, X_o \,,$$

X_o un vecteur réel, $\beta_s - \alpha_s = \Theta$ constant

$$,\quad x(t) = \frac{1}{2}\,[\text{diag } e^{j(\omega t+\alpha_s)} + \text{diag } e^{-j(\omega t+\alpha_s)}]\, X_o$$

$$= [\text{diag } \cos(\omega t+\alpha_s)]\, X_o \,. \tag{88}$$

En substituant (86) et (88) en (1), on obtient,

$$[[K - M\,\text{diag}\,\omega^2][\text{diag } \cos(\omega t+\alpha_s)] - [C\,\text{diag}\,\omega][\text{diag } \sin(\omega t+\alpha_s)]]X_o$$

$$= [\text{diag } \cos(\omega t+\beta_s)]\, F_o \,,$$

ce qui peut s'écrire,

$$[[K - M\,\text{diag}\,\omega^2][\text{diag } \sin\alpha_s] + [C\,\omega][\text{diag } \cos\alpha_s]]X_o = [\text{diag } \sin\beta_s]\, F_o \tag{89}$$

$$[[K - M\,\text{diag}\,\omega^2][\text{diag } \cos\alpha_s] - [C\,\omega][\text{diag } \sin\alpha_s]]X_o = [\text{diag } \cos\beta_s]\, F_o \,, \tag{90}$$

En multipliant (89) à gauche par [diag sin β_r] et (90) par [diag cos β_r] et en ajoutant, on tire

$$[[L][\text{diag } \cos\theta] + [Q][\text{diag } \sin\theta]]\, X_o = F_o \,. \tag{91}$$

En multipliant (89) à gauche par [diag cos β_r] et (90) par [diag sin β_r] et en soustrayant, on tire

$$\left[[Q]\,[\text{diag}\cos\theta] - [L]\,[\text{diag}\sin\theta]\right] X_o = 0, \tag{92}$$

où

$$[L] = [\text{diag}\sin\beta_s][K - M\,\text{diag}\,\omega^2][\text{diag}\sin\beta_s] + [\text{diag}\cos\beta_s][K - M\omega^2][\text{diag}\cos\beta_s]$$
$$+ [\text{diag}\sin\beta_s][C\omega][\text{diag}\cos\beta_s] - [\text{diag}\cos\beta_s][C\omega][\text{diag}\sin\beta_s].$$

$$[Q] = [\text{diag}\cos\beta_s][K - M\omega^2][\text{diag}\sin\beta_s] - [\text{diag}\sin\beta_s][K - M\omega^2][\text{diag}\cos\beta_s]$$
$$+ [\text{diag}\cos\beta_s][C\omega][\text{diag}\cos\beta_s] + [\text{diag}\sin\beta_s][C\omega][\text{diag}\sin\beta_s].$$

N.B.: Si les β_s sont toutes des constantes, alors $L = [K - M\,\text{diag}\,\omega^2]$ et $Q = [C\,\text{diag}\,\omega]$ et les équations (91) et (92) redonnent les équations (66) et (67).

Pour $\theta \neq 0$, l'équation (92) peut s'écrire,

$$[Q] - [L]\,[\text{diag}\tan\theta]\;\; X_o = 0\;. \tag{93}$$

L'équation (93) est un problème de valeurs propres où Q et L sont des matrices réelles non symétriques. Les valeurs propres et les vecteurs propres ne sont donc pas forcément tous réels.

Soient λ_r et X_{or} une valeur propre et un vecteur propre typiques. Alors λ_r^* et X_{or}^* sont aussi valeur propre et vecteur propre.

On cherche les solutions possibles réelles pour λ_r et X_{or} où,

$$\tan\theta_r = \frac{X_{or}^T\,Q\,X_{or}}{X_{or}^T\,L\,X_{or}} = \tan(\beta_{sr} - \alpha_{sr}) \tag{94}$$

2.5 Conclusion

Différents types de modes peuvent être excités en utilisant des excitations soit en un point unique, soit en plusieurs points. Cependant, on a pu montrer que les modes normaux purs peuvent être excités uniquement sous les deux conditions suivantes:

1. structure non amortie excitée par ses propres vitesses ou déplacements initiaux, et laissée libre de ses mouvements;
2. n'importe quel type d'excitations avec amortissement et composantes vibrant en phase.

Ces conditions seront discutées ultérieurement dans le chapitre 3.

CHAPITRE 3

RÉPONSE STRUCTURALE ET PARAMÈTRES MODAUX

3.1 Introduction

Les techniques expérimentales classiques sont basées principalement sur la technique de résonance de phase découverte par Kennedy et Pancu (K.1), qui portèrent la discussion sur le comportement à la résonance de la structure utilisant les modes normaux. Fraegs de Veubeke (F.7) et Bishop (G.4) étendirent cette technique aux cas des vibrations forcées pouvant exciter un mode normal. Cette technique devint la base des méthodes expérimentales d'excitations multiples. Les modes complexes amortis furent suggérés par la suite par Hasselman (H.3), Klosterman (K.3), Béliveau (B.4) et Richardson (R.1) comme approche plus réaliste du cas de résonance amortie. Plusieurs articles résumant ces méthodes (P.2, P.1, I.1, W.1) ont été publiés depuis la fin des années soixante à nos jours.

3.2 Paramètres modaux

Les paramètres modaux sont indépendants de la formulation du modèle structural analytique (équations 1 et 2). Le but principal de la technique de résonance est de donner une estimation initiale de ces paramètres comprenant: les fréquences modales Ω_r, le taux d'amortissement ζ_r et les fonctions d'ondes ϕ_r. Le problème que doit résoudre l'ingénieur est de choisir la fonction de forgeage qui excite suffisamment les modes de vibrations pour permettre des estimations raisonnables de ces paramètres. Ces fonctions de forgeage peuvent être des forces harmoniques d'état stationnaire, des forces transitoires ou des forces aléatoires. Ce sont les procédés d'excitation harmonique développés principalement pendant les années soixante et soixante-dix

qui font l'objet de la discussion dans ce rapport. Certains paramètres cependant ne peuvent pas être mesurés directement, et des procédés d'estimation initiale basés sur des processus d'optimisation et d'itération ont été proposés et seront également discutés. En général, les procédés expérimentaux requièrent une interprétation précise du comportement des structures lorsqu'elles sont soumises à une excitation telle que celle présentée dans la discussion mathématique du chapitre 2.

3.3 Incertitude de paramètre

On rencontre des limites pratiques chaque fois qu'un système continu est remplacé par un modèle à degrés de liberté limités. Une discussion détaillée de ces limites a été présentée par différents auteurs à la fin des années soixante (A.1, T.3).

L'élément le plus important à respecter, du point de vue expérimental, est l'orthogonalité des modes normaux estimés. Ce point a été mis en évidence par (M.3, R.2). Un intérêt récent dans ce problème a été introduit par Targoff (T.1), Berman (B.7), Ewins (E.1) et Barach (B.1). Certains résultats de ces publications seront introduits dans la présentation de ce rapport.

L'autre élément important d'une certitude vient des valeurs d'amortissement. Les interprétations d'amortissement ont toujours présenté des difficultés. Du côté expérimental, les mesures de mode complexe amorti (H.2), aussi difficiles soient-elles, ont apporté une amélioration dans les résultats.

3.4 Procédés expérimentaux

Ces procédés peuvent grossièrement être classifiés en deux groupes:

i) Procédés d'excitation en un point
ii) Procédés d'excitation en points multiples.

Les techniques d'excitation en un point sont généralement utilisées pour déterminer les modes à partir des réponses mesurées en fréquence, tandis que les techniques d'excitation en points multiples sont utilisées pour annuler tous les effets dus à l'amortissement non proportionnel et déterminer les modes réels normaux.

3.4.1 Procédés d'excitation en un point: modes normaux

Ces tests sont menés avec une force harmonique s'exerçant en un point (k). L'interprétation du mouvement résultant au point (p) vient de l'équation (62) dans le cas de l'amortissement proportionnel, soit,

$$\frac{x_p}{F_k} = \frac{1}{2}\left[\sum_{r=1}^{n}\left(A_{kp}^{r}\, Y\, e^{j\omega t} + A_{kp}^{r\,*}\, Y^{*}\, e^{-j\omega t}\right]\right. \tag{100}$$

L'équation (100) représente une valeur de réponse réelle. Considérons la première composante complexe de l'équation (100), soit

$$\frac{x_p}{F_k} = \sum_{r=1}^{n} A_{kp}^{r}\; Y\, e^{j\omega t}\ , \tag{101}$$

et $A_{kp}^{r} = \phi_{pr}\,\phi_{kr}$, le résidu au pôle r,

$$Y = \frac{1}{2j\, m_r\, \Omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2}}\left[\frac{1}{(j\omega-\lambda_r)} + \frac{1}{(j\omega-\lambda_r^{*}}\right]$$

$$= \frac{\cos\theta_r}{m_r\left[(\Omega_r^2-\omega^2)^2+(2\zeta_r\Omega_r\omega)^2\right]^{1/2}} - j\,\frac{\sin\theta_r}{m_r\left[(\Omega_r^2-\omega^2)^2+(2\zeta_r\Omega_r\omega)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{e^{-j\theta_r}}{m_r\left[(\Omega_r^2-\omega^2)^2+(2\zeta_r\Omega_r\omega)^2\right]^{1/2}}$$

$$\cos\theta_r = \frac{\Omega_r^2-\omega^2}{\left[(\Omega_r^2-\omega^2)^2+(2\zeta_r\Omega_r\omega)^2\right]^{1/2}}\ ;\ \sin\theta = \frac{2\zeta_r\Omega_r\omega}{\left[(\Omega_r^2-\omega^2)^2+(2\zeta_r\Omega_r\omega)^2\right]^{1/2}}$$

L'équation (101) peut être représentée dans n'importe laquelle des formes classiques:

Nyquist ($A^r_{kp}\ Y_{réel}$ en fonction de $A^r_{kp}\ Y_{Img}$), de Bode ($|\frac{xp}{Fk}| = f(\omega)$, $\theta = f(\omega)$, composante quadratique ($A^r_{kp}\ Y_{réel} = f(\omega)$ ou composante en coincidence ($A^r_{kp}\ Y_{Img} = f(\omega)$.

En considérant la représentation de Bode pour l'équation (101) et en supposant que les modes mesurés se trouvent entre les fréquences m et g, alors,

$$\frac{x_p}{F_k} = \Big[\underbrace{\sum_{0}^{m} A^r_{kp}\, Y}_{\substack{\text{Inertia Restraint} \\ \text{dominated by rigid} \\ \text{body motion} \\ = \frac{1}{M_t \omega^2} \\ M_t = \text{mass of system}}} + \underbrace{\sum_{m}^{g} A^r_{kp}\, Y}_{\substack{\text{Measured frequency} \\ \text{range.}}} + \underbrace{\sum_{g}^{n} A^r_{kp}\, Y}_{\substack{\text{Residual Flexibility} \\ R_a - \text{contribution} \\ \text{from higher order} \\ \text{modes.}}}\Big] e^{j\omega t}$$

Si au cours de l'expérience la fréquence s'approche beaucoup de la fréquence naturelle s, alors nous avons,

$$\frac{x_p}{F_k} = \frac{1}{M_t \omega^2} + \Big[\sum_{m}^{s-1} A^r_{kp}\, Y + \frac{\phi_{ps}\ \phi_{ks}}{m_s(2\zeta_s \Omega_s^2)} + \sum_{s+1}^{g} A^r_{kp}\, Y\Big] + R_a$$

$$= \left(\frac{1}{M_t \omega^2} + R_1\right) + \text{terme de résonance} + (R_2 + R_a) \qquad (103)$$

Si le terme de résonance est prédominant, le mouvement peut être considéré comme un mouvement acceptable de mode normal, perturbé par la contribution

négligeable des autres modes. Cela demande que les modes soient bien séparés. On peut apporter une amélioration en réduisant les termes résiduels dans l'équation (103) par rapport au terme de résonance. Pour ce faire, on peut utiliser la composante en quadrature de la fonction de transfert ci-dessus.

$$\left.\frac{x_p}{F_k}\right|_{img.} = 0 + R_{1\,img} + \frac{\phi_{ps}\,\phi_{ks}}{m_s\,(2\,\zeta_s\,\Omega_s^2)} + R_{2\,img} + R_{a\,img.} \qquad (104)$$

Tant que le terme de résonance reste le même, les termes résiduels de l'équation (104) sont bien plus petits que les termes résiduels de (103) particulièrement dans le cas d'un amortissement faible. Certaines mesures pratiques ont été recommandées (K.1) afin de réduire les perturbations de la réponse par des modes indésirables. Ces mesures sont les suivantes:

i) utiliser des vibreurs n'excitant pas ces modes

ii) appliquer la force à un noeud absolu du mode de telle sorte qu'un vibreur agissant sur le plan de symétrie n'excite aucun des modes anti-symétriques.

Ces résultats fondamentaux sont discutés par de nombreux auteurs (K.1, K.3, A.1) et présentés de façon très détaillée dans tous les manuels de vibration de référence.

3.4.2 Estimation initiale des fréquences naturelles et du taux d'amortissement; méthodes classiques

Le Schéma ci-dessous représente un bref aperçu des résultats obtenus par les différentes représentations des fonctions de transfert, comme indiqué en 3.4.1:

Représentation Nyquist

Chaque Y_r représente un cercle (K.1, M.1, F.1, K.3), dont le centre est situé sur l'axe imaginaire, multiplié par un facteur d'amplitude $\phi_{pr}\,\phi_{kr}$, et à un angle θ_r de l'axe de référence. On peut trouver un cercle de meilleure corrélation pour représenter la fonction d'ondes:

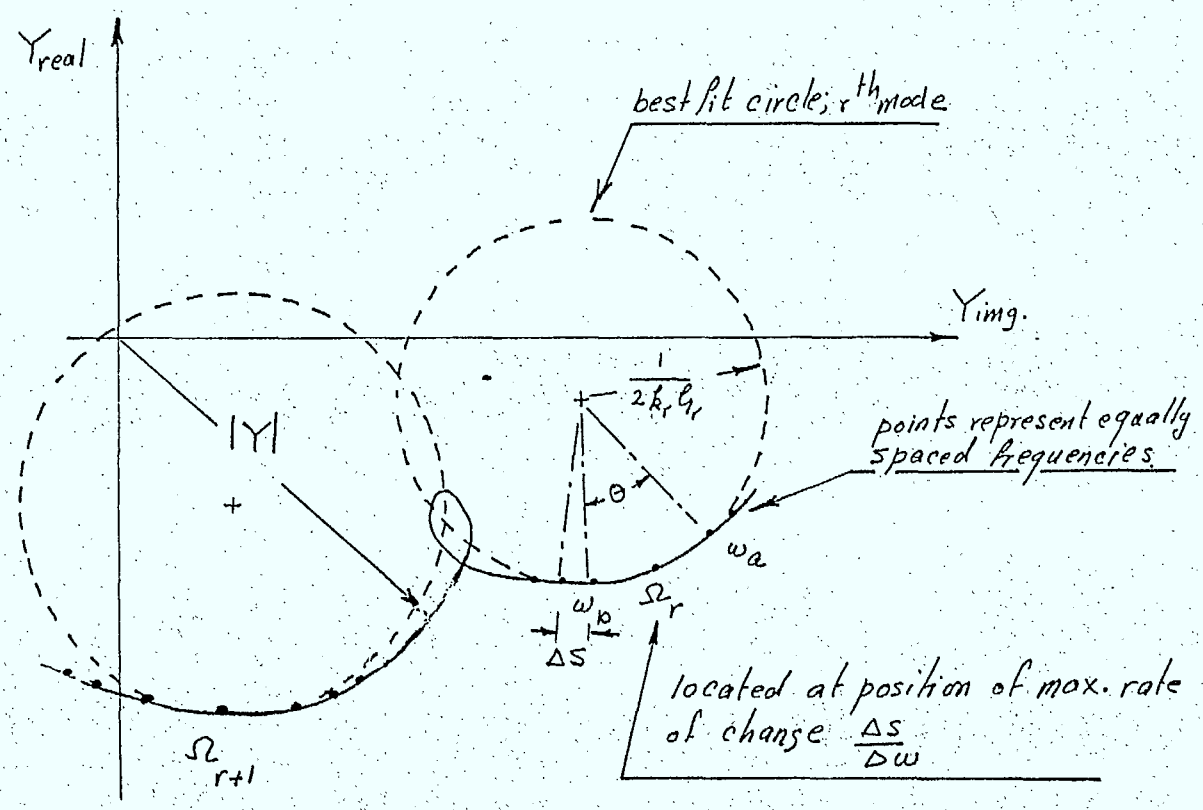


Figure 3.1

L'interférence de deux modes adjacents décale l'origine de chaque cercle sur l'axe imaginaire. Les deux cercles sont reliés par une boucle caractéristique si les modes sont bien séparés, ou par 2 points d'inflexion si les modes sont à peine séparés.

Pour trouver les estimations requises, en supposant l'amortissement proportionnel, on commence par dessiner les cercles de meilleure corrélation pour chaque mode:

i) <u>fréquence naturelle</u>:

Ω_r est déterminée par le taux de changement maximum de l'arc Δs avec la fréquence; à la résonance, $\frac{ds}{d(\omega)^2}$ est maximum.

ii) <u>taux d'amortissement</u>:

$$\zeta_r = \frac{\Delta\omega}{\Omega_r \tan \theta/2} \qquad \Delta\omega = (\omega_b - \omega_a)$$

iii) <u>masse modale m_r et rigidité modale k_r</u>:

diamètre du cercle $\frac{1}{2\, m_r\, \zeta_r\, \Omega_r^2} = \frac{1}{2\, k_r\, \zeta_r}$

connaissant ζ_r et Ω_r, on détermine m_r et k_r.

Favour ( ) recommande une méthode appelée méthode de la masse ajoutée. Le test est répété avec une petite masse m_a au point moteur et la fréquence naturelle est Ω_{ra}, alors,

$$\Omega_r = \frac{k_r}{m_r}, \quad \Omega_{r_a} = \frac{k_r}{m_r + m_a}$$

$$m_r = m_a \frac{\Omega_r^2}{\Omega_{r_a}^2 \quad \Omega_r^2}$$

Cette méthode part de l'hypothèse que les modes normaux sont largement séparés et que leurs formes ne sont pas très affectées par l'addition de m_a.

Dès 1947, Kennedy (K.1) a montré que les estimations pourraient être améliorées en traçant la dérivée de Y dans la représentation graphique de Nyquist par rapport à ω. C'est actuellement le manque de commodités

niveau de l'ordinateur qui empêche l'utilisation pratique de ces représentations graphiques. A notre connaissance le tracé des dérivées de Y n'a pas encore été implanté.

Représentation de Bode, représentation Co-Quad

On peut trouver en référence (C.7), une très large discussion sur les représentations des fonctions de transfert. Ces représentations peuvent être effectuées sur des échelles logarithmiques ou linéaires. Alors que ces dernières mettent mieux en évidence le pic indiquant les points critiques, et donnent aussi une meilleure résolution des modes, les échelles logarithmiques sont cependant les plus itilisées. Les différents types de fonctions de transfert utilisées dans ces représentations sont:

Fonctions de mobilité: $\frac{x_p}{F_k}$ = malléabilité (compliance)

$\frac{\dot{x}_p}{F_k}$ = mobilité

$\frac{\ddot{x}_p}{F_k}$ = inertance

Fonctions d'impédance: $\frac{F_k}{x_p}$ = rigidité apparente

$\frac{F_k}{\dot{x}_p}$ = impédance

$\frac{F_k}{\ddot{x}_p}$ = masse apparente

Bode plot, Co-Quad plots

An extensive discussion of the plot of transfer functions can be found in reference (C.7). These plots can be affected on logarithmic scales or linear scales. While the latter emphasized the peaks indicating critical points, and thus gives better resolution for modes, yet the logarithmic plots are often used. The different types of transfer functions used in these plots are:

Mobility functions: $\frac{x_p}{F_k}$ = receptance, compliance

$\frac{x_p^{\circ}}{F_k}$ = mobility

$\frac{x_p^{\circ\circ}}{F_k}$ = inertance

Impedance functions: $\frac{F_k}{x_p}$ = apparent stiffness

$\frac{F_k}{x_p^{\circ}}$ = Impedance

$\frac{F_k}{x_p^{\circ\circ}}$ = apparent mass

Estimates of modal parameters: (C.7, H.5, L.1, S.3, G.4 O.1, P.1)

i) natural frequency

- peaks of compliance plots occur at $\Omega_r \sqrt{1 - 2\xi^2}$
- peaks of mobility plots occur at Ω_r
- peaks of inertance plots occur at $\Omega_r \quad [1 - 2\xi^2]^{-\frac{1}{2}}$

Estimation des paramètres modaux (C.7, H.5, L.1, S.3 G.4, O.1 P.1)

i) <u>fréquence naturelle</u>

- les pics des graphes de malléabilité se trouvent à $\Omega_r \sqrt{1 - 2\zeta^2}$
- les pics des graphes de mobilité se trouvent à Ω_r
- les pics des graphes d'inertance se trouvent à $\Omega_r \, [1 - 2\zeta^2]^{-\frac{1}{2}}$
- les points d'inflexion des graphes de phase ($\alpha_r = \frac{\Pi}{2}$) se trouvent; à Ω_r
- l'intersection des graphes de coincidence avec la fréquence; à Ω_r
- les pics des graphes de Quadrature avec la fréquence; à Ω_r

Comme les forces intervenant à la résonance viennent du terme d'amortissement qui est proportionnel à la vitesse, il semble logique de recommander des représentations linéaires de la vitesse pour obtenir une valeur précise de Ω_r. Cependant, les graphes de coincidence de n'importe laquelle des fonctions de transfert donneront également de bonnes estimations. Les pics des graphes de Quadrature sont plus aigus que les pics des graphes d'amplitude, étant donné que les premiers sont moins perturbés par les autres modes.

ii) <u>taux d'amortissement ξ_r</u>

- point de demi-puissance: cette méthode est très répandue où:

$$2\,\zeta_r = \frac{\Delta\omega}{\Omega_r}$$

ou (D.1),

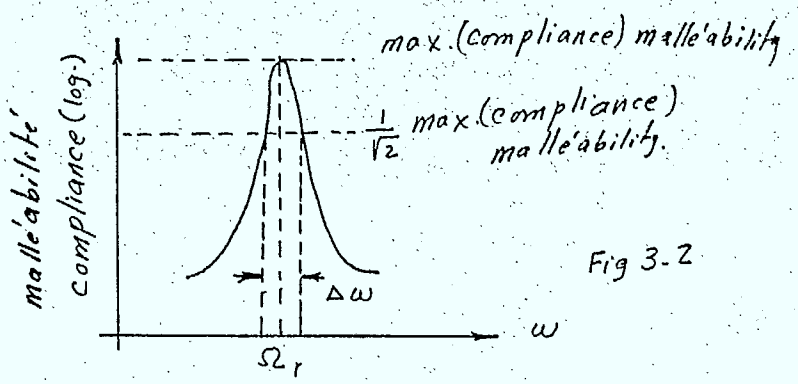


Fig 3.2

Fig. 3.2

$$\zeta_r \,\% = \frac{1000}{2\ell}\left[e^{(f_r + \frac{\delta}{2}) \times \frac{2.3026}{d}} - e^{(f_r - \frac{\delta}{2}) \times \frac{2.3026}{d}} \right]$$

ℓ = facteur d'échelle, différence entre 10 Hz et 100 Hz mesurée en mm

f_r = fréquence de résonance $\frac{\Omega_r}{2\Pi}$

δ = largeur de bande $\Delta\omega$ en mm

d = distance en mm de 10 Hz à la fréquence de résonance

On trouve également que $\zeta_r \propto \frac{\delta}{\ell}$

- amortissement à partir des graphes de coincidence de malléabilité

$$2\xi = \frac{\left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^2 + 1}$$

- à partir du graphe de déphasage:

$$\left.\frac{d\theta}{d\omega}\right|_{\omega = \Omega_r} = \frac{1}{\xi\,\Omega_r}$$

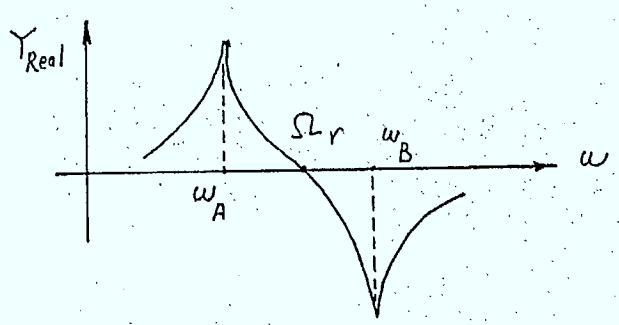


Fig. 3.3

= taux de déphasage de la réponse pendant la variation de la fréquence d'excitation sinusoidale à travers la résonance,

iii) <u>fonction d'ondes, masse modale m_r, rigidité modale k_r</u>

Les fonctions d'ondes peuvent être mesurées directement. La précision de la flexion modale n'est cependant pas aussi bonne que la précision des mesures de fonctions de transfert et cette méthode doit être évitée chaque fois que possible. Certaine

méthode prône le calcul des fonctions d'ondes par itération comme il est indiqué ci-dessous:

a) Thoren (T.4) suggère de résoudre un système algébrique de n^2 équations, où, à partir de l'équation (100) et pour la résonance, la valeur de la fonction de transfert est donnée par la composante en coincidence,

$$\frac{x_p}{F_k} = \sum \phi_{pr}\,\phi_{kr}\,\frac{\sin(\omega t - \theta_r)}{m_r\sqrt{(\Omega_r^2-\omega^2)-(2\zeta_r\Omega_r\omega)^2}} \tag{105}$$

$$\left.\frac{x_p}{F_k}\right|_i = \sum \frac{\phi_{pr}}{\sqrt{m_r}}\cdot\frac{\phi_{kr}}{\sqrt{m_r}}\,Y_{ri}\,, \qquad i = \text{se rapportant à la fréquence } \omega_i \text{ des forces matrices.}$$

En gardant tout le temps la force en position (1), en déplaçant l'accéléromètre de la position 1 à la position n et en excitant la structure du 1er au $n^{\text{ième}}$ mode, on peut représenter:

$$\begin{bmatrix} Y_{n\times n} & O_{n\times n} & \cdots & \\ O_{n\times n} & Y_{n\times n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Y_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11}^2/m_1 \\ \phi_{12}^2/m_2 \\ \vdots \\ \phi_{1n}^2/m_n \\ \phi_{11}\phi_{21}/m_1 \\ \phi_{12}\phi_{22}/m_2 \\ \vdots \\ \phi_{1n}\phi_{2n}/m_n \\ \vdots \\ \phi_{11}\phi_{n1}/m_1 \\ \phi_{12}\phi_{n2}/m_2 \\ \vdots \\ \phi_{1n}\phi_{nn}/m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{x_1}{F_1}\right|_1 \\ \left.\frac{x_1}{F_1}\right|_2 \\ \vdots \\ \left.\frac{x_1}{F_1}\right|_n \\ \left.\frac{x_2}{F_1}\right|_1 \\ \left.\frac{x_2}{F_1}\right|_2 \\ \vdots \\ \left.\frac{x_2}{F_1}\right|_n \\ \vdots \\ \left.\frac{x_n}{F_1}\right|_1 \\ \left.\frac{x_n}{F_1}\right|_2 \\ \vdots \\ \left.\frac{x_n}{F_1}\right|_n \end{bmatrix} \tag{106}$$

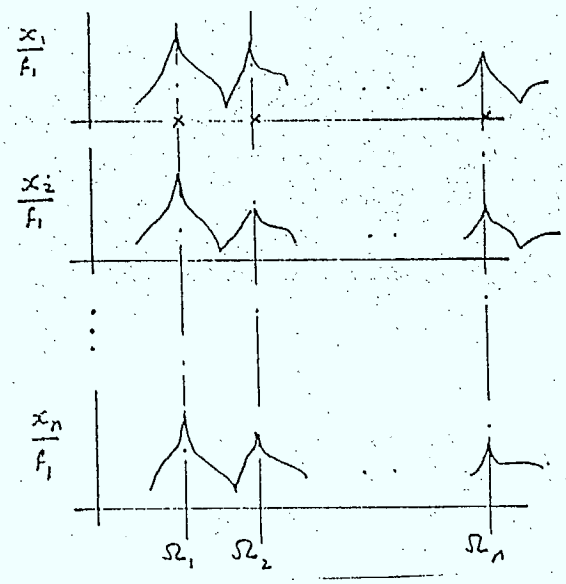


Fig. 3.4

où,

$$Y_{n\times n} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} & \cdots & Y_{n1} \\ Y & Y_{22} & \cdots & Y_{n2} \\ \vdots & & & \\ Y_{1n} & Y_{2n} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}$$

En résolvant les n^2 équations (106), on obtient la forme modale normalisée.

b) La méthode suivante est proposée par Klosterman ( ). Elle dépend des itérations faites à partir des résultats obtenus par les composantes en coincidence et en Quadrature.

Des équations (101),

$$\left.\frac{x_p}{F_k}\right|_{\omega_i} = \sum A^r_{pk}\, Y^r_{Real(\omega_i)} + j \sum A^r_{pk}\, Y^r_{Img(\omega_i)} ,$$

en choisissant n fréquences ω_i, on peut écrire,

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{x_p}{F_k}\right|_1 \\ \left.\frac{x_p}{F_k}\right|_2 \\ \vdots \\ \left.\frac{x_p}{F_k}\right|_n \end{bmatrix}_{\substack{Real\\Com.}} = \begin{bmatrix} Y^1_{Real(1)} & \cdots & Y^n_{Real(1)} \\ Y^1_{Real(2)} & \cdots & Y^n_{Real(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ Y^1_{Real(n)} & \cdots & Y^n_{Real(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1_{pk} \\ A^2_{pk} \\ \vdots \\ A^n_{pk} \end{bmatrix} \qquad (107)$$

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{x_p}{F_k}\right|_1 \\ \left.\frac{x_p}{F_k}\right|_2 \\ \vdots \\ \left.\frac{x_p}{F_k}\right|_n \end{bmatrix}_{\substack{Img\\Comp.}} \begin{bmatrix} Y^1_{Img(1)} & \cdots & Y^n_{Img(1)} \\ Y^1_{Img(2)} & & Y^n_{Img(2)} \\ \vdots & & \\ Y^1_{Img(n)} & & Y^n_{Img(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1_{pk} \\ A^2_{pk} \\ \vdots \\ A^n_{pk} \end{bmatrix} \qquad (108)$$

Connaissant Ω_r et ζ_r, [illegible] utilisant la courbe ou utiliser des méthodes d'optimisation pour obtenir les meilleures valeurs de A^r_{pk} qui, à leur tour, permettent d'obtenir les meilleures estimations de $\frac{\phi_{pr}}{\sqrt{m}}$ et $\frac{\phi_{kr}}{\sqrt{m}}$.

Stahle (5.3) propose d'autres techniques équivalentes.

Une fois que l'estimation initiale des modes normaux est faite, on doit vérifier qu'il y a suffisamment de modes pour exprimer la réponse du système. Ewins (E.1) suggère d'utiliser une impédance ponctuelle au point p et une impédance transversale entre les points p et k pour vérifier la valeur de l'impédance ponctuelle en k. L'équation (105) mène à,

$$H_{kp}\Big|_{\omega=\Omega_r} = \frac{x_k}{F_p}\Big|_{\omega=\Omega_r} = \frac{\phi_{pr}\,\phi_{kr}}{m_r\,2\,\zeta_r\,\Omega_r^2}\cos(\omega t-\theta_r)$$

$$H_{kk}\Big|_{\omega=\Omega_r} = \frac{\phi_{kr}^2}{m_r\,2\,\zeta_r\,\Omega_r^2}\cos(\omega t-\theta_r)$$

$$H_{pp}\Big|_{\omega=\Omega_r} = \frac{\phi_{pr}\,\phi_{kr}}{m_r\,2\,\zeta_r\,\Omega_r^2}\cos(\omega t-\theta_r)$$

$$= \left[H_{kp}\Big|_{\omega=\Omega_r}\right]^2 \cdot \frac{1}{H_{kk}\Big|_{\omega=\Omega_r}} \qquad (109)$$

Cette valeur est alors comparée aux valeurs mesurées. La différence permet de voir si le nombre de modes est suffisant ou non. Asher (A.1)

propose de vérifier l'indépendance des modes en calculant le Gramien de la matrice d'admittance qui doit tendre vers zéro si les n vecteurs engendrent suffisamment l'espace de vibration.

3.4.3 Méthodes d'excitation en un point: modes complexes amortis

On n'impose dans ces méthodes aucune restriction sur l'amortissement. Les méthodes proposées ici dépendent seulement de la fonction de transfert due à une force exercée au point k et de la réponse au point p, équation (58). La réponse est une valeur réelle, consédirant cependant la réponse complexe de la 1ère partie de cette équation,

$$\frac{x_p}{F_k} = \sum \left[\frac{A^r_{pk}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{A^{r*}_{pk}}{(j\omega - \lambda^*_r)}\right] e^{j\omega t} \qquad (111)$$

où $A^r_{pk} = \dfrac{\phi^d_{pr}\ \phi^{d*}_{kr}}{\alpha_r}$,

et ϕ^d_r est le mode amorti. Cette équation peut être représentée d'après le graphe de Nyquist et les résultats peuvent être interprétés en formations des paramètres apparaissant dans cette équation.

D'autres méthodes décrivent les procédés basés sur le respect des conditions d'orthogonalité pour les modes amortis et les paramètres du système tels que décrits par les équations (25) à (32).

Les équations (111) et (25) à (32) font intervenir les éléments de la matrice d'amortissement C sans imposer aucune condition sur ces éléments.

Une brève discussion de quelques-unes de ces méthodes est présentée par la suite.

Méthode 1

Une des premières méthodes utilisant la mesure du mode amorti a été introduite par Hasselman (H.2). Il se sert de l'équation (25) sous la forme suivante,

$$\phi_r^{dT} C \phi_\ell^{*d} + \lambda_r \phi_r^{dT} M \phi_\ell^{*d} + \phi_r^{dT} M \phi_\ell^{*d} \lambda_\ell^* = 0 \qquad (112)$$

Au lieu d'utiliser l'équation (16) pour ϕ_r^d, l'auteur suggère la forme suivante:

$$\phi_r^d = \phi_{r\ \text{réel}}^d + \phi_r^d\ \text{Img}$$

$$= [\phi_r + \delta\ \phi_r] + j\ \delta\ \phi_{rI}$$

où ϕ_r est le mode normal et $\delta\ \phi_r$ et $\delta\ \phi_{rI}$ sont de petites perturbations. A partir des équations (111), (112) et des expressions de λ_r et λ_ℓ^* données par les équations (10), on obtient une expression complexe, dont les parties réelles et imaginaires sont simplifiées en négligeant les termes d'ordre supérieur, soit,

$$\phi_r^T C \phi_r - (2\Omega_r \xi_r)\, \phi_r^T M \phi_\ell = 0 \qquad (113)$$

$$\phi_r^T C \phi_\ell + (\Omega_\ell \xi_\ell - \Omega_r \xi_r)[\phi_r^T M \delta\phi_{\ell I} - \delta\phi_{rI}^T M \phi_\ell] = 0 \qquad (114)$$

Soit $\Phi^T\ C\ \Phi = \overline{C}_{nxn}$ (115)

Alors, d'après (113), $\overline{C}_{ii} = -2\ \Omega_r\ \xi_r\ m_r$

d'après (114), $\overline{C}_{ij} = (\Omega_r \xi_r - \Omega_\ell \xi_\ell)[\phi_r^T M \delta\phi_{\ell I} - \delta\phi_{rI} M \phi_\ell]$ (116)

La seule chose dont on a besoin alors est de mesurer le terme imaginaire de l'équation (112) qui est la composante du déplacement déphasée de $\frac{\Pi}{2}$ par rapport à la force. Si on prend la force comme référence, la composante en Quadrature de la fonction de transfert $\frac{x_p}{F_k}$ est en phase avec la force et la composante en coincidence est déphasée. Le $\delta\,\phi_{pr}$ requis est montré sur la figure (3.5)

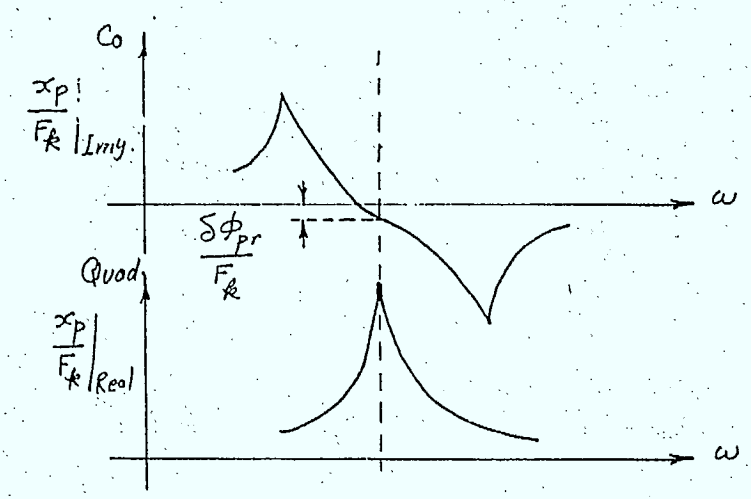


Fig. 3.5

Méthode 2

Cette méthode est proposée par Fillod (F.2) et demande 3 mesures de base autour de chaque mode identifiable dans la représentation de Nyquist d'une fonction de transfert ponctuelle au point k, figure 3.6.

$$x_k = \sum \left[\frac{\phi_{rk}^{d}\,\phi_{rk}^{d}}{\alpha_r(j\omega - \Omega_r)} + \frac{\phi_{rk}^{*d}\,\phi_{rk}^{*d}}{\alpha_r^{*}(j\omega - \Omega_r)} \right] F_k$$

En appliquant une force comme F_k à 3 valeurs différentes (ω_1, ω_2, ω_3) pas très éloignées de la valeur inconnue Ω_r, alors (figure 3.6)

$$x_k(\omega_i) = \frac{(\phi_{rk}^{d})^2 F_k}{m_r(j\omega_i - \Omega_r)} + R_i \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

où R_i comprend l'effet de la partie conjuguée et les effets des autres modes,

$$R_i = \sum_{r=1}^{n} \frac{(\phi_{rk}^{*d})^2}{\alpha_r^*(j\omega_i - \Omega_r)} + \sum_{s \neq r}^{n} \frac{(\phi_{sk}^{d})^2}{\alpha_s(j\omega_i - \Omega_s)} .$$

Comme R_i varie très lentement autour de Ω_r, alors

$$\Delta X_{i\ell} = X_k(\omega_i) - X_k(\omega_\ell) = \frac{(\phi_{rk})^2 (j\omega_\ell - j\omega_i)}{(j\omega_i - \Omega_r)(j\omega_\ell - \Omega_r)} + \cancelto{0}{(R_i - R_\ell)}$$

pour $i \neq \ell = 1, 2, 3.$

La représentation de Nyquist pour le déplacement peut alors être obtenue expérimentalement.

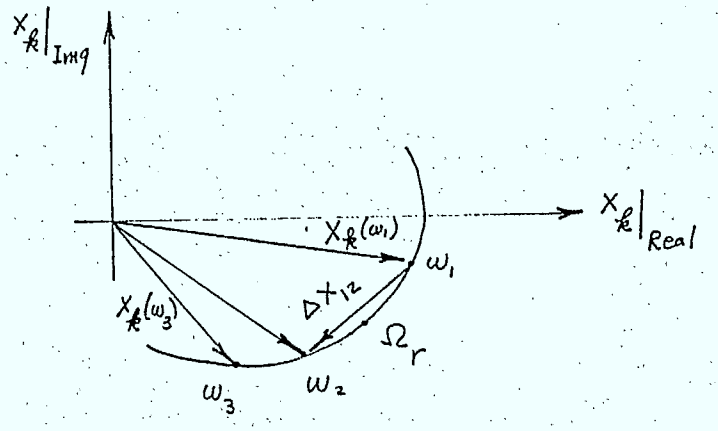


Fig. 3.6

En multipliant l'équation donnant $\Delta X_{i\ell}$ par F_k, on obtient,

$$F_k \cdot \Delta X_{i\ell} = \left(\frac{\phi_{rk}^{d} F_k}{\sqrt{m_r}} \right)^2 \frac{(j\omega_\ell - j\omega_i)}{(j\omega_i - \Omega_r)(j\omega_\ell - \Omega_r)} .$$

Le côté gauche peut être calculé pour i = 1 et ℓ = 2 et 3, ramenant le problème à l'équation à 2 inconnues: $\left(\frac{\bar{\phi}^d_{rk}}{\sqrt{mr}} F_k\right)^2$ et Ω_r, dont la résolution permet de déterminer Ω_r et la valeur complexe $\frac{\bar{\phi}^d_{rk}}{\sqrt{mr}}$.

Il faut calculer la valeur complexe de la force pour pouvoir mener les calculs. Cette méthode peut être améliorée en traçant la fonction de transfert complexe $\frac{X_k}{F_k}$.

3.4. Méthode d'excitation en plusieurs points aux fréquences naturelles

Conformément à l'article (2.3.4), cas No. 1, si les forces d'excitations multiples (F_r) sont harmoniques et en phase avec une fréquence égale à la $r^{ième}$ fréquence naturelle, la réponse de la structure est un mode normal en quadrature avec l'excitation ($\theta_r = \frac{\Pi}{2}$) indépendamment du type d'amortissement. A partir des équations (40, 74, 75), on obtient,

$$[K - M\Omega_r^2] = 0$$
$$F_r = [C\Omega_r]\phi_r \quad . \tag{117}$$

et,

$$\phi_s^T F_r = \phi_s^T C \Omega_r \phi_r \quad , \text{ for } s = r$$
$$= 0 \quad , \quad s \neq r \tag{118}$$

Le mode normal engendré est le $r^{ième}$ mode forcé pour une fréquence égale à la fréquence naturelle correspondante.

L'avantage de cette méthode est qu'elle est basée sur la séparation totale des caractéristiques d'inertie et de rigidité de la structure d'une part et des effets d'amortissement d'autre part. Les matrices de masse et

de rigidité peuvent ainsi être identifiées séparément.

Au cours de ces procédés (C10, N.4), on utilise plusieurs excitateurs en parallèle à partir d'amplificateurs de puissance individuels et d'un contrôleur d'excitation commun. On utilise différentes méthodes pour contrôler les excitations, soit manuellement, soit automatiquement (N.4, C.9). Craig (C.7) propose d'utiliser les résultats d'expérience à vibreur unique pour accorder les vibreurs.

i) Fréquences naturelles:

Les fréquences naturelles sont simplement les fréquences pour lesquelles l'opérateur peut satisfaire les conditions suivantes:

1. Les forces d'excitation sont en quadrature avec le déplacement, ou en phase avec la vitesse.
2. Toutes les forces sont en phase et tous les déplacements sont en phase.

Après avoir déterminé le vecteur de forgeage F_r, Nguyen (N.4) propose de changer le niveau d'excitation tout en conservant le rapport des composantes de forgeage. Pour chaque niveau d'excitation, on détermine la valeur exacte de la fréquence (pour laquelle les conditions ci-dessus sont satisfaites) et on mesure également le vecteur-vitesse. On a ainsi deux familles de courbes, ω en fonction du niveau d'excitation et la vitesse en fonction du niveau d'excitation. Ces deux courbes vont permettre une meilleure estimation de la fréquence naturelle et un meilleur choix du niveau d'excitation requis pour le test.

ii) Fonctions d'ondes

Les mesures directes de la réponse lorsque les conditions ci-dessus sont satisfaites donnent la fonction d'onde normale.

Un critère de pureté modale a été présenté par Craig (C.7). Il disait que si le nombre de vibrations (ϕ) est inférieur au nombre requis pour exciter le mode normal, il sera en général impossible d'exciter le système de telle sorte que toutes les (n) réponses soient en quadrature avec les (p) forces. La fonction d'onde obtenue sera définie comme étant les composantes en quadrature de la réponse, en acceptant une erreur de quadrature inférieure à 1% de la plus large amplitude totale.

iii) Masse modale m_r et rigidité modale k_r

Les méthodes suivantes résument le travail effectué à l'ONERA (Office National d'Etudes et de Recherches Aerospatiales - France) par Nguyen (N.4) et Baticle (B.3). Ces méthodes sont présentées brièvement ici:

1. Méthode de la masse ajoutée (N.4, F.1)

Cette méthode consiste à ajouter de petites masses ΔM_n en n points caractéristiques tout en veillant à ne pas perturber le $r^{ième}$ mode normal. La $r^{ième}$ fréquence naturelle sera changée de $\Delta \Omega_r$, valeur qui peut être mesurée

$$-(\Omega_r + \Delta\Omega_r)^2 (M + \Delta M)\phi_r + K\phi_r = 0. \qquad (120)$$

On peut estimer Δm_r à partir de ΔM comme,

$$\Delta m_r = \phi_r^T \Delta M \phi_r \quad .$$

En multipliant à droite l'équation (120) par ϕ_r^T, connaissant $\Delta \Omega_r$ et utilisant $m_r \Omega_r^2 = k_r$ (équation (43), on obtient,

$$m_r = -\frac{\Omega_r}{2} \frac{\Delta m_r}{\Delta \Omega_r} \quad . \qquad (121)$$

2. <u>Méthode des forces en quadrature</u> (N.4)

Cette méthode consiste à ajouter une petite force en quadrature ΔF à la force d'excitation F, soit,

$$F = (1 + j\,\Delta)F$$

Le mode normal doit rester le même. La masse m_r est alors définie en fonction du travail introduit par la composante en quadrature de la force.

3. <u>Méthode de la puissance complexe</u> (B.3.N.4)

On part de la solution complexe suggérée dans l'équation (44) et (45)

$$x(t) = \text{diag}\ e^{j\omega t}\ X,$$

et on utilise les modes normaux de l'équation (47),

$$X = \Phi\ \gamma$$

En substituant dans l'équation (1) et en se servant et l'équation (40), on obtient,

$$\text{diag}\, m_r\, \omega^2 + \Phi^T C\, \Phi\ \text{diag}\, j\omega + \text{diag}\, k_r = \Phi^T F_o . \qquad (122)$$

Le vecteur force F_0 est un vecteur arbitraire et non pas le vecteur servant à exciter un mode forcé.

Soit, $\Phi^T\ C\ \Phi = D$ avec

$$D_{ij} = \phi_{pi}\ C_{pg}\ \phi_{gj} \qquad (123)$$

$$D_{ii} = 2\ m_i\ \Omega_i\ \xi_i\ .$$

Si le système est excité à une fréquence proche de la $r^{\text{ième}}$ fréquence naturelle, alors l'énergie est donnée par,

$$W\Big|_{\omega \sim \Omega_r} = \frac{1}{2} F^T X^{\circ}$$

$$= k_r \left[\zeta_r \Omega_r - j(\omega - \Omega_r) - \frac{(\omega - \Omega_r)^2}{2!} \left(4 m_r \Omega_r - \frac{j}{\Omega_r}\right) + \ldots \right]$$

$$W(Real)\Big|_{\omega \sim \Omega_r} \simeq k_r \zeta_r \Omega_r$$

$$W(Img)\Big|_{\omega \sim \Omega_r} = 0$$

$$\frac{dW(Real)}{d\omega}\Big|_{\omega \sim \Omega_r} = 0 \qquad \frac{dW(Img)}{d\omega}\Big|_{\omega \sim \Omega_r} = -k_r$$

La tangente de la courbe W (img) en fonction de ω coupe l'axe des fréquences avec une pente égale au module de rigidité k_r et $m_r \Omega_r^2 = k_r$

iv) Taux d'amortissement modal ξ_r

On peut l'obtenir à partir des équations (43, 118). Pour un vecteur force F_r connu excitant un mode normal mesuré ϕ_r, on a,

$$\phi_r^T F_r = \phi_r^T C \; diag\, \Omega_r \phi_r = 2 m_r \Omega_r^2 \zeta_r \, . \qquad (119)$$

La méthode la plus simple est de calculer le taux de décroissance à partir des différents résultats de l'accéléromètre quand les forces de vibration tombent instantanément à la valeur zéro. On peut suivre cette méthode en vérifiant les résultats de l'équation (119).

3.4.5 Méthode d'excitation en plusieurs points à des fréquences différentes des fréquences naturelles

Cette méthode utilise les modes forcés ϕ_r^f (éq. 70) obtenus par excitation en plusieurs points à une fréquence fixée ω. En maintenant la fréquence fixe, l'opérateur essaie de trouver des forces d'amplitude correspondant à la valeur propre tan θ_r, où θ_r est le déphasage entre la force et le déplacement en chaque point. En théorie, il existe (n) déphasages possibles pour chaque fréquence matrice ω. En pratique, on peut générer deux ou trois de ces modes pour une fréquence ω. La référence (72) décrit un procédé basé sur les équations (84) et (85) pour obtenir une estimation initiale des paramètres de mode. Cette méthode est recommandable uniquement dans le cas de structures fortement amorties.

3.4. Autres méthodes d'excitation en plusieurs points

D'autres méthodes ont été proposées par différents auteurs. Nguyen (N.4) a suggéré de faire une expérience avec des fréquences situées au voisinage des fréquences naturelles. Pour surmonter les difficultés dues au système de contrôle complexe indispensable pour garder toutes les forces en phase, Thomas (T.2) a suggéré de se servir de forces d'excitation déphasées (voir cas No. 2, article 2.3.5). Cette méthode est en cours de développement et est également recommandable pour les systèmes fortement amortis.

CHAPITRE 4

TECHNIQUE D'IDENTIFICATION DIRECTE

4.1 Introduction

Nous nous intéressons ici au problème de déterminer les matrices de masse et de rigidité directement à partir des paramètres modaux mesurés expérimentalement. La technique d'identification directe est une approche directe ou à système ouvert comme indiqué sur la figure 4.1

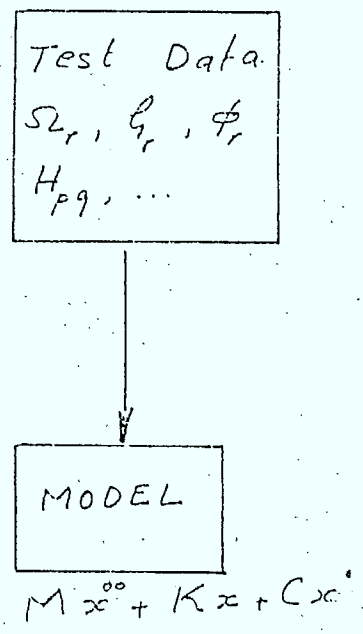


Figure 4.1

En général, l'analyste distingue les propriétés d'inertie et de rigidité des propriétés d'amortissement. Les premières proviennent des données du mode normal tandis que les dernières proviennent des données du mode

complexe. En terme général, le problème d'identification est le suivant: soit un système à n valeurs propres Ω_r; les fonctions d'onde, les coefficients d'amortissement, la masse généralisée m_r et la rigidité généralisée k_r déterminent les matrices de $n^{ième}$ ordre de masse, de rigidité et d'amortissement, matrices qui possèdent des paramètres modaux, sinon égaux, du moins aussi proches que possible. Dans une approche légèrement différente, les résultats expérimentaux utilisés sont les données de réponse forcée. Plusieurs excellents articles ont été publiés sur ce sujet au début des années soixante-dix (B.6, P.1, Y.1).

4.2 Signification physique des éléments des matrices de synthèse de masse et de rigidité

Les seules données de départ ici sont l'inertie et la rigidité. La difficulté d'utiliser des paramètres modaux pour synthétiser ces paramètres réside dans le fait que les tests expérimentaux donnent des informations sur les contributions des modes d'ordre inférieur uniquement. Le modèle structural obtenu de cette façon est appelé pour cette raison modèle d'ordre inférieur. L'apparence extérieure des matrices de masse et de rigidité en découlant dépend de la formulation spécifique du problème et leur fonction première est de donner un modèle de la réponse structurale dynamique. Les éléments individuels des matrices M and K n'ont pas nécessairement de signification physique et ne sont donc pas uniques. Ceci s'oppose au modèle d'ordre supérieur obtenu par approche numérique (chapitre 5) où chaque élément des matrices de synthèse correspond de façon bien définie à des valeurs physiques liées à la structure.

La signification théorique et physique des éléments des matrices de masse et de rigidité a été étudiée par Ross (R.2). Il aboutit à la conclusion que, pour les modèles d'ordre inférieur, les caractéristiques importantes des matrices de masse et de rigidité sont leur représentation de l'énergie cinétique et du travail du système.

4.3 Procédés de synthèse des matrices de masse et de rigidité

On peut avoir une estimation des matrices K et M en appliquant directement les conditions d'orthogonalité des équations (3[illegible]), soit,

$$\begin{aligned} \Phi^T M \Phi &= [\,\mathrm{diag.}\ m_r\,] \\ \Phi^T K \Phi &= [\,\mathrm{diag.}\ m_r \Omega_r^2\,] \end{aligned} \tag{120}$$

On normalise ϕ en divisant chaque colonne par $\frac{1}{\sqrt{mr}}$,

$$\Phi_{nor} = \Phi\,[\,\mathrm{diag.}\ \frac{1}{\sqrt{m_r}}\,] = [\frac{\phi_1}{\sqrt{m_1}} \cdots \frac{\phi_r}{\sqrt{m_r}} \cdots \frac{\phi_n}{\sqrt{m_n}}\,] \tag{121}$$

De (120) et (121), on tire,

$$\begin{aligned} \Phi_{nor}^T M\, \Phi_{nor} &= U \quad \text{(matrice d'identité)} \\ \Phi_{nor}^T K\, \Phi_{nor} &= [\,\mathrm{diag.}\ \Omega_r^2\,]. \end{aligned} \tag{122}$$

De plus, de (122), on tire,

$$\begin{aligned} \Phi_{nor}^{-1} &= \Phi_{nor}^T M. \\ \Phi_{nor}^{-T} &= M\, \Phi_{nor}\ , \quad M \text{ symetric.} \end{aligned} \tag{123}$$

On peut écrire finalement,

$$M = [\,\Phi_{nor}\, \Phi_{nor}^T\,]^{-1} = \Phi^{-T}\,[\,\mathrm{diag.}\ m_r\,]\,\Phi^{-1} \tag{124}$$

$$K = M \Phi_{nrr} [\mathrm{diag}\, \Omega_r^2] \Phi_{nrr}^T M$$

$$= M \Phi [\mathrm{diag}\, \frac{\Omega_r^2}{m_r}] \Phi^T M. \tag{125}$$

Les équations (124) et (125) déterminent complètement M_{nxn} and K_{nxn} (T.4, R.2, W.1, G.2, F.3), en partant de l'hypothèse qu'on dispose d'un système complet de fonctions d'onde Φ_{nxn} . Dans beaucoup de cas, on dispose d'une matrice modale tronquée Φ_{nxm} pour m modes mesurés à n positions, et on veut déterminer entièrement les matrices complètes M_{nxn} et K_{nxn}.

Une des techniques (R.2, G.2, F.3) est basée sur les conditions d'orthogonalité suivantes;

$$\Phi_{mxn}^T M_{nxn} \Phi_{nxm} = [\mathrm{diag.}\, m_r]_{mxm} .$$
$$\Phi_{mxn}^T K_{nxn} \Phi_{nxm} = [\mathrm{diag.}\, m_r \Omega_r^2]_{mxm} , \tag{126}$$

En multipliant à gauche par ϕ_{nxm}, à droite par Φ_{mxn}^T et en posant $\Phi_{nxm} \Phi_{mxn}^T = \psi_{nxn}$, on a,

$$M_{nxn} = \psi_{nxn}^{-1} \Phi_{nxm} [\mathrm{diag.}\, m_r]_{mxm} \Phi_{mxn}^T \psi_{nxn}^{-T} ,$$
$$K_{nxn} = \psi_{nxn}^{-1} \Phi_{nxm} [\mathrm{diag.}\, m_r \Omega_r^2]_{mxm} \Phi_{mxn}^T \psi_{nxn}^{-T} \tag{127}$$

On peut améliorer encore (R.2) en ajoutant (n - m) vecteurs arbitraires linéairement indépendants à la matrice Φ_{nxn}, comme indiqué ci-dessous:

$$\Phi_{nxn} = [\phi_r \ldots \phi_m | \zeta_1 \ldots \zeta_s | \xi_{m+s+1} \ldots \xi_n],$$

où ζ_r sont les vecteurs propres inférieurs (s) de K (équation 127) et les ξ_r sont les vecteurs propres supérieurs de M (équation 127). On utilise alors la nouvelle matrice modale dans les équations (124) et (125) pour calculer les nouvelles matrices améliorées de masse et de rigidité.

4.4 Synthèse de la matrice d'amortissement C

Les difficultés d'identification de la matrice C proviennent du fait que l'interprétation physique de ses éléments n'est pas claire. L'article de référence (5.4) discute de tous les aspects pertinents de l'amortissement dans l'industrie aérospatiale. Dans cet article tous les aspects physiques, numériques et expérimentaux sont présentés.

Les matrices d'amortissement synthétisées par les méthodes d'identification directe doivent être considérées uniquement comme un modèle numérique capable de simuler le comportement dynamique de la structure. La matrice C est entièrement remplie et ne peut pas être diagonalisée par les modes normaux. Soit,

$$\Phi^T C \Phi = [d_{ij}]$$

De nombreux auteurs (H.3, S.4, C.5) ont montré que l'influence du couplage inter-mode d_{ij}, pour $i \neq j$, est très petite et peut être négligée. Dans le cas de modes très rapprochés, on peut tenir compte du couplage amorti de chaque mode (i) et du mode voisin (j) en ajoutant les deux éléments d_{ij} et d_{ji} seulement, et en négligeant tous les autres éléments situés hors de la diagonale. Les résultats expérimentaux (D.1) ont confirmé la validité de cette simplification. Grant (G.6) recommande de remplacer la matrice complète C par une bande-matrice avec une largeur de bande égale ou inférieure à la largeur de bande des matrices de rigidité ou de masse utilisant une technique de compression.

On peut classer les procédés d'identification directe pour synthétiser les matrices d'amortissement en trois catégories:

i) procédés basés sur les données des modes normaux
ii) procédés basés sur les données des modes normaux forcés
iii) procédés basés sur les données des modes normaux amortis.

i) Procédés basés sur les données des modes normaux

Les paramètres modaux expérimentaux requis sont Ω_r, ζ_r et m_r. De l'équation (43), on tire

$$\Phi^T C \Phi = [\text{diag. } 2 \zeta_r m_r \Omega_r]. \tag{128}$$

Des équations (123) et (128), on a

$$\begin{aligned} C &= M \Phi_{nor} [\text{diag. } 2 m_r \Omega_r \zeta_r] \Phi_{nor}^T M, \\ &= M \Phi [\text{diag } 2 \Omega_r \zeta_r] \Phi^T M. \end{aligned} \tag{129}$$

ii) Procédés basés sur les modes normaux forcés

Ces procédés sont basés sur les procédés d'excitation multi-force, basés sur l'art. 2.3.4. D'après l'équation (76), on a,

$$F_r = [\text{diag} \frac{1}{\sin\theta_r}][C \omega] \phi_r^f$$

Si $\omega = \Omega_r$, le $r^{\text{ième}}$ mode normal ϕ_r est excité par F_r pour $\theta_r = \frac{\Pi}{2}$. Aussi, si on connaît ϕ_r, F_r et Ω_r, on a

$$F_r = C \Omega_r \phi_r. \tag{130}$$

Une des façons pour obtenir C à partir de l'équation (130) est,

$$[F_1 .. F_r .. F_n] = C[\Phi][\text{diag } \Omega_r]$$

$$C = [F_r] [\Phi]^T [\text{diag. } \frac{1}{\Omega_r}] \tag{131}$$

Coupry (C.5) parle des difficultés et des erreurs qui résultent de cette méthode en raison de la difficulté à obtenir F_r.

iii) Procédés basés sur les données des modes forcés

On part de l'hypothèse que la matrice d'amortissement est une bande-matrice. Les termes en dehors de la diagonale traduisent les effets des modes du voisinage immédiat. Hasselman a montré que ces termes sont significatifs uniquement pour les modes très rapprochés. Dans le chapitre 3, on présente le procédé proposé par Hasselman (H.3) pour calculer ces termes. Béliveau (B.4) a proposé une méthode basée sur des informations sur l'amplitude et le déphasage du mode.

Coupry (C.5) a suggéré un autre procédé basé sur la minimisation de la différence entre la réponse mesurée en un point, lorsque la structure est excitée à une fréquence $\omega = \Omega_r$, et la réponse calculée en superposant la contribution due au mode r et (r + 1) dans laquelle apparaissent le terme diagonal d_{rr} et le terme hors de la diagonale $d_{r\ r+1}$ de l'amortissement. Si $d_{rr} = 2\ \zeta_r\ m_r\ \Omega_r$, alors $d_{r\ r+1}$ peut être identifié.

4.5 Limites de la méthode d'identification directe

Cette méthode ne redresse pas les erreurs inévitables dans les valeurs des paramètres modaux. Les valeurs mesurées, obtenues au moyen des techniques décrites dans le chapitre 3, contiennent des erreurs en raison de la difficulté à séparer les modes dans les procédés à forces cycliques ou de la difficulté à ajuster les forces d'excitation dans les procédés multi-force. La méthode d'identification directe permet donc de synthétiser un modèle structural aussi précis que les données expérimentales.

Dans les chapitres suivants, on présente un certain nombre de méthodes qui partent de matrices de masse et de rigidité analytiques (chapitre 5) et modifient à la fois le modèle analytique et les paramètres modaux mesurés

pour arriver à une estimation optimale de M et K (chapitre 5). Cette approche réaliste tient compte des erreurs possibles dans les paramètres modaux en raison des limitations de mesure.

CHAPITRE 5

TECHNIQUE D'IDENTIFICATION PAR ITÉRATIONS

Cette technique compare les données d'essai aux prédictions analytiques. Si elles ne concordent pas, on fait des changements dans l'analyse et on recommence le procédé. La réussite de la méthode dépend de la question de savoir comment évaluer et juger la comparaison analyse-test. On doit établir pour cela quelques critères arbitraires de comparaison. Cette technique demande typiquement les choses suivantes:

1. développer un modèle numérique pour identifier les estimations initiales des paramètres structuraux;
2. définir des critères de comparaison et un algorithme pour modifier les estimations.

5.1 Modèle numérique

Le modèle numérique est 'à priori' un modèle mathématique dérivé des principes généraux de dynamique structurale. Le but primordial de l'analyste est de synthétiser un modèle d'ordre supérieur suffisant pour mettre en évidence les éléments-clés de la structure. A la base, la structure est représentée par des équations différentielles partielles qu'on veut discrétiser par rapport à un nombre fini de fonctions de déplacement multipliées par des coordonnées généralisées. On peut utiliser diverses fonctions comme dans les procédés de Galerkin, Rayleigh-Ritz, mais Ross (R.2) soutient qu'on peut conserver certaine signification physique dans les matrices M et K en utilisant des méthodes d'éléments finis. Dans ce cas, les coordonnées généralisées

représentent la réponse en amplitude de régions bien localisées de la structure. En théorie, on peut construire la matrice d'amortissement C en utilisant les méthodes d'éléments finis, mais en pratique, les données d'amortissement présentent une grande dispersion (D.1, O.1). On ne peut donc obtenir les estimations initiales de M et K que par les éléments finis et l'amortissement structural est exprimé en termes d'amortissement modal.

5.2 Caractéristiques significations de K et M.

Ross (R.2) et Berman (B.6) soulignent les caractéristiques qu'on tient absolument à préserver en synthétisant les matrices M et K et qu'on peut traiter en développant l'algorithme d'identification. On en conclut que l'apparence extérieure de la matrice de flexibilité K^{-1} est importante. Cette matrice est exprimée par la matrice du coefficient d'influence statique et est reliée aux paramètres modaux par la relation suivante,

$$K^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Omega_i^2 m_i} \phi_i \phi_i^T, \qquad \zeta_i = 0 \tag{140}$$

Les termes dominants de K^{-1} viennent des modes de basse fréquence qui contribuent de façon significative à la réponse dynamique mesurée de la structure tandis que la matrice de rigidité,

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Omega_i^2}{m_i} M \phi_i \phi_i^T M \tag{141}$$

est dominée par les modes de hautes fréquences, et par conséquent, pour que le choix de la matrice de rigidité K soit acceptable, il faut qu'il préserve l'apparence extérieure de K^{-1} et qu'il préserve l'énergie de déformation dans la structure par l'intermédiaire des vecteurs propres de K les plus bas.

L'autre caractéristique significative est l'auto-compatibilité des modes mesurés par l'intermédiaire des caractéristiques d'orthogonalité par rapport aux estimations de M et de K. Les méthodes d'identification proposées dans ce chapitre sont basées sur des critères satisfaisant ces conditions.

5.3 Correction des matrices de masse et de rigidité

Soit trois systèmes de données:

1. une matrice analytique de masse $\tilde{M}_{nxn}$
2. une matrice analytique de rigidité $\tilde{K}_{nxn}$
3. un système incomplet de modes mesurés.

Si on pose que l'un quelconque de ces systèmes est exact, il est possible de corriger les deux autres pour arriver au modèle. Targoff (T.1) part de l'hypothèse que c'est la matrice de masse qui est correcte, et modifie les modes mesurés pour obtenir l'orthogonalité, alors que Berman (B.6, B.9) part de l'hypothèse contraire. Il utilise les multiplicateurs de Lagrange et la dérivation pour affiner la matrice de masse de la façon suivante:

soit ΔM la variation à apporter à M pour satisfaire;

$$\Phi^T_{nxm} [\tilde{M} + \Delta M] \Phi = I \quad \text{(matrice identité)} \tag{142}$$

Si chaque mode ϕ_i est normalisé, de telle sorte que

$$\phi_i^T M \phi_i = 1$$

alors

$$\Phi^T \Delta M \Phi = I - [\Phi^T \tilde{M} \Phi] \tag{143}$$

= matrice avec zéro sur la diagonale

Il existe une infinité de matrices ΔM qui satisfont la relation ci-dessus. Bergan (B.6) a proposé de minimiser la fonction

$$\epsilon = \| \tilde{M}^{-\frac{1}{2}} \Delta M \, \tilde{M}^{-\frac{1}{2}} \| \tag{144}$$

sujette à l'équation de contrainte .

Le Lagrangien est:

$$\psi = \epsilon + \sum \sum \lambda_{ij} \left(\Phi^T \Delta M \, \Phi - I + [m] \right)_{ij}$$

Cela donne,

$$\Delta M = M \Phi \, [m]^{-1} [I - [m]] [m]^{-1} \Phi^T \tilde{M} \tag{145}$$

où

$$[m] = [\Phi^T M \Phi]$$

La masse corrigé M est égale à M + ΔM. On utilise un procédé semblable pour corriger la matrice de rigidité (B-10, W-2), en minimisant la fonction

$$\gamma = \frac{1}{2} \| M^{-\frac{1}{2}} (K - \tilde{K}) \, M^{-\frac{1}{2}} \|, \tag{146}$$

où K est la matrice de rigidité cherchée. Les contraintes sont

$$K \, \Phi = M \, \Phi \, \Omega^2$$

$$K = K^T$$

Le Lagrangien est

$$\psi = \gamma + \sum \sum \lambda_{ij} [K\Phi - M\Phi\Omega^2]_{ij} + \sum \sum \beta_{ij} (k_{ij} - k_{ji})$$

La solution est donnée par

$$K = \tilde{K} - \tilde{K}\Phi\Phi^T M - M\Phi\Phi^T K + M\Phi\Omega^2\Phi^T M + M\Phi\Phi^T\tilde{K}\Phi\Phi^T M. \tag{147}$$

5.4 Matrice d'amortissement dans le modèle numérique

Plusieurs techniques d'analyse conviennent pour inclure les effets d'amortissement structural dans le modèle d'éléments finis. Les différentes conséquences de l'utilisation de certaines expressions d'amortissement largement utilisées sont examinées dans un article de R.F. Balducci et incluses dans la référence (5.4). On doit souligner que les modèles d'amortissement numériques sont des valeurs numériques dont le seul but est de simuler le comportement dynamique de la structure et qui ont encore besoin d'être déterminées d'après les observations:

pour l'amortissement proportionnel de Rayleigh, la matrice C a la forme

$$C = \alpha M + \beta K$$

Cette équation implique physiquement que le phénomène d'amortissement doit être le même pour tous les éléments du modèle. Une forme équivalente de l'équation ci-dessus convenant par une solution par superposition des modes est donnée par:

$$M^{-1} C = \sum_{i=0}^{n} a_i \, (M^{-1} K)_i$$

où les a_i sont des constantes arbitraires et n est le nombre total de degrés de liberté du modèle par éléments finis. On peut obtenir les valeurs numériques des constantes en comparant les valeurs numériques de l'impédance mécanique avec les résultats expérimentaux.

Caravani (C.1) a suggéré une technique numérique qui identifie de façon optimale les coefficients d'amortissement de la matrice (C) en la supposant tridiagonale et symétrique. D'après l'équation (63) du chapitre 2, la réponse complète du système s'écrit,

$$[K - M \omega^2 + j \omega C] X = F$$

En posant que les vecteurs de réponse mesurés $\overline{X}$ sont affectés d'une erreur nulle, on cherche ceux des coefficients d'amortissement qui minimisent la mesure de la différence $X - \overline{X}_M$ dans la plage de fréquences qui nous intéresse. On propose un processus d'itération dans lequel on calcule à chaque pas les valeurs et amortissement minimisant la fonction

$$L_k = \sum [X_{i,k} - \overline{X}_i]^T W_1 [X_{i,k} - \overline{X}_i] + (d_k - d_0)^T W_2 (d_k - d_0),$$

où W_1 et W_2 sont des fonctions de pondération, et d est un vecteur contenant tous les éléments de la matrice d'amortissement.

5.5 Programme d'éléments finis pour l'Astromast

On donne dans l'appendice 1 un algorithme d'éléments finis applicable à l'Astromast. Le modèle numérique est utilisé plus loin dans les techniques d'identification présentées dans la référence (6). Ces techniques diffèrent des techniques décrites dans ce chapitre du fait qu'elles sont basées sur une analyse statistique.

CHAPITRE 6

IDENTIFICATION STATISTIQUE: ESTIMATION DES PARAMÈTRES

6.1 Introduction

Les deux procédés d'identification présentés dans les chapitres 4 et 5 sont des méthodes directes basées sur des valeurs expérimentales (chapitre 4) déterminées à l'aide des valeurs initiales des paramètres structuraux (chapitre 5). La matrice stochastique du processus experimental et les propriétés statistiques des paramètres modaux ne sont pas prises en considération.

Dans ce chapitre, la discussion porte sur l'utilisation de la théorie d'estimation permettant d'obtenir des estimateurs non faussés avec une variance minimale des paramètres modaux et structuraux. D'autres applications importantes de la théorie d'estimation sont pratiquées dans les systèmes de contrôle et de communication (V.1) et l'extension des applications au processus d'identification devient partie intégrante du processus de contrôle total du système. Des ouvrages récents de Sage (S.1) et Groupe (G.5) ont combiné un grand nombre de méthodes étudiées et les ont présentées de façon pratique. Ils traduisent l'intérêt nouveau manifesté actuellement dans ce problème épineux.

6.2 Théorie d'estimation

La théorie d'estimation est une branche de probabilités et de statistiques en rapport avec toute l'information dérivant des propriétés des variables aléatoires, des processus stochastiques et des systèmes basés sur l'observation d'échantillons. Les propriétés statistiques des variables sont en général supposées obéir à une distribution Gaussienne et à tout ce que cela implique,

et les covariantes sont connues ou fixées par hypothèse. Les trois approches fondamentales utilisées pour l'estimation sont,

i) la méthode des moindres carrés

ii) la méthode du maximum de vraisemblance

iii) la méthode de Bayes

On rappelle brièvement dans ce qui suit les principes de base de chaque méthode.

6.2.1 Estimation par les moindres carrés

Une forme commune de moindres carrés concerne le lissage d'un polynôme à des points expérimentaux. En général, le problème consiste en une combinaison linéaire de paramètres inconnus,

$$Y = A\,x\ , \tag{150}$$

et on veut connaître la $\hat{x}$ qui minimise les erreurs pour les points observés donnés par Y, où,

$$\tilde{Y} = A\,\hat{x} + e$$

On exprime alors le problème sous forme d'optimisation d'une fonction scalaire J, où

$$J = e^T\,W e\ , \tag{151}$$

et W est une fonction de pondération.

Dans les méthodes classiques de moindres carrés, la fonction de pondération (ou poids) est

$$W = I \quad \text{(matrice identité)}$$

On applique les règles de différenciation pour obtenir le minimum de (151),

$$\nabla_x J = 0 = -2A^T W \tilde{Y} + 2A^T W A \hat{x}\ ,$$

et,

$$\hat{x} = [A^T\,W\,A]^{-1}\,A^T\,W\,\tilde{Y} \tag{152}$$

Cette équation est appelée équation normale pondérée des moindres carrés.

Pour de nombreux systèmes physiques, l'équation (150) est une équation non linéaire, de la forme

$$Y = F(x) \tag{153}$$

La fonction à minimiser est la même que (151),

$$J = e^T W e$$

$$e = \tilde{Y} - F(x) \tag{154}$$

Dans la plupart des problèmes rencontrés en pratique, J ne peut pas être minimisé directement en appliquant les calculs classiques à l'équation (154).

La technique standard utilisée dans ce cas est la linéarisation du problème non linéaire, en développant la solution autour d'une valeur locale et en procédant ensuite par itérations pour converger sur la solution cherchée. On peut appliquer la linéarisation soit à l'équation (153), soit à l'équation (154). On développe dans la suite deux méthodes basées chacune sur l'une des deux possibilités:

i) <u>Méthode de correction différentielle</u> (ou méthode Newton-Raphson modifiée)

Jankins (J.1) décrit une technique basée sur le développement de Taylor de l'équation (153). Soit X_c la valeur estimée de X à la $c^{\text{ième}}$ itération, et,

$$\tilde{Y}_c = F(x)\Big|_{x = x_c}$$

La valeur de cette fonction quand $X = X_c + \Delta X$ est donnée d'après le développement de Taylor par,

$$\tilde{Y} = F(x)\Big|_{x = x_c} + \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x = x_c} \Delta X$$

Ainsi,

$$\left[\tilde{Y} - \tilde{Y}_c\right] = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x = x_c} \Delta x,$$

$$\Delta Y = A \quad \Delta x \tag{155}$$

où $\bar{A}$ = matrice m x n des dérivées partielles calculées à partir de X_c.

L'équation (155) est exprimée sous la forme standard de l'équation (150). L'équation d'optimisation est donc,

$$J' = [\Delta Y - \bar{A}\Delta x]^T W [\Delta Y - \bar{A}\Delta x] \tag{156}$$

En appliquant la même règle de calcul que précédemment, on obtient l'équation normale (équivalente à l'équation 152),

$$\Delta x = [\bar{A}^T W \bar{A}]^{-1} \bar{A}^T W \Delta Y, \tag{157}$$

On se sert alors de l'équation (156) pour obtenir la nouvelle position $X_c' = X_c + \Delta x$ et on poursuit l'itération jusqu'à obtention de la convergence. L'équation (157) peut être écrite sous d'autres formes. La forme suivante est plus facile à appliquer,

$$\begin{aligned} [\bar{A}^T W \bar{A}]\,\Delta x &= \{\bar{A}^T W \Delta Y\} \\ [c]\;\Delta x &= \{b\} \end{aligned} \tag{158}$$

Un élément quelconque du vecteur b s'écrit,

$$b_k = \left\{\frac{\partial F}{\partial x_k}\right\}^T W \{\tilde{Y} - F\} \tag{159}$$

et un élément quelconque de la matrice [C] s'écrit,

$$c_{k\ell} = \left\{\frac{\partial F}{\partial x_k}\right\}^T W \left\{\frac{\partial F}{\partial x_\ell}\right\} \tag{160}$$

ii) <u>Méthode de Newton-Raphson</u>

Dans cette technique, on fait un développement de Taylor de la fonction scalaire J de l'équation (154) autour de la valeur estimée (X_c)

$$J(x) = J(x_c) + \left[\frac{\partial J}{\partial x}\right]^T_{x=x_c} \Delta x + \frac{1}{2}\{\Delta x\}^T \left[\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\right]_{x=x_c} \{\Delta x\} \tag{161}$$

et $\Delta X = X - X_c$

Pour minimiser la forme scalaire telle que formulée dans l'équation (161) on dérive par rapport à ΔX. On a ainsi pour chaque élément ΔX_k du vecteur ΔX

$$\frac{\partial J(x)}{\partial \Delta x_k} = \left[\frac{\partial J(x)}{\partial x}\right]^T_{x=x_c} \left\{\frac{\partial \Delta x}{\partial \Delta x_k}\right\} + \left\{\frac{\partial \Delta x}{\partial \Delta x_k}\right\}^T \left[\frac{\partial^2 J(x)}{\partial x \partial x}\right]_{x=x_c} \{\Delta x\} = 0$$

Comme $\{\partial \Delta x / \partial \Delta x_k\}$ est un vecteur ayant la valeur 1 comme $k^{\text{ième}}$ composante et zéro partout ailleurs, on a,

$$\left\{\frac{\partial J(x)}{\partial x_k}\right\} + \left\{\frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_k \partial x}\right\}^T (\Delta x) = 0 \tag{162}$$

où, $\left\{\frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_k \partial x}\right\}$ est la $k^{\text{ième}}$ ligne de la matrice symétrique $[c] = \left[\frac{\partial^2 J(x)}{\partial x \partial x}\right]$

Cette matrice symétrique a des éléments de la forme (en utilisant 154),

$$c_{k\ell} = \left\{\frac{\partial F}{\partial x_k}\right\}^T W \left\{\frac{\partial F}{\partial x_k}\right\} - \left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_k}\right\}^T W \{\tilde{Y} - F\} \tag{163}$$

Le vecteur $\{b\} = \frac{\partial J(x)}{\partial x_k}$ a des composantes de la forme,

$$b_k = \left\{\frac{\partial F}{\partial x_k}\right\}^T W \{\tilde{Y} - F\}. \tag{164}$$

L'équation (162) peut s'écrire,

$$[c] \; \Delta x = \{b\} \tag{165}$$

Les équations (165), (164) et (163) sont les mêmes que les équations (158), (159), (160), à l'exception du terme différentiel du second ordre dans l'équation (153).

Le processus d'itération est le même que précédemment.

6.2.2 Estimation par le maximum de vraisemblance

Cette méthode est essentiellement une méthode de moindres carrés avec des critères de variance minimale. La matrice de pondération W est définie dans ce cas comme l'inverse de la matrice de covariance de l'erreur observée. Dans le

cas du problème linéaire $Y = \bar{A}\,X$, le modèle d'observation linéaire est

$$\tilde{Y} = \bar{A}\,X + V_y \tag{166}$$

et $\Lambda_{YY} = E(V_y V_y^T)$ est une matrice de covariance d'erreur observée connue.

Le critère de détermination de X est le critère de variance minimum entre la valeur estimée et la valeur vraie, et la fonction scalaire J à minimiser est donc,

$$J = E\{x - \hat{x}\}^2 \tag{167}$$

Selon la théorie de filtre de Gauss-Markov, l'estimateur de variance minimum est identique à l'estimateur X de l'équation (151) pour les moindes carrés, où W est l'inverse de la matrice Λ_{YY}, de sorte que,

$$\hat{x} = [\bar{A}^T \Lambda_{YY}^{-1} \bar{A}]^{-1} \bar{A}^T \Lambda_{YY}^{-1} \tilde{Y}. \tag{168}$$

Le principe peut être étendu au cas d'un problème non linéaire en utilisant la "méthode de correction différentielle séquentielle", ou méthode de Newton-Raphson.

$$\tilde{Y} = F(X)\ ,$$

A chaque pas d'itération, on a

$$\Delta x = [\bar{A}^T \Lambda_{YY}^{-1} \bar{A}]^{-1} \bar{A}^T \Lambda_{YY}^{-1}\ \Delta Y_c. \tag{169}$$

où

$$A = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] \tag{170}$$

6.2.3 Estimation de Bayes

Dans cette méthode, la fonction scalaire à optimiser prend la forme suivante,

$$J = e^T W_D\, e \quad + (x^\circ - x)^T W_P\, (x^\circ - x) \tag{172}$$

où X^0 représente l'estimation initiale des variables d'état et W_D et W_E sont les fonctions de pondération.

Dans le cas de fonction non linéaire,

$$Y = F(X)$$

Les équations normales (158), (159) et (160) prennent la forme suivante,

$$[c] \quad \Delta x \quad = \{b\}, \tag{173}$$

$$b_k = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\}^T W_D \left\{ \tilde{Y} - F \right\} + \left\{ \frac{\partial x}{\partial x_k} \right\}^T W_p \left\{ x^0 - x \right\},$$

$$c_{k\ell} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\}^T W_D \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_\ell} \right\} + \left\{ \frac{\partial x}{\partial x_k} \right\}^T W_p \left\{ \frac{\partial x}{\partial x_\ell} \right\}.$$

Le processus d'itération est toujours le même que précédemment.

6.3 Application aux systèmes dynamiques

L'application des méthodes statistiques aux systèmes dynamiques a été débattue par de nombreux auteurs (C.6, T.3). En référence (T.3), tous les travaux effectués sur l'application de la méthode aux systèmes dynamiques jusqu'en 1975 sont passés en revue.

6.3.1 Equations de base

La théorie d'estimation est appliquée aux problèmes dynamiques de la façon suivante:

Y = vecteur des valeurs observées des paramètres modaux obtenus à partir des résultats expérimentaux

$$= \left[\lambda_1 \; \lambda_2 \cdots \lambda_n , \phi_{11} , \phi_{12} , \cdots \phi_{ij} , \cdots \phi_{nn} \right] \tag{174}$$

X = vecteur des paramètres contenant les éléments des matrices de masse et de rigidité;

$$= \{m_{11}, m_{12}, \ldots, k_{11}, k_{12}, \ldots k_{nn}\} \tag{175}$$

X^0 = valeurs initiales obtenues à partir du modèle d'éléments finis.

La méthode d'estimation de Bayes est utilisée pour l'algorithme préconisé,

$$Y = F(x)$$

$$J = \{\tilde{Y} - F(x)\}^T W_D \{\tilde{Y} - F(x)\} + (x^0 - \hat{x})^T W_p (x^0 - \tilde{x}).$$

Les équations normales sont telles que décrites par l'équation (173). En utilisant les équations (174) et (175), les équations normales sont,

$$[c] \; \Delta \tilde{x} = \{b\} \tag{176}$$

$$\{b\} = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_k}\right]^T W_{D\lambda} \{\tilde{\lambda} - \lambda\} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right]^T W_{D\phi} \{\tilde{\phi} - \phi\}$$

$$+ W_p \{x^0 - x\}$$

$$[c] = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right]^T W_{D\lambda} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]^T W_{D\phi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}\right] + [W_p]$$

Les matrices de pondération $W_{D\lambda}$, $W_{D\phi}$ et W_p sont les matrices inverses des matrices de covariance de l'erreur observée. Si les observations ne sont pas correlées, chaque matrice de covariance devient une matrice diagonale comportant les variances correspondantes σ^2 sur la diagonale.

6.3.2 Sensibilité des paramètres

Pour appliquer l'équation (176), on a besoin des dérivées des composantes du vecteur Y par rapport aux composantes du vecteur X. Les dérivées représentent la sensibilité des paramètres modaux à tout changement dans les paramètres structuraux. Plusieurs publications discutent et développent les expressions mathématiques pour différentes valeurs de sensibilité (C.6, V.2, N.2, C.2, F.6). On développe les formules de base dans ce qui suit.

6.3.3 Expressions de sensibilité des valeurs propres

L'équation à résoudre dans ce problème est,

$$[K - \lambda_i M]\,\phi_i = 0, \tag{177}$$

où λ_i et ϕ_i sont les valeurs et vecteurs propres, dépendant des paramètres de masse et de rigidité. En multipliant à gauche l'équation ci-dessous par ϕ_i^T, on a

$$\phi_i^T\,[K - \lambda_i M]\,\phi_i = 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &d\phi_i^T\,[K - \lambda_i M]\,\phi_i + \phi_i\,[K - \lambda_i M]\,d\phi_i \\ &+ \phi_i^T\,[dK - \lambda_i\,dM - d\lambda_i\,M]\,\phi_i = 0 \end{aligned} \tag{178}$$

Les deux premiers termes de (178) sont nuls de sorte que,

$$\begin{aligned} d\lambda_i &= \frac{\phi_i^T dK\,\phi_i - \lambda_i\,\phi_i^T M\,\phi_i}{\phi_i^T M\,\phi_i} \\ &= \frac{1}{m_i}\left[\phi_i^T dK\,\phi_i - \lambda_i\,\phi_i^T dM\,\phi_i\right]. \end{aligned} \tag{179}$$

La masse généralisée peut de plus être normalisée. On tire donc finalement de (179),

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{rs}} = \frac{1}{m_i}\,\phi_{ri}\,\phi_{si} \quad , \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial m_{rs}} = -\frac{\lambda_i}{m_i}\,\phi_{ri}\,\phi_{si} \tag{180}$$

6.3.4 Expressions de sensibilité des vecteurs propres

Pour la variation des vecteurs propres, on dérive l'équation (177), soit

$$[K - \lambda_i M]\, d\phi_i = -[dK - \lambda_i\, dM - d\lambda_i\, M]\,\phi_i \tag{181}$$

Comme $|K - \lambda_i M| = 0$, la matrice $[K - \lambda_i M]$ ne peut pas être inversée. Il est possible néanmoins de tirer une équation de cette matrice, par exemple, la dernière rangée, de calculer $d\,\phi_{ni}$ en fonction des $(n-1)\ d\,\phi_{ji}$ restants et de récrire l'équation (180) avec une matrice $(n-1) \times (n-1)$ et $(n-1)\ d\,\phi_{ji}$ en premier membre. L'équation modifiée peut alors être inversée pour trouver les $(n-1)\ d\,\phi_{ji}$ qui, réinjectés dans la première équation, permettent de trouver le dernier $d\,\phi_{ni}$.

D'autres solutions ont été proposées pour lever la singularité (C.6). Une des méthodes requiert une matrice modale entièrement remplie et n'est donc pas d'utilisation souhaitable pour les gros problèmes (T.3). Une autre méthode exprime les dérivées du déplacement de la façon suivante (C.6).

$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial k_{rs}} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\phi_{i\ell}\,\phi_{r\ell}\,\phi_{sj}}{(\lambda_j - \lambda_\ell)}\,(1 - \delta_{ij})$$

$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial m_{rs}} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(\delta_{ij} - 1)\,\lambda_j\,\phi_{i\ell}\,\phi_{r\ell}\,\phi_{sj}}{(\lambda_j - \lambda_\ell)} - \frac{\phi_{i\ell}\,\phi_{r\ell}\,\phi_{sj}}{2}\,\delta_{ij} \tag{182}$$

où $\delta_{ij} = 1 \qquad i = j$

$\qquad\quad = 0 \qquad i \neq j$

Un petit nombre de termes suffit dans la sommation de l'équation (182) pour obtenir la convergence.

Récemment une méthode basée uniquement sur la connaissance de certaines valeurs propres particulières et des vecteurs propres correspondants a grandement simplifié le calcul du vecteur propre de sensibilité (N.4). L'équation (181) est essentiellement complétée par une équation additionnelle de normalisation. Par exemple, l'un des éléments du vecteur propre ϕ_{mi} peut être supposé constant, et conduit ainsi à l'équation additionnelle

$$d\,\phi_{mi} = 0 \tag{183}$$

qui, lorsqu'elle est multipliée par un scalaire pur afin d'assurer la non-singularité de l'équation (181), conduit à l'équation (181) avec une valeur additionnelle de l'élément diagonal de la matrice. Cela conserve donc les caractéristiques spécifiques des équations du système, telles que la symétrie, la dispersion et la structure en bande.

6.3.5 Sensibilité de la réponse en fréquence

Le vecteur d'observation de l'équation (184) contient les valeurs propres et vecteurs propres. Les estimations initiales de ces derniers sont quelquefois difficiles à déduire des résultats expérimentaux (chapitre 3). On peut alors remplacer ces observations par d'autres obtenus directement des mesures, telles que la fonction de transfert donnée par l'équation (55). On peut néanmoins exprimer la fonction de transfert en fonction de l'impédance à partir des équations (1), (44), (45) et d'amortissement nul, d'où:

$$[K - \omega^2 M]\,X = F \tag{184}$$

$$X = HF$$

$$H = [K - \omega^2 M]^{-1} \tag{185}$$

La sensibilité de cette quantité découle immédiatement de (185)

$$d[H] = -[H][dK - \omega^2 dM - d\omega^2 M][H] \tag{186}$$

On tire de cette information l'amplitude de |H| et le déphasage. La sensibilité de ces quantités s'écrit ( ),

$$d|H| = \frac{1}{|H|} \text{Real } H^* dH$$

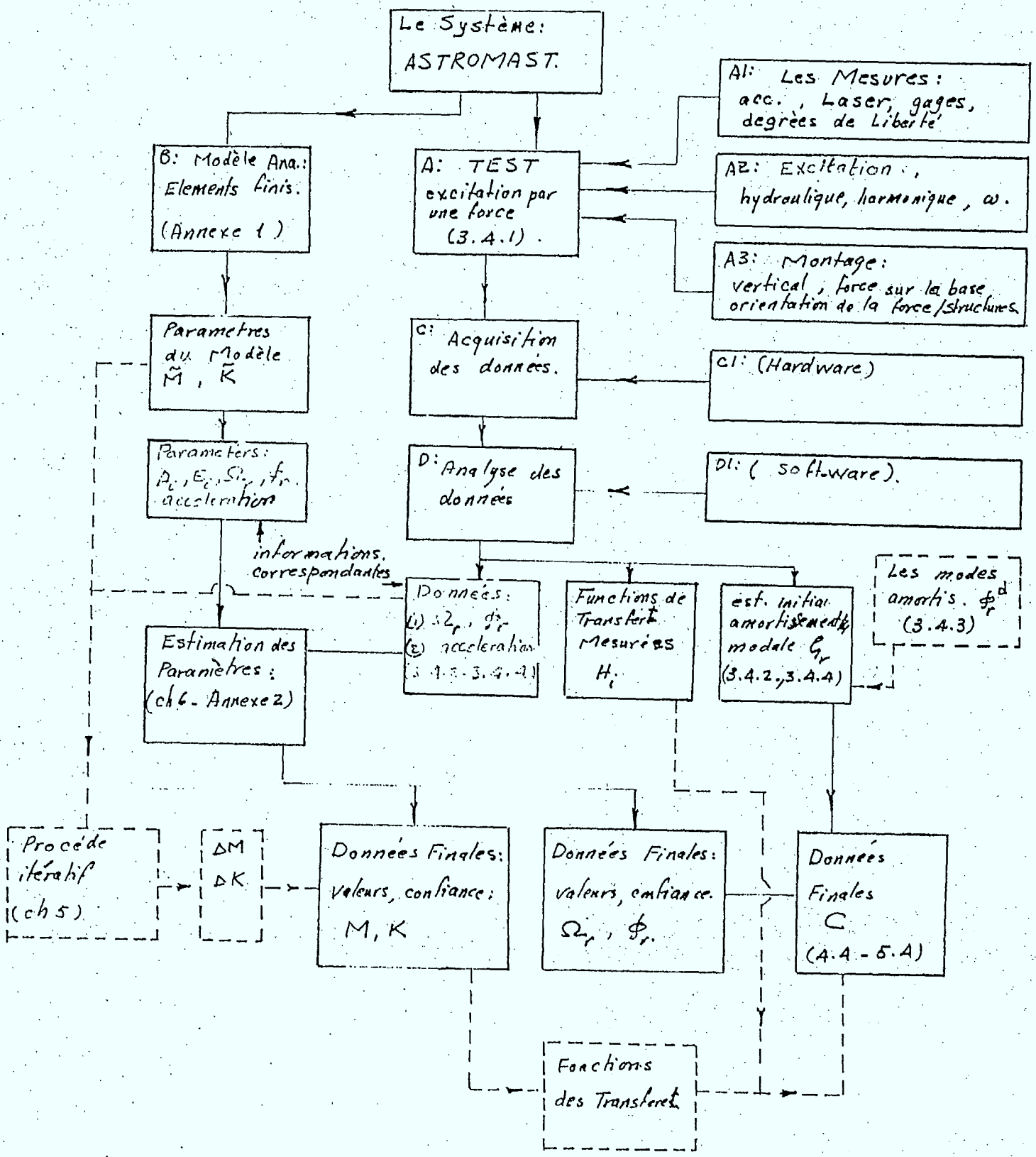
$$d\theta = \frac{1}{|H|} \text{Img. } H^* dH.$$

Conclusion et recommandations

L'organigramme ci-joint présente les recommandations générales des auteurs quant au déroulement du programme d'essai envisagé pour l'Astromast. A partir des données de départ obtenues lors des essais expérimentaux et par un programme d'éléments finis, les paramètres du système sont finalisés à l'aide d'une technique d'identification statistique.

Les segments de droites et les blocs représentés en trais hachurés sur l'organigramme illustrent des approches alternatives que les auteurs envisagent d'utiliser en vue d'une validation des résultats. Ces cheminements complémentent ceux représentés en traits pleins mais ne sont pas indispensables. Chacune des étapes indiquées dans l'organigramme est également identifiée par un code numérique référant à la section appropriée du texte principal.

Cet organigramme présente certaines recommandations préliminaires qui pourront être modifiées par la suite en fonction de la disponibilité du matériel expérimental et des facilités de calcul.


Le Système: ASTROMAST.
A1: Les Mesures: acc., Laser, gages, degrées de Liberté
B: Modèle Ana.: Elements finis. (Annexe 1)
A: TEST excitation par une force (3.4.1).
A2: Excitation: hydraulique, harmonique, ω.
A3: Montage: vertical, force sur la base orientation de la force/structures
Parametres du Modèle M̃, K̃
C: Acquisition des données.
C1: (Hardware)
Parametres: A_i, E_i, Ω_r, f_r, acceleration
D: Analyse des données
D1: (software).
informations correspondantes
Données: (i) Ω_r, ϕ_r (2) acceleration (3.4.3-3.4.4)
Fonctions de Transfert Mesurées H_i
est. initial amortissement modale ζ_r (3.4.2, 3.4.4)
Les modes amortis. ϕ_r^d (3.4.3)
Estimation des Paramètres: (ch 6 - Annexe 2)
Procédé itératif (ch 5)
ΔM ΔK
Données Finales: valeurs, confiance: M, K
Données Finales: valeurs, confiance. Ω_r, ϕ_r.
Données Finales C (4.4 - 5.4)
Fonctions des Transferet

ANNEXE 1

MODÈLES STRUCTURAUX POUR L'ASTROMAST (Eléments finis)

1. Caractéristiques

Les modèles mathématiques pour fin de simulation du comportement dynamique de la structure en question sont déterminés à partir de valeurs données de paramètres critiques et certaines hypothèses quant au comportement. Les paramètres sont assumés au tableau 1. En particulier, la hauteur totale sur cinquante-quatre niveaux est de trois cent sept pouces et son poids est égal à quinze centième de livre par pied de longueur. Le diamètre du cercle qui contient les trois noeuds est neuf pouces, et la tour tourne un angle total de cent vingt degrés sur sa hauteur pour diminuer les effets d'expansion thermique en espace (ASTRO-ARC-B-004)

La longueur entre les connexions d'un même niveau, "a", est prise selon un diagramme fourni par DOC. Le module d'élasticité est calculé à partir d'informations tirées du document ARC-B-004 et est supposé identique pour tous les membres, longerons et cordes avec une aire circulaire et les poteaux avec une surface rectangulaire.

Dans l'analyse structurale, l'effet de la dissipation d'énergie est négligée ainsi que celle de la gravité sur le comportement dynamique. Les propriétés sont supposées uniformes pour le modèle continu, et identique à chaque niveau pour les modèles discrets. Il est supposé que les matériaux se comportent de manière élastique et linéaire, avec celui des longerons parfaitement bilinéaires, la deuxième partie ayant une pente nulle. Seule

l'énergie axiale est considérée comme importante, mais par contre, d'autres modèles comprenant l'énergie de flexion, de torsion et de cisaillement dans les colonnes, pourront être étudiés. On suppose que les longerons demeurent dans le domaine post-critique de flambage, de sorte que les cordes sont toujours en traction, ce qui permet d'enlever les longerons dans l'analyse.

TABLEAU 1

CARACTÉRISTIQUES DE L'ASTROMAST

Paramètres	Symbole	Valeur	Unités
Nombre de niveaux	n	54	-
Rayon d'encerclement	r	9	pouces
Hauteur totale	H	307	pouces
Hauteur d'un niveau	h	5.685	pouces
Rotation antihoraire sur la hauteur	Φ	-120	degrés
Rotation antihoraire d'un niveau	ϕ	-2.222	degrés
Poids total	W	3.8375	livres
Masse par unité de longueur	ρ	$.3237 \times 10^{-4}$	$lb\text{-}sec^2/po^2$
Masse de chaque niveau	m	$.184 \times 10^{-3}$	$lb\text{-}sec^2/po$
Moment d'inertie massique de chaque étage	I	.003713	$lb\text{-}sec^2/po$
Longueur libre des longerons	a	7.781	pouces
Rigidité du mât	EI_m	3×10^6	$lb\text{-}po^2$
Moment d'inertie du mât	I_m	.4117	po^4
Module d'élasticité	E	7.287×10^6	lb/po^2
Aires des poteaux rectangulaires (.1X.136)	A_p	.0136	po^2
Diamètre des cordes	D_c	.033	pouces
Diamètre des longerons	D_ℓ	.096	pouces
Charge critique d'Euler des longerons	P_ℓ	4.95	livres
Rigidité axiale des poteaux	EA_p	99100	livres
Rigidité axiale des cordes	EA_c	6232	livres
Angle des cordes avec l'horizontale	α	36.15	degrés
Distance des cordes du centre du triangle	d	2.25	pouces

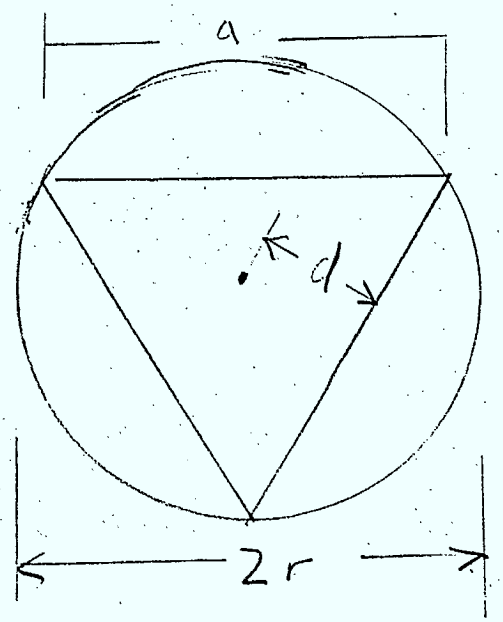
2. Modèle continu de la poutre

Si on considère l'énergie en élongation des poteaux du mât, le tout peut se calculer comme une poutre. Pour trois sections rectangulaires espacés d'une distance "a" sur un plan triangulaire, le moment d'inertie de la section est indépendant des directions des axes et est égal à

$$I_m = .5\ A_p\ a^2 \quad , \qquad (I,1)$$

et la masse par unité de longueur, s'il pèse quinze centième de livre par pied, est égale à ρ, pour g, égale à l'accélération sur terre, g = 386 po/sec^2

$$\rho = \frac{W/H}{g} \qquad (I,2)$$



$$a = \sqrt{3}\ r \qquad (I,3)$$

$$d = r/2 \qquad (I\ 4)$$

Pour une porte-à-faux continue et uniforme, les fréquences de résonance en hertz sont bien connues (Blevins)

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\Pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho H^4}} \qquad (I,5)$$

dans lequel λ satisfait l'équation transcendantale

$$\cos \lambda \cosh \lambda + 1 = 0 \qquad (I,6)$$

Les modes sont donnés par la relation, pour x en direction de la longueur,

$$w_i = \cosh \lambda_i \, x/H - \cos \lambda_i \, x/H - \gamma_i \, (\sinh \lambda_i \, x/H - \sin \lambda_i \, x/H) \qquad (I,7)$$

dans lequel λ_i satisfait la relation

$$\gamma_i = \frac{\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i}{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i} \qquad (I,8)$$

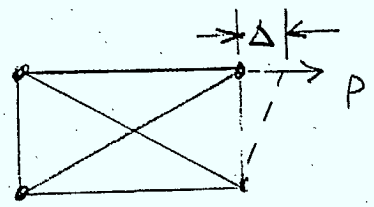
Les valeurs de λ et γ sont données au tableau suivant:

i	λ	γ
1	1.87510407	0.734095514
2	4.69409113	1.018467319
3	7.85475744	0.999224497
4	10.99554073	1.000033553
5	14.13716839	0.999998550
>5	(2i -1) Π/2)	1.0

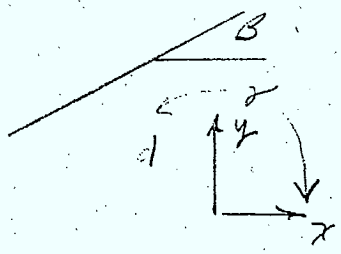
3. Modèle à couplage simple

Le modèle précédent est limité car il ne contient pas l'effet des diagonales, les cordes, suppose que la masse est distribuée de manière uniforme, et ne tient pas compte de la rotation initiale de la structure. Un autre modèle simple qui considère l'énergie dans les cordes mais néglige l'élongation

des colonnes est utilisé pour trouver une approximation des fréquences en torsion de la structure en question.



Elévation



Plan

La relation de rigidité pour l'élément de deux câbles est donnée par:

$$P = k\,\Delta \qquad (I,9)$$

dans laquelle, pour ℓ la longueur des cordes,

$$k = 2\left(\frac{EI}{\ell}\right)\cos^2\alpha \qquad (I,10)$$

et où il est supposé qu'une suffisante traction initiale maintient les cordes en traction, sinon une corde en compression n'a aucune rigidité.

Dans un plan, cet élément est à une distance "d" de l'origine et sa normale a un angle "α" avec l'axe "x". Si nous supposons qu'un ensemble de membres semblables se déplace de manière que le plan reste rigide, tel un diaphragme, il en résulte,

$$|P| = [K]\,|x| \qquad (I,11)$$

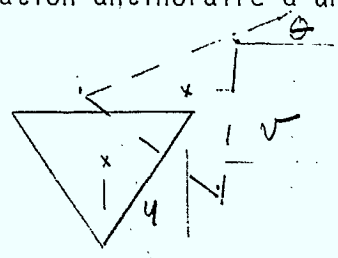
dans lequel

$$|P| = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ T \end{Bmatrix} \qquad x = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \qquad (I,12)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum k\cos^2\beta & \sum k\cos\beta\sin\beta & -\sum k\,d\cos\beta \\ \sum k\cos\beta\sin\beta & \sum k\sin^2\beta & -\sum k\,d\sin\beta \\ -\sum k\,d\cos\beta & -\sum k\,d\sin\beta & \sum k\,d^2 \end{bmatrix}$$

(I,13)

pour P_x, P_y les forces en x et y et T le couple de torsion appliqué a le niveau relatif à l'origine. u et v sont des déplacements en x et y respectivement et θ est la rotation antihoraire d'un diaphragme



Dans le cas de trois membres placés de manière équilatérale et avec deux cordes pour chaque panneau, il en résulte une expression non couplée

$$[K] = k \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3d^2 \end{bmatrix} \qquad (I,14)$$

Ce genre d'élément peut ensuite être utilisé en hauteur donnant comme résultat des équations non couplées pour les déplacements latéraux et en torsion sur forme tridiagonale, et donc couplage simple.

$$|P_x| = [K_x] \; |u| \qquad (I,15)$$

$$|P_y| = [K_y] \; |v| \qquad (I,16)$$

$$|T| = [K_z] \; |\theta| \qquad (I,17)$$

$$[K_x] = [K_y] = 1.5 \; k \; [K^*] \qquad (I,18)$$

$$[K_z] = 3 \; k \; d^2 \; [K]^* \qquad (I,19)$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & -2 & -1 & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & \cdots & & & \\ & & & & & \cdots & & \\ & & & & & & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (I,20)$$

La masse de chaque niveau est considérée comme discrétisée et répartie de manière égale aux trois noeuds, ce qui donne deux problèmes de valeurs propres, pour le mouvement latéral, et en torsion pour m la masse du niveau.

$$\left|\frac{1.5k}{m} [K^*] - \Lambda [I]\right| = 0 \qquad \text{latéral} \qquad (I,21)$$

$$\left|\frac{3kd^2}{mr^2} [K^*] - \Lambda [I]\right| = 0 \qquad \text{torsion} \qquad (I,22)$$

Les fréquences et modes sont (Blevins),

$$f_{i_L} = \frac{1}{2\Pi} \sqrt{\frac{1.5k}{m}} \; \Lambda_i \qquad (I,23)$$

$$f_{i_T} = f_{i_L} / \sqrt{2} \qquad (I,24)$$

$$\Lambda_i = 2 \sin \left(\frac{2i - 1}{2\ n+1}\right) \Pi/2 \qquad (I,25)$$

$$w_{ji} = \sin \beta_{ij} \qquad (I,26)$$

$$\beta_i = \frac{2i - 1}{2n + 1} \Pi \qquad (I,27)$$

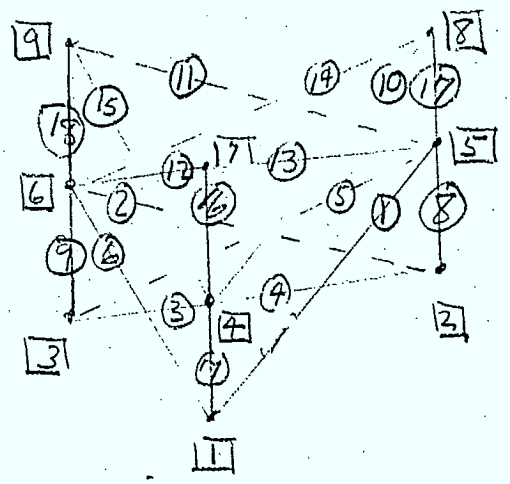
4. Modèle discret d'énergie axiale

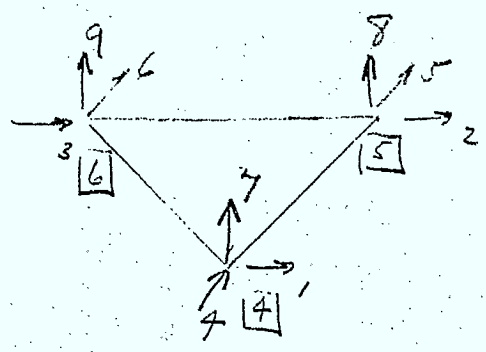
Le dernier modèle néglige l'énergie en élongation de colonnes qui est raisonnable pour une structure avec un rapport de hauteur sur la base peu élevée et des poteaux beaucoup plus rigides que les diagonales. Cependant, pour une structure en hauteur, cette énergie n'est pas négligeable, car une petite élongation aux premiers étages change grandement le comportement latéral. En ce qui concerne le comportement en torsion, cet effet est moins prononcé et ce modèle, pour la structure en question, devrait assez bien modéliser le comportement. Il demeure qu'un modèle plus poussé qui tient compte des élongations axiales des poteaux et des cordes, serait préférable, d'autant plus qu'il puisse tenir compte de la rotation des niveaux. Donc, le nombre de degrés de liberté passe de trois par étage à neuf par étage, les déplacements latéraux et verticaux des trois masses concentrés aux connexions.

Pour les colonnes rectangulaires que nous avons à considérer, la rigidité en torsion est négligeable comparée à celle du système de câbles. Aussi, il est à remarquer que la rigidité en flexion des colonnes est négligeable vis-à-vis celle du système de cordes. Comme approximation, on suppose que les extrémités des colonnes à chaque niveau sont empêchées de tourner, et que les trois poteaux sont orientés dans une même direction. La rigidité des poteaux divisée par celle des câbles, serait donc,

$$\frac{k_p}{k_c} = \frac{\dfrac{12\, EI_p}{h^3}}{\dfrac{EA_c \cos^2\alpha \sin\alpha}{h}} = \frac{12\, I_p}{A_c\, h^2 \cos^2\alpha \sin\alpha} \qquad (I,28)$$

qui est négligeable pour des hauteurs de notre structure.





Les équations de statique qui relient les forces aux noeuds 4, 5 et 6, P avec des charges axiales des membres, 1, 2, ... 9 du premier niveau, f_1 et 10, 11, ... 18 du deuxième niveau, f_2, s'écrivent sous la forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_2 \end{Bmatrix} \qquad (I,29)$$

dans lequel,

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & Y & Y & 0 & 0 & Y & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 0 & Y & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & Z & Z & 0 & 0 & Z & 0 & 0 \\ Z & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & 0 & Z & 0 \\ 0 & Z & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \qquad (I,30)$$

$$[A_{12}] = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 & X \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & Y & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & Y & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & Y \\ Z & 0 & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 & Z & 0 & 0 & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & Z & 0 & 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \qquad (I,31)$$

dans lesquels X, Y, Z représentent les cosinus directeurs des membres selon leurs niveaux

$$A11_{13} = (X_4 - X_3)/L_{34} \qquad (I,32)$$

$$A12_{41} = (Y_4 - Y_8)/L_{48} \qquad (I,33)$$

pour L les longueurs des membres. La même relation est valable pour les autres niveaux sauf le dernier. La matrice de rigidité globale de la matrice est donc donnée par la relation

$$[K] = [A]\ [S]\ [A]' \qquad (I,34)$$

pour [S] la matrice diagonale de rigidité axiale des membres et ' le transpose

$$S_{ii} = (EA/L)_{ii} \qquad (I,35)$$

Finalement, ceci nous amène à la relation suivante pour des rigidités identiques à chaque niveau,

$$[K_{11}] = A_{11}\ S\ A'_{11} + A_{12}\ S\ A'_{12} \qquad (I,36)$$

$$[K_{12}] = A_{12}\ S\ A'_{22} \qquad (I,37)$$

$$[K_{21}] = [K_{12}]' \quad \text{etc.} \qquad I,38$$

Ce qui est symétrique avec une demi-bande égale à 18.

5. Résultats

Les résultats des divers modèles présentés seront donnés sous forme de fréquences de résonances pour un modèle de cinq étages et pour un de cinquante étages.

Poutre

Selon l'équation, les fréquences sont données par la relation I,5

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\Pi} \sqrt{\frac{EI_m}{\rho H^4}} \qquad (I.39)$$

et pour les valeurs

$$EI_m = 3 \times 10^6 \text{ livre po}^2$$

$$\rho = .3237 \times 10^{-4} \text{ livres-sec}^2/\text{po}^2$$

$$H_5 = 5 \times 307/54 = 28.426 \text{ po}$$

$$H_{54} = 307 \text{ po}$$

nous donnent les relations qui sont résumées aux tableaux suivants,

$$f_{i_5} = 60.0\ \lambda_i^2$$

$$f_{i_{54}} = .514\ \lambda_i^2$$

où λ_i satisfait l'équation I.6

Couplage simple

Les fréquences de résonance pour le mouvement latéral et en torsion sont reliées par l'équation I.23 pour ce modèle et sont données pour les paramètres utilisés des résultats indiqués aux tableaux:

$$f_{i_L} = \frac{\Lambda_i}{2\Pi} \sqrt{\frac{1.5k}{m}} \qquad (I,40)$$

$$k = 2 \frac{EA_c}{h} \cos^2 \alpha \sin \alpha = 843.2$$

$$m = .000184 \text{ lb-sec}^2/\text{po}$$

$$h = 307/54 = 5.685 \text{ po}$$

$$\alpha = \tan^{-1} (h/a) = 36.15^o$$

$$f_{i_L} = 417.3 \ \Lambda_i \quad \text{latérale}$$

$$f_{i_T} = 295.1 \ \Lambda_i \quad \text{en torsion}$$

pour Λ_i satisfaisant la relation I.25

Energie axiale

Les résultats calculés pour ce modèle sont calculés selon le programme qui se trouve en appendice avec et sans rotation. Les paramètres pour le programme sont:

$$EA_c = 6232 \text{ livres}$$

$$EA_p = 99100 \text{ livres}$$

$$h = 5.685 \text{ pouces}$$

$$m = .184 \times 10^{-3} \text{ livres-sec}^2/\text{po}$$

$$\phi = 0 \text{ ou } -2.222^o$$

Tableau 2. Fréquences de résonance (hertz)

i	Poutre		Couplage simple				Energie axiale							
							Sans rotation				Avec rotation			
	Latérale		Latérale		En torsion		Latérale		En torsion		Latérale		En torsion	
	5	54	5	54	5	54	5	54	5	54	5	54	5	54
1	211.0	1.8	118.8	12.0	84.0	8.5	90.1	—	84.0	—	90.0	1.7	84.0	8.5
2	1322.1	11.8	346.7	36.1	245.1	25.5	100.9	—	245.2	—	100.7	10.3	245.2	25.5
3	3701.9	31.7	546.5	60.1	386.4	42.5	260.3	—	386.5	—	261.4	27.8	385.9	42.5
4	7254.1	62.1	702.1	84.0	496.4	59.4	298.3	—	496.4	—	298.4	47.5	496.7	59.5

ANNEXE 2

ESTIMATION DES PARAMÈTRES STRUCTURAUX

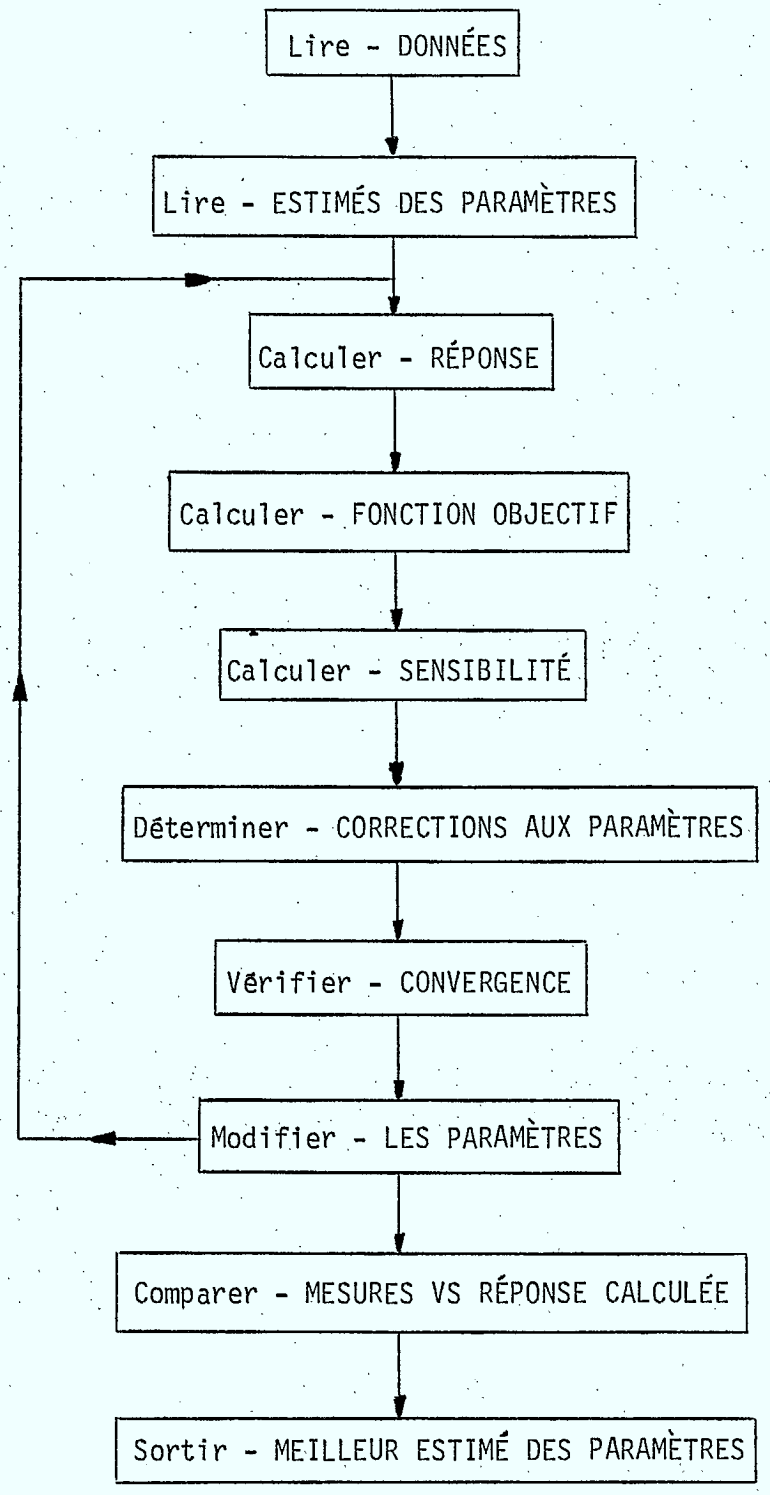
Comme on peut le constater, les résultats du modèle à couplage simple donne de bons résultats pour les fréquences en torsion pour les deux modèles, court et long. L'effet de la rotation initiale est négligeable pour le calcul des fréquences. Le modèle de la poutre, même s'il n'est pas bon pour la petite structure, donne des fréquences assez correctes pour le comportement latéral du grand modèle de cinquante-quatre niveaux. Des modèles plus complexes d'éléments finis pourraient aussi être utilisés pour tenir compte de l'énergie en flexion, l'énergie en torsion, la distribution de masse, l'énergie cinétique des connexions dues au mouvement angulaire, etc., mais le nombre de degrés de liberté augmenterait du double, ce qui nécessiterait des procédures numériques telles que la synthèse modale ou utilisation des matrices de transfert.

Dans le modèle à énergie axiale, il y a neuf degrés de liberté par niveau. Certains modes sont associés avec le mouvement vertical de la structure, mais sont à des fréquences élevées. Ce modèle semble être le mieux adapté pour tenir compte des masses additionnelles dues aux accéléromètres qui seront installés lors des essais dynamiques du modèle.

Enfin, pour l'estimation des paramètres, on suppose que les masses et que la géométrie sont connues. Donc, ce qui reste comme paramètres sont les rigidités axiales des colonnes et des câbles qui, pour fins d'étude, seront supposées identiques à chaque niveau. La technique d'identification dépend donc des mesures prises, soient les modes et fréquences de résonance, soient les fonctions de transfert sur une gamme de fréquences. La procédure est résumée dans l'organigramme suivant.

ORGANIGRAMME

IDENTIFICATION DE L'ASTROMAST



REFERENCES

A.1 Asher, G.W., "A Note on the Effective Degrees of Freedom of a Vibrating Structure", AIAA Journal, Oct. 1960.

B.1 Barauch, A., "Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices using Vibration Tests", AIAA Journal, Vol. 16, Nov. 1978.

B.2 Baruch, M., "Proportional Optimal Orthogonalization of Measured Modes", Technical Note, AIAA, Vol. 18, No. 7, July 1980.

B.3 Baticle, J., "Measuring Processes of Vibratory Characteristics of Mechanical Structures", Proceedings of the Third World Congress for the Theory Machines and Mechanics", Kupari, Yugoslavia, Sept. 13-20, 1971, Vol. A, paper A-4, p. 27-32.

B.4 Béliveau, J.-G., "Parameter Estimation from Non-Normal Modes of Soil Structural Interaction", Journal of Optimization Theory and Application, Vol. 23, No. 1, Sept. 1976.

B.5 Béliveau, J.-G., "Identification of Viscous Damping From Modal Informations", Journal of Applied Mechanics, Vol. 98, No. 2, June 1976.

B.6 Béliveau, J.-G., "First Order Formulation of Resonance Testing", Journal of Sound and Vibration, Vol. 65, No. 3, 1979, p. 319-327.

B.7 Béliveau, J.-G., "Eigen Relations in Structural Dynamics", Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics", Vol. 15, No. 7, 1977, p. 1039-1041.

B.8 Berman, A., "Parameter Identification Techniques for Vibrating Structures", Shock and Vibration Digest, Vol. , No.

B.9 Berman, A., "Mass Matrix Correction Using an Incomplete Set of Measured Modes", AIAA Technical Note, Vol. 17, No. 10, Oct. 1979.

B.10 Berman, A., "Determining Structural Parameters from Dynamic Testing", Shock and Vibrating Digest, Vol. 7, No. 1, Jan. 1975.

B.11 Berman, A., "Improved Orthogonality Check for Measured Modes", AIAA, Technical Note, Vol. 18, No. 9, Sept. 1980.

B.12 Berman, A., Wei, F.S. and Rao, K.V., "Improvement of Analytical Dynamic Models Using Modal Test Data", AIAA, paper 80-0800, 21st Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, May 1980, p. 809-814.

B.13 Berman, A. and Flannelly, W.G., "Theory of Incomplete Models", AIAA Journal, Vol. 9, Aug. 1971.

C.1 Caravani, P. and Thomson, W.T., "Identification of Damping Coefficients in Multidimensional Linear Systems", Journal of Applied Mechanics, June 1974.

C.2 Cardani, C. and Mantegazza, P., "Calculation of Eigen Value and Eigen Vector Derivatives for Algebraic Flutter and Divergence Eigen Problems", AIAA Journal, Vol. 17, No. 4, April 1979.

C.3 Carlo, A., "Vibration Damping on San Marco Satellites Results and Comments", Report on Damping Effects in Aerospace Structure, published by AGARD, France, Oct. 1979, (AGARD-CP-277).

C.4 Carrington, H.C. and Ottens, H.H., "A Survey of Data on Damping in Spacecraft Structure", ESRO CR-539.

C.5 Caughey, T.K. and O'Kelly, M.E., "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", Journal of Applied Mechanics, Sept. 1965, p. 583-588.

C.6 Chen, J.C. and Garba, J.A., "Analytical Model Improvement Using Modal Test Results", AIAA, Vol. 18, No. 6, June 1980.

C.7 Church, A.H., "Mobility", Machine Design, Feb. 8, 1960.

C.8 Collins, J.D; Hart, G.C; Hasselman, T.K. and Kennedy, B., "Statistical Identification of Structures", AIAA Journal, Vol. 12, No. 2, Feb. 1974.

C.9 Coupry, C., "Mesure des amortissements généralisée non diagonaux d'une structure lors d'un essai au sol de vibration", La recherche aérospatiale, No. 4, pp. 239-244, 1977.

C.10 Craig, R.R. and Su, Y.W.T., "On Multiple Shaker Resonance Testing", AIAA, Vol. 12, July, 1974.

D.1 Degenor, M. "Dynamic Response Analysis of Spacecraft Structures Based on Modal Survey Test Data Including Nonlinear Damping", European Space Agency Report No. ESA-TT-431, Jan. 1978, N78-15144 (Translation of report DLR-FB77-17).

D.2 Duncan, W.J. "Elementary Matrices", MacMillan Company, New York, 1946.

E.1 Ewins, D.J., "On Predicting Point Mobility Plots from Measurements of other Mobility Parameters", Journal of Sound and Vibration, 1980, 70 (1).

F.1 Favour, J.D., "Transient Test Technique for Mechanical Impedance and Modal Survey Testing", Shock and Vibration Bulletin 42, Part. 1, Jan. 1972, p. 71.

F.2 Fillod, R. and Piranda, J., "Identification des solutions propres par différences de réponses forcées", CSME Transactions, 79-CSME-97.

F.3 Flannelly, W.G.; McGarvey, J.H. and Berman, A.", A Theory of Identification of the Parameters in the Equations of Motion of a Structure through Dynamic Testing", Symp. Struc. Dynam., Univ. Tech. Loughborough, England, March 23-25, 1970.

F.4 Flannelly, W.G; Berman, A. and Giansante, N., "Research on Structural Dynamic Testing by Impedance Methods", USA AMRDL Tech. Rept. 72-63, U.S. Army Air Mobility Res. and Develop. Lab., Fort Eustis, Va., Nov. 1972.

F.5 Foss, K.A., "Co-Ordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems", Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, Sept. 1958, pp. 361-364.

F.6 Fox, R.L. and Kapoor, M.P., "Rates of Change of Eigen Values and Eigen Vectors", AIAA Journal, Vol. 6, No. 12, Dec. 1968.

F.7 Fraeijs de Veubeke, "Analyse de la réponse forcée des systèmes amortis par la méthode de déphasages caractéristiques", A.G.A.R.D., Rep. No. 39, 1956.

G.1 Gaukrager, D.R. and Hawldins, F.J. "Resonance Tests on a Motor Car Body", Royal Aircraft Establishment Tech. Report No. 66022, January 1966.

G.2 Giansante, N. and Flannelly, W.G., "Identification of Structural Parameters from Helicopter Dynamic Test Data", AHS/NASA-Ames. Specialists Meeting on Rotorcraft Dynamics, Feb. 13-15, 1974.

G.3 Gladwell, G.M.L. and Bishop, R.E.D., "An Investigation into the Theory of Resonance Testing", Aeronautical Research Council A.R.C. 22, 231, Sept. 1960.

G.4 Goyder, H.G.D. and White, R.G., "The Analysis of Measured Data for the Determination of the Fundamental Dynamic Properties and Vibration Transmission Characteristics of Structures", Soc. Environ. Engr. Proc. Imperial College, London, April 1977.

G.5 Grant, J.E. and Jones, A.T., "Generation and Properties of Bonded Viscous Damping Matrices", Sandia Laboratories report No. SCL-DC-710093, March 1972.

G.6 Graupe, D., "Identification of Systems", Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.

H.1 Hannibal, A.J., "Modeling of Vibrating Systems - An Overview", Shock and Vibrating Digest: Part 1, Vol. 18, No. 11, Nov. 1976; Part 2, Vol. 9, No. 12, Dec. 1976.

H.2 Hasselman, T.K., "Modal Coupling in Lightly Damped Structures", AIAA, Vol. 14, No. 11, pp. 1627-1628, Nov. 1976

H.3 Hasselman, T.K., "Method for Constructing a Full Modal Damping Matrix from Experimental Measurements", AIAA, Vol. 10, April 72, p. 526-527.

H.4 Horvath, J.K., "Structural and System Models", SAE paper 750135.

H.5 Hunter, N.F. and Otts, J.V., "The Measurement of Mechanical Impedance and its Use in Vibration Testing", Shock and Vibration Bulletin 42, Part. 1, Jan. 1972, p. 55.

I.1 Ibafiez, P., "Identification of Dynamic Structural Models From Experimental Data", University of California at Los Angeles, Engineering Report UCLA-ENG. 7225, March 1972.

J.1 Junkins, J.L., "An Introduction to Optimal Estimation of Dynamical Systems", Sijthoff & Noordhoff International Publishers, The Netherlands 1978.

J.2 Junkins, J.L. and Watts, "Spectral Analysis and its application".

K.1 Kenedy, C.C. and Pancu, C.D.P., "Use of Vectors in Vibration Measurement and Analysis", Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 14, No. 11, p. 603-625, Nov. 1947.

K.2 Klosterman, A. and Zimmerman, R., "Modal Survey Activities via Frequency Response Functions", SAE paper 751068.

K.3 Klosterman, A., "On the Experimental Determination and Use of Modal Representation of Dynamic Characteristics", Ph.D. Dissertation, University of Cincinnati, 1971.

L.1 Lang, G.F., "Understanding Vibration Measurements", Application note 9, Nicolet Scientific Corporation, June 1975.

L.2 Loup, J., "Recherche sur l'amortissement en vibration des structures de satellites", ESRO CR-633, May 1975.

M.1 Marples, V., "The Derivation of Modal Damping Ratios from Complex Plane Response Plots "Journal of Sound and Vibration, 1973, 31 (1), p. 105-117.

M.2 Martinez, D.R., "Parameter Estimation in Structural Dynamics Models", Sandia National Laboratories, report No. SAND 80-0135, March 1981.

M.3 Maybee, J.S., "Normal and Quasi-Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", Journal of Applied Mechanics, June 1966.

M.4 Mead, D.J., "Existence of Normal Modes of Linear Systems with Arbitrary Damping", Proc. Symp. on Structure Dynamic, Loughborough, Paper C5, 1970.

N.1 Natke, H.G., "Survey of European Ground and Flight Vibration Test Methods", Aerospace Engineering and Manufacturing Meeting Town & Country", San Diego, Nov. 29 - Dec. 2, 1976. SAE paper No. 76078.

N.2 Nelson, F. C., Greif, R., "On the Incorporating of Damping in Large General Purpose Computer Programs", Nuclear Engineering and Design, Vol. 37, 1976, p. 65-72.

N.3 Nelson, R.B., "Simplified Calculation of Eigen Vector Derivatives", AIAA Journal, Vol. 14, No. 9, Sept. 1976.

N.4 Nguyen, X.T., "Restitution par calcul des modes propres à partir d'excitations non appropriées", Note technique No. 1975-9, Office National d'Etudes et de Recherches Aerospatiales (ONERA).

O.1 Ottens, H.H., "Mathematical Formulation for Structural Analysis", National Aerospace Laboratory, Amsterdam, The Netherlands, report No. NLR MR 79010 v, Nov. 1979 - presented at AGARD specialist meeting on damping effects in aerospace structures, at Williamsburg, Virginia, April 1979.

P.1 Pilkey, W.D. and Cohen, R. (editors), "System Identification of Vibrating Structure - Mathematical Model from Test Data", ASME publication, presented at 1972 Winter Annual Meeting.

P.2 Potter, R., "A General Theory of Modal Analysis for Linear Systems" Shock and Vibration Digest, Vol. 7, No. 11, Nov. 1975.

P.3 Prado, G. and Pearson, R.K., "Efficient Techniques for System Identification of Large Space Structures", Proceedings of the Automatic Control Conference, ASME Century 2, Emerging Technical Conference, San Francisco, Cal., Aug 13-15, 1980.

R.1 Richardson, M. and Potter, R., "Identification of the Modal Properties of an Elastic Structure From Measured Transfer Function Data", 20th International Instrumentation Symposium, May 21-23, 1974, Albuquerque, New Mexico.

R.2 Ross, R.G., "Synthesis of Stiffness and Mass Matrices from Experimental Vibration Modes", SAE 710787.

S.1 Saga, A.P. and Melsa, J.L., "System Identification", Academic Press, Inc., New York, 1971.

S.2 Sanatini, P. (editor), "Damping Effects in Aerospace Structures", 48th meeting for the Advisory Group for Aerospace Research and Development (AGARD, NATO organization) Structure and Material Panel, held at Williamsburg, VA, 2-3 April 1979 (AGARD-CP-277).

S.3 Schiff. A.J., "Identification of Large Structures Using Data From Ambient and Law Level Excitations", System Identification of Vibrating Structure, ASME publication, 1972 Winter Annual Meeting of the ASME.

S.4 Stahle, C.V., "Phase Separation Technique for Ground Vibration Testing", Aero Space Engineering, July 1962.

T.1 Targoff, W.P., "Orthogonality Check and Correction of Measured Modes", AIAA, Vol. 14, No. 2, 1976, p. 164-167.

T.2 Thomas, M.; Massoud, M. and Beliveau, J.-G., "Identification des caractéristiques dynamiques d'une structure mécanique basée sur la méthode des déphasages caractéristiques", Proceedings of the 8th Canadian Congress of Applied Mechanics, Moncton, N.B., June 1981.

T.3 Thomson, W.T., "Parameter Uncertainty in Dynamic Systems", Shock and Vibration Digest, Vol. 7, No. 8, August 1975.

T.4 Thoren, A.R., "Derivation of Mass and Stiffness Matrices from Dynamic Test Data", AIAA paper No. 72-346 presented at the AIAA/ASME/SAE 13th Str. Sto. Dy. and Matl. Conference, San Antonio, Texas, April 10-12, 1972.

V.1 Vanhonacker, P., "Differential and Difference Sensitivities of Natural Frequencies and Mode Shapes of Mechanical Structure", AIAA Journal, Vol. 18, No. 12, Dec. 1980.

V.2 Van Trees, H.L., "Detection, Estimation and Modulation Theory", Part 1, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968.

W.1 Wada, B.K., "Modal Test: Measurement and Analysis Requirements", SAE paper 751066.

W.2 Wei, F.S., "Stiffness Matrix Correction from Incomplete Test Data", AIAA, Vol. 18, No. 10, Oct. 1980.

W.3 Wells, W.R., "Systems Identification - Application of Modern Parameter Estimation Methods to Vibrating Structures", Shock and Vibration Bull. No. 47, Sept. 1977.

Y.1 Young, J.P. and On, F.J., "Mathematical Modeling Via Direct Use of Vibration Data", paper No. 690615 National Aeronautic and Space Engineering and Manufacturing Meeting, Los Angeles, California, Oct. 1969.