PERFORMANCE DE CODES DE CONVOLUTION APPLIQUES A LA CORRECTION D'ERREURS SUR UN CANAL DE RADIO MOBILE

RAPPORT FINAL

BINARY COMMUNICATIONS INC.

2769 Arbutus Road
Victoria, B.C.
Canada V8N 5X8

DOC-CR-TS-85-001

PERFORMANCE DE CODES DE CONVOLUTION APPLIQUES A LA CORRECTION D'ERREURS SUR UN CANAL DE RADIO MOBILE

RAPPORT FINAL

BCI No. 85-ECC-1
Sous contrat MAS No. 12ST.36001-1-3465
No. de série OST84-00474

Préparé par: Jean Conan
Gérald E. Séguin
Vijay K. Bhargava

Résponsable: Vijay K. Bhargava
Vijay K Bhargava

SUBMITTED BY

BINARY COMMUNICATIONS INC.
2769 Arbutus Road
Victoria, B.C.
V8N 5X8

Tel.: (604) 477-5664

Rec'd from Marin Brunsen July '85 Accessibility. Not restricted on Internet

DEPARTMENT OF COMMUNICATIONS

RELEASABLE DOC-CR-TS-85-001

COMMUNICATIONS RESEARCH CENTRE

ORIGINAL DOCUMENT REVIEW AND PUBLICATION RECORD

SECTOR	BRANCH	DATE
DGTS	DRZ	November 12, 1985

PURPOSE This form is for use during review of the DOC-CR contractor reports. It is designed to: record decisions for classification, record reasons for classification and cautionary marking provide for indexing requirements.

INSTRUCTIONS * 1 copy of the completed form must accompany the contractor report package submitted to the CRC Library.

* Complete the following items as applicable.

1. DOC-CR NO. DOC-CR-TS-85-001	2. DSS CONTRACT NO. 36001-1-3465
3. TITLE: Performance de codes de convolution appliqués à la correction d'erreurs sur un canal de radio mobile	4. DATE 30 Juin 1985
5. CONTRACTOR Binary Communications Inc.	

6. SCIENTIFIC AUTHORITY M. Mario Bruneau	7. LOCATION DRZ/CRC	8. TEL. NO. 998-2870

9. CONTRACTOR REPORT CLASSIFICATION:

RELEASABLE [XXX] CONDITIONALLY RELEASABLE [ ] NON-RELEASABLE [ ]

* REASONS FOR CLASSIFICATION:

Called Mario Bruneau 12/11/85.
He indicated there are no restrictions on leaving outside of DOC.

10. NO. OF COPIES SUBMITTED TO LIBRARY:

EXECUTIVE SUMMARY [ ] FINAL REPORT [XXX] 2 copies

....

Scientific Authority's Signature Date

This form is not official therefore it is not signed.

Government of Canada
Department of Communications

Gouvernement du Canada
Ministère des Communications

RAPPORT DE CONTRAT MDC

MDC-CRC-DRZ

MINISTERE DES COMMUNICATIONS - OTTAWA - CANADA

TITRE: PERFORMANCE DE CODES DE CONVOLUTION APPLIQUES A LA CORRECTION D'ERREURS SUR UN CANAL DE RADIO MOBILE

AUTEURS: Jean Conan
Gérald E. Séguin
Vijay K. Bhargava

DIFFUSE PAR LE CONTRACTEUR SOUS LE NUMERO 85-ECC-1

PREPARE PAR: Binary Communications Inc.
2769 Arbutus Road
Victoria, B.C.
V8N 5X8

MINISTERE DES APPROVISIONNEMENTS ET SERVICES CONTRAT No. OST84-00474

RESPONSABLE SCIENTIFIQUE DU MINISTERE: M. Mario Bruneau

CLASSIFICATION: Diffusion sans restriction

Canada

Date: Le 30 Juin, 1985

TABLE DES MATIERES

RESUME

Ce travail présente les résultats d'analyse des séquences d'erreurs produites à partir d'un modèle relatif à un canal VHF de radio mobile numérique soumis à des erreurs résultant de la combinaison de bruits gaussiens et d'évanouissements de type Rayleigh. Des statistiques relatives à la répartition des séquences d'erreurs parmi des blocs de longueur variable N ont été obtenues. D'autre part, des modèles markoviens significatifs des séquences d'erreurs obtenues ont été dérivées. Les algorithmes de calcul correspondant ont été développés et implantés sur ordinateur. Finalement des essais de codage convolutionnel à protection diffuse et décodage à seuil ont été réalisés sur les données brutes. La simplicité d'implantation de ces codes ainsi que leur décodage aisé en fait des candidats de premier choix dans le cadre de cette application. Des recommandations sont suggérées sur l'impact d'une continuation de ces recherches dans le cadre de ce projet.

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous présentons les origines de ce projet et les objectifs du travail qui se situent essentiellement à trois niveaux: analyse statistique des enregistrements des séquences d'erreurs du canal de transmission considéré, modélisation du canal binaire équivalent et enfin évaluation de la performance de codes convolutionnels de taux de codage $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ applicables à la correction de ces erreurs. Section 1.1 présente rapidement les points de départ du projet et les hypothèses de travail. A l'intérieur de la Section 1.2 nous présentons brièvement les résultats obtenus dans le cadre de chacun des trois objectifs cités ci-dessus.

1.1 Origines du projet

Un canal de radio mobile numérique opérant dans la gamme VHF et perturbé simultanément par du bruit blanc gaussien et des évanouissements de Rayleigh a été récemment simulé dans les laboratoires du Centre de Recherches en Communications d'Ottawa conformément au systéme expérimental suivant.

Le système de transmission utilisé pour obtenir les distributions d'erreur est illustré à la Figure 1.1. Il permet de mesurer les performances d'un système de transmission radio mobile numérique. Il est composé des parties suivantes:

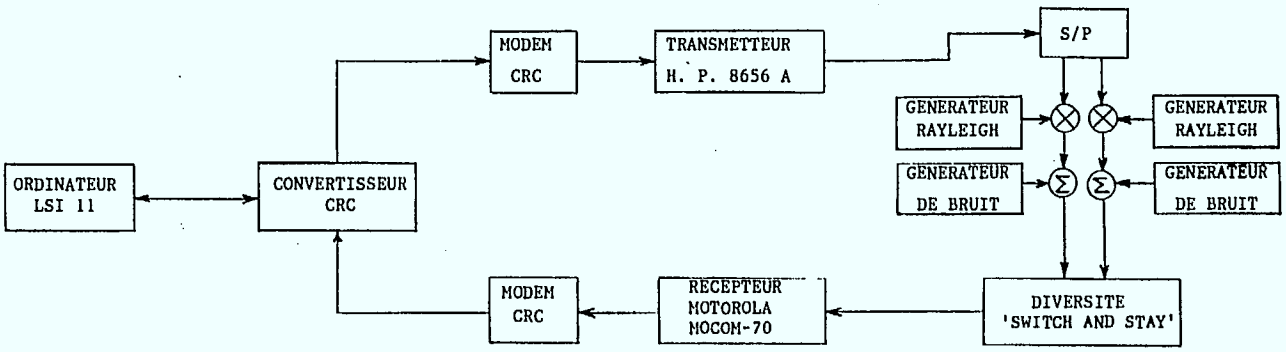


Figure 1.1 Système expérimental de transmission radio mobile numérique.

a) **Ordinateur LSI 11**

Un ordinateur Digital LSI 11/23, avec unité de mémoire sur disque, s'occupe des transmissons de données à travers le système. Il génère une séquence pseudo-aléatoire de 65535 bits qui est transmise sur le canal radio. Le récepteur retourne la séquence au LSI 11, lequel exécute l'addition modulo 2 entre la séquence transmise et celle reçue. Les distributuions d'erreur ainsi obtenues sont sauvées sur disque.

b) **Convertisseur**

Ce module est un convertisseur 16 bits parallèle/série, série/parallèle synchrone. Il est l'interface entre le LSI 11 et les modems. Le taux de bits utilisé est de 9600 bits par seconde.

c) **Modem**

L'un des modems encode les données reçues du convertisseur et l'autre décode les données envoyées au convertisseur. Le type d'encodage / décodage utilisé est le duobinaire modifié.

d) **Transmetteur**

Le transmetteur est un générateur Hewlett Packard 6656A. Il peut transmettre jusqu'à une fréquence de 990 MHz.

e) **Générateur Rayleigh**

Cet appareil a été fabriqué par B.N.R. . L'enveloppe du signal de sortie a une variation de puissance qui suit une distribution de Rayleigh. Le taux d'évanouissement peut être spécifié jusqu'à 100Hz.

f) **Générateur de bruit**

La source de bruit gaussienne est un générateur Micronetics PNG 5200. Il produit un bruit s'étendant jusqu'à 1000 MHz.

g) **Diversité**

Le type de diversité de commutation utilisé simule un système composé d'un récepteur et de deux antennes séparées physiquement. La stratégie consiste à examiner seulement un signal parmi deux disponibles. Il y a commutation d'un signal à l'autre si et seulement si la puissance de l'enveloppe du signal de l'antenne utilisée décroit et croise un seuil fixé d'avance.

h) **Récepteur**

Le récepteur est un Motorola Mocom 70, représentatif des modèles courants, qui fonctionne à 154.4915 MHz.

A partir de ce dispositif expérimental, une série d'enregistrements magnétiques de séquences typiques d'erreurs a été obtenue pour différents modes de fonctionnement avec et sans diversité d'espace (réception sur antennes séparées) et dans le premier cas pour différents mécanismes de commutation.

1.2 Objectifs du travail

Le travail subséquent suggéré par l'équipe du CRC a consisté à analyser statistiquement les séquences d'erreurs découpées en blocs de différentes longueurs et

utiles pour l'évaluation des performances des systèmes à correction d'erreurs par blocs. La présentation de la méthodologie de cette analyse fait l'objet du contenu du Chapitre 2. D'autre part, les résultats spécifiques qui expriment les probabilités $P(m,N)$ de trouver un nombre d'erreurs $\geq m$ dans un bloc de longueur N et $P(l,N)$ associée à la présence d'une salve d'erreurs solide de longueur supérieure à l dans ces mêmes blocs sont rassemblés aux appendices A1, A2, A3, A4.

Compte tenu des résultats obtenus dans la première phase de l'étude et qui démontrent clairement que le canal de transmission considéré est caractérisé par des séquences d'erreurs à corrélation relativement forte (salves d'erreurs), il apparaît souhaitable de développer une méthode statistique de modélisation de ce type de canal utilisant un modèle markovien généralisant le modèle classique de canal à salves d'erreurs de Gilbert. L'analyse théorique liée au problème et la méthode numérique qui en résulte fait l'objet du développement du Chapitre 3. Plusieurs modèles effectifs ont été identifiés sur ordinateur pour des enregistrements correspondant à certains paramètres spécifiques. L'intérêt essentiel de ces modèles mathématiques réside dans le fait qu'ils peuvent servir à modéliser directement le canal de transmission sur ordinateur sans passer par le biais des enregistrements obtenus expérimentalement.

Finalement nous avons testé, par le biais de simulation, deux codes convolutionnels à protection diffuse et décodage à seuil, particulièrement adaptés à la correction des erreurs par salves de taux respectif $\frac{1}{2}$ (code du à Kohlenberg et

Forney) et $\frac{2}{3}$ (code du à Iwadare et Massey). La théorie sous-jacente et les algorithmes de décodage appropriés sont développés au Chapitre 4. Les performances sont résumées sous la forme de courbes qui expriment le taux d'erreur décodé en fonction du rapport signal à bruit pour différents modes de fonctionnement.

CHAPITRE 2

EVALUATION DES STATISTIQUES D'ERREURS D'UN CANAL VHF EN PRESENCE DE BRUIT BLANC GAUSSIEN ET D'EVANOUISSEMENTS DE RAYLEIGH

Un canal numérique de radio mobile a été récemment simulé dans les laboratoires du Centre de Recherches en Communications d'Ottawa à partir d'un récepteur radio opérant en modulation de fréquence dans la gamme VHF et perturbé, d'une part, par du bruit additif gaussien et blanc et, d'autre part, par des évanouissements de signal du type Rayleigh. Différents essais on été effectués en supposant un fonctionnement avec et sans diversité d'espace, dans le premier cas, en utilisant différents niveaux de commutation. De façon plus spécifique, des enregistrements sur bandes magnétiques des séquences d'erreurs obtenues ont été effectués pour diverses valeurs de la fréquence Doppler et différents rapports du niveau de signal à bruit à partir de mesures effectuées pour une vitesse de transmission à 9600 bits par seconde. Dans ce chapitre, nous présentons les résultats d'une analyse par ordinateur des statistiques d'erreurs obtenues. Les résultats se présentent sous la forme d'un recueil de courbes exprimant, pour différentes longueurs des blocs transmis N, d'une part la probabilité $P(m, N)$ de trouver un nombre d'erreurs supérieur ou égal à m dans un bloc de longueur N et, d'autre part la probabilité $P(l, N)$ associée à la présence d'une salve d'erreurs de longueur supérieure ou égale à l dans ces mêmes blocs.

2.1 Données de base:

Les données enregistrées sur rubans magnétiques se présentent sous forme de fichiers séquentiels contenant, codées en octets successifs, les séquences de "0" et de "1" (un "1" signalant la présence d'une erreur) obtenues à la sortie du récepteur. Les quatre séries d'enregistrements suivantes, réparties sur trois rubans magnétiques distincts, ont été fournies par le CRC:

1) **Enregistrements en présence de bruit gaussien seul.**

   17 fichiers portant les noms DxxF00, où xx prend les valeurs 00,01,02, . . . , 16, contiennent les enregistrements de séquences typiques obtenues pour les différentes valeurs xx du rapport signal à bruit C/N.

2) **Enregistrements de la série 03 (sans diversité).**

   39 fichiers portant les noms DxxFyy, où xx et yy prennent les valeurs respectives xx = 00,05,10, . . . , 60 yy = 10,60,99, contiennent les enregistrements de séquences d'erreurs typiques pour les valeurs xx du rapport signal à bruit et la fréquence Doppler yy.

3) **Enregistrements de la série 04 (avec diversité).**

   Formés de 39 fichiers portant les noms DxxFyy pour lesquels les paramètres xx et yy sont identiques à ceux de la série 03 à l'exception du fait que, dans ce cas, la diversité a été utilisée avec un seuil de commutation réglé à 9 dB

au dessous du niveau moyen de la porteuse.

4) **Enregistrements de la série 05 (avec diversité et seuil de commutation optimum).**

Constitués de 39 fichiers identiques à ceux de la série précédente excepté que le seuil de commutation dépend, dans ce cas, du rapport moyen de la porteuse au bruit.

2.2 Manipulation préalable des fichiers d'enregistrements:

Afin de réduire au minimum la quantité d'espace sur disque requise pour la manipulation des fichiers, une opération préalable de compression des données a été appliquée.

La procédure utilisée se résume comme il suit:

A) Pour les fichiers dont le taux d'erreur moyen (i.e, le rapport BER entre le nombre d'erreurs et le nombre total de symboles) est $\geq 5.10^{-2}$ (i.e., une valeur considérée comme élevée), la copie sur disque est identique à l'enregistrement original. Le fichier sur disque porte alors le même nom que le fichier sur ruban.

B) Pour les fichiers dont le taux d'erreur moyen est compris entre 5.10^{-4} et 5.10^{-2}, les enregistrements sur disque représentent une copie comprimée de l'original suivant un codage de la longueur des séquences successives de "0" et de "1" (Run length coding) qui composent l'enregistrement. Les longueurs correspondant aux salves successives solides de "0" et de "1" sont alors encodées suivant 2 octets. Dans ce cas, le fichier sur disque porte le même nom que sur le ruban mais précédé d'un "C".

Exemple: D10F60.DAT devient CD10F60.DAT sur le disque.

C) Pour les fichiers dont le taux d'erreur est faible (i.e., BER $\leq 5.10^{-4}$), une opération de compression identique à la précédente a été effectuée à l'exception du fait que le codage des longueurs est réalisé dans 4 octets au lieu de 2. Dans ce cas le fichier sur disque porte le même nom que le fichier correspondant sur ruban mais précédé des lettres "LC".

Exemple: D50F99.DAT devient sur disque LCD50F99.DAT.

2.3 Analyse des données:

L'analyse des données consiste, pour une valeur de bloc N donnée en paramètre, à déterminer les statistiques relatives au nombre d'erreurs par bloc et à la longueur des salves d'erreurs par bloc.

A cet effet, il importe tout d'abord de bien définir la notion de salve d'erreurs. Pour ce faire considérons un bloc particulier de longueur N et soit

$$\underline{E} = (0^L k \; 1^M 1 \; 0^L 1 \cdots 1^M k-1 \; 0^L k-1) \tag{2.1}$$

la séquence d'erreur, où nous utilisons la notation 0^L, 1^M pour représenter une succession de L "0"s, M "1"s (si l ou M est égal à zéro, la séquence correspondante est supposée vide).

Si L_k est différent de zéro, nous effectuons tout d'abord un décalage cyclique de L_k positions vers la gauche de sorte que $\underline{E}$ devient:

$$\underline{E}' = (1^M 1 \; 0^L 1 \cdots 1^M k-1 \; 0^L k-1^L k) \tag{2.2}$$

Si L est le maximum de l'ensemble des entiers $(L_1, L_2, \ldots, L_{k-1}+L_k)$, alors $\underline{E}$ contient une salve d'erreur de longuer M telle que

$$M = N - L. \tag{2.3}$$

D'autre part, si n représente une valeur d'indice satisfaisant à $L = L_n$ et si $\underline{E}''$ est la séquence obtenue par décalage cyclique de $\underline{E}$ de façon à se terminer par la séquence $\cdots 0^L n$, les M premiers symboles de $\underline{E}''$ constituent la salve d'erreur associée à $\underline{E}$. On remarquera que la salve d'erreur ainsi définie est unique sauf s'il existe plusieurs valeurs d'indice telles que $L_n = L$.

Exemples:

Si $N = 11$ et $\underline{E} = (00111000110)$.

On a $\underline{E}' = (11100011000)$ et

$L_1=3$, $L_2=3$, de sorte que l'on obtient:

$L=3$, $M=8$ et $n=1$ ou 2.

La salve d'erreurs correspondante est soit 11100011, soit 11000111.

Si $N=11$ et $\underline{E}=(11110010001)$.

On a $\underline{E}'=\underline{E}$ et

$L_1=2$, $L_2=3$, $L_3=0$, de sorte que l'on obtient:

$L=3$, $M=8$ et $n=2$

La salve d'erreurs correspondante est, après décalage cyclique, 11111001.

Compte tenu de la discussion et des définitions précédentes, l'algorithme d'analyse des erreurs opère de la façon suivante:

Soient $p_1(m,N)$ et $p_2(k,N)$ les compteurs d'évènements d'erreurs de poids m et de salves d'erreurs de longueur k relativement à une longueur de bloc N.

POUR CHAQUE BLOC EN ERREUR:

Déterminer l'ensemble des entiers $L_1, L_2, \ldots, L_k$ associé à la séquence du type (2.2) ci-dessus déduite du bloc particulier.

En déduire la valeur M correspondante d'après (2.3) et augmenter d'une unité les valeurs des compteurs

$$p_1(N-\sum_1^k L_i, N) \text{ et } p_2(M, N).$$

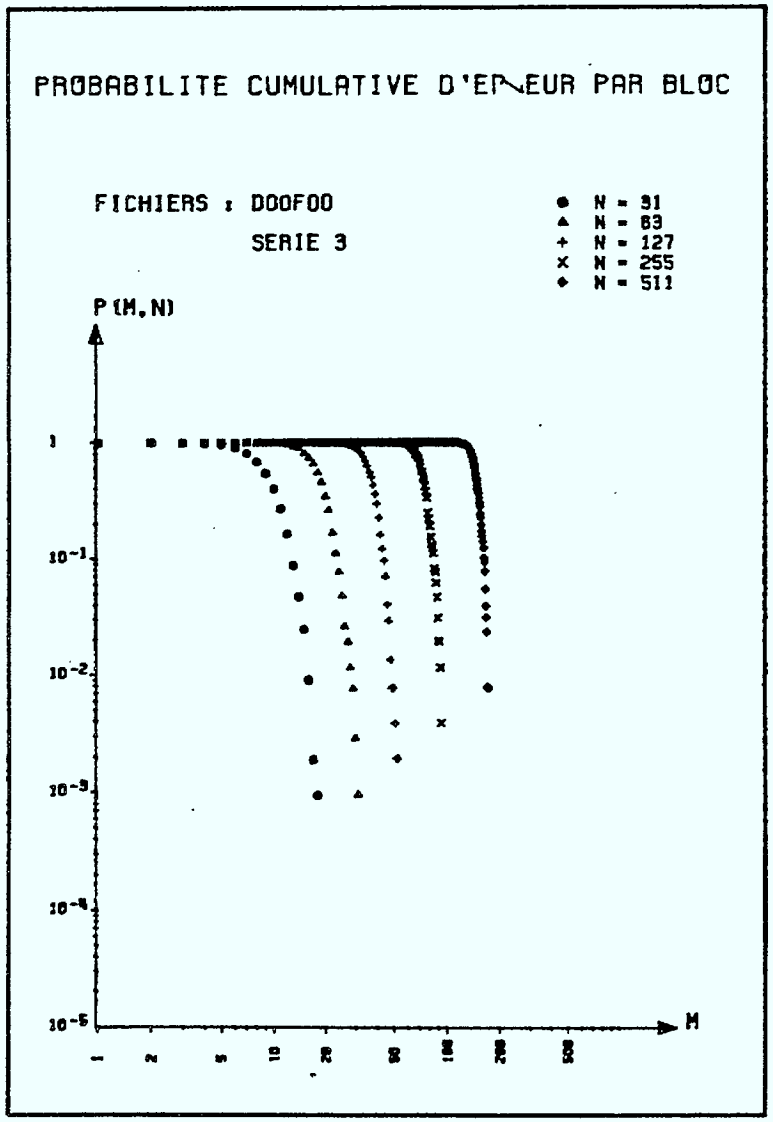
LORSQUE LA FIN DE L'ENREGISTREMENT EST ATTEINTE (sur un multiple de la longueur des blocs):

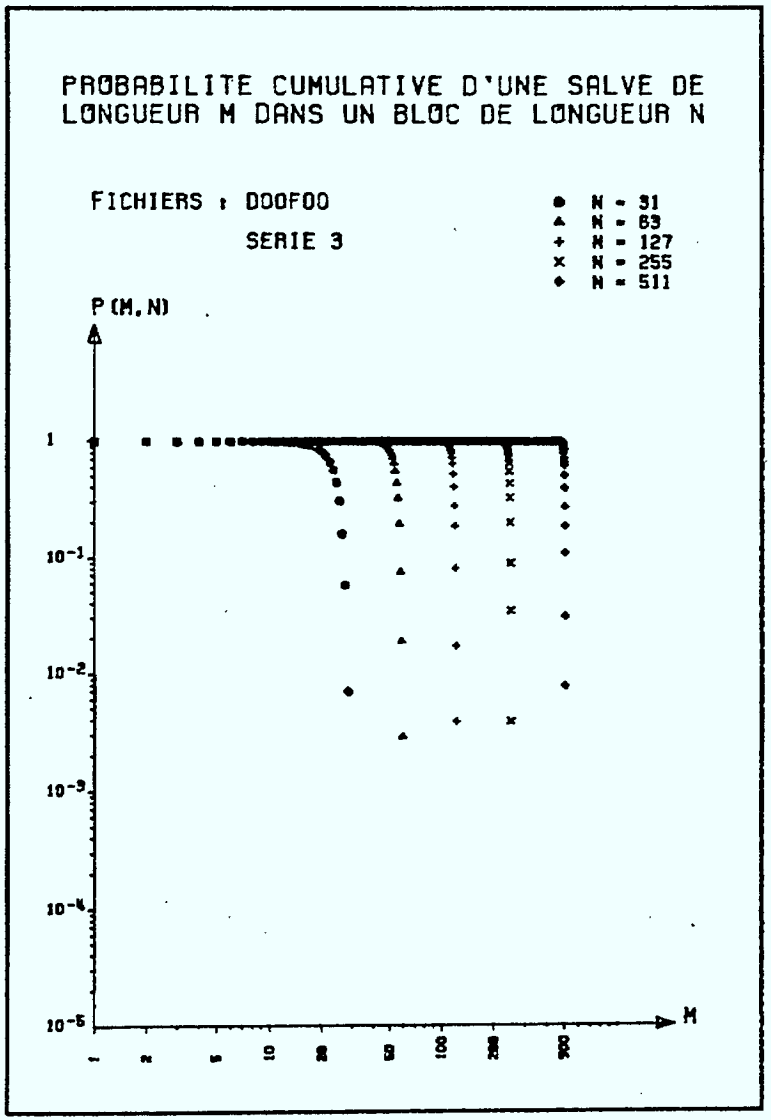
Déterminer les cumulatives des histogrammes enregistrés dans les compteurs $p_1(m, N)$ et $p_2(k, N)$ et former les moyennes correspondantes en divisant par le nombre de blocs analysés.

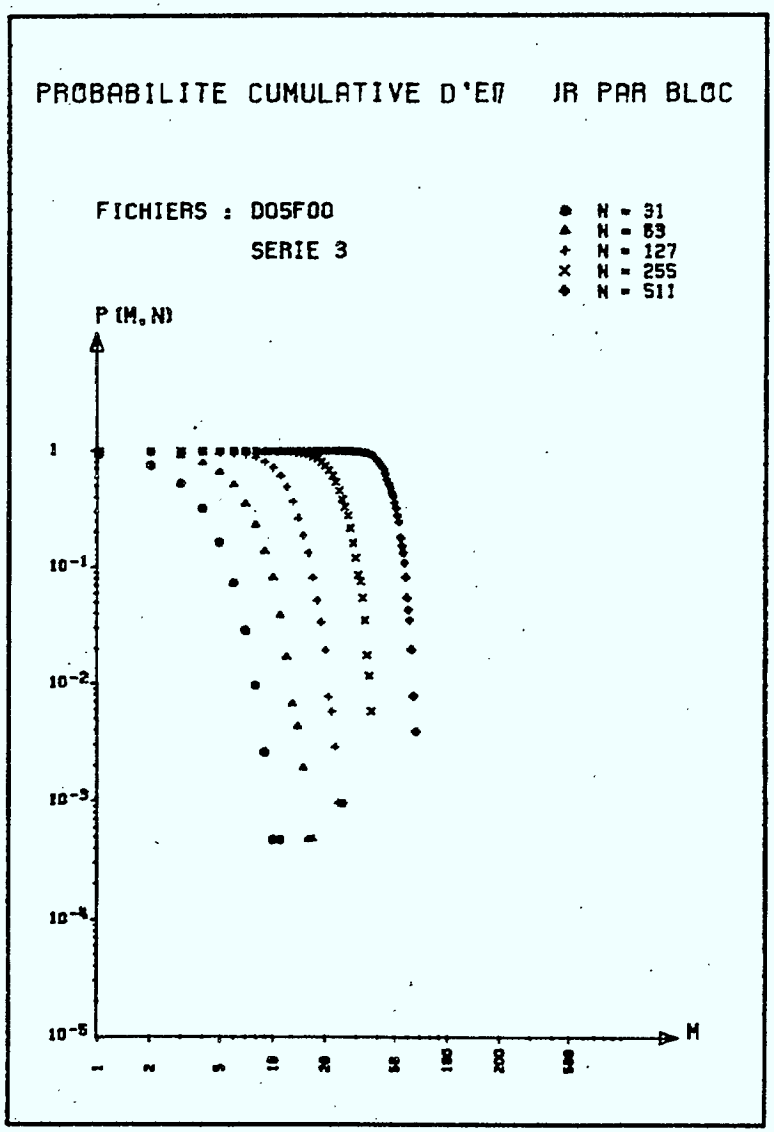
Le lecteur trouvera aux appendices A1, A2, A3 et A4 les courbes de distribution correspondant aux valeurs des paramètres et aux conditions de fonctionnement choisies en accord avec le responsable scientifique de ce projet.

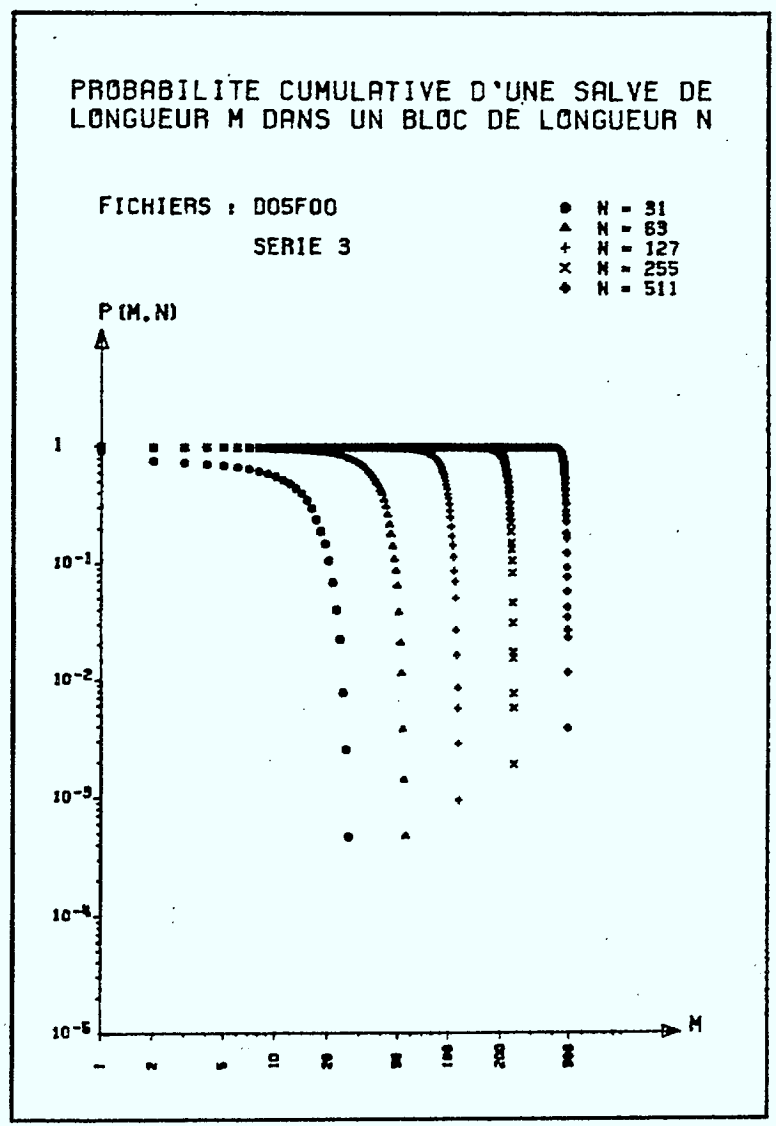
APPENDICE A1

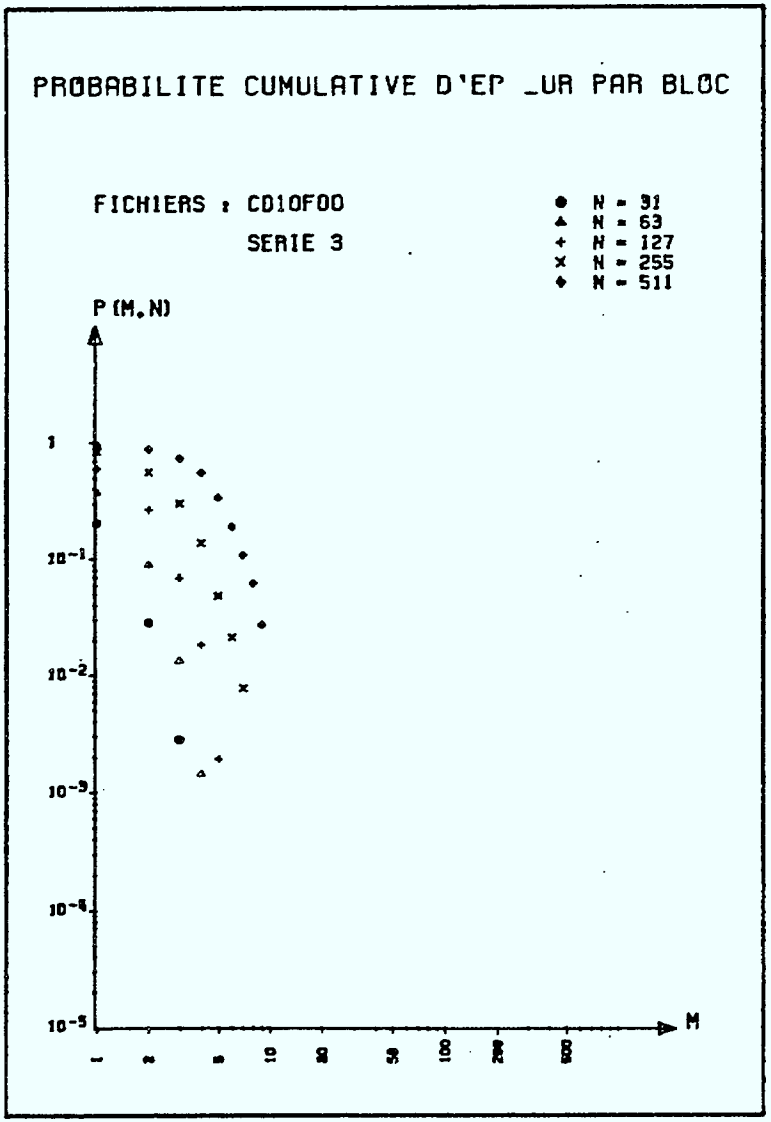
Dans cet appendice on trouvera les statistiques d'erreurs en présence de bruit seul. Les courbes qui sont tracées aux pages suivantes représentent les statistiques d'erreurs correspondant aux 5 valeurs de la longueur de bloc N=31,63,127,255,511 et ont été obtenues respectivement pour les valeurs du rapport signal à bruit C/N=0,5,10 dB (La valeur C/N=15 dB initialement prévue a été éliminée du fait de la non pertinence des valeurs obtenues pour cet enregistrement particulier) et correspondant aux fichiers respectifs D00F00, D05F00, D10F00 de la série d'enregistrements 03.

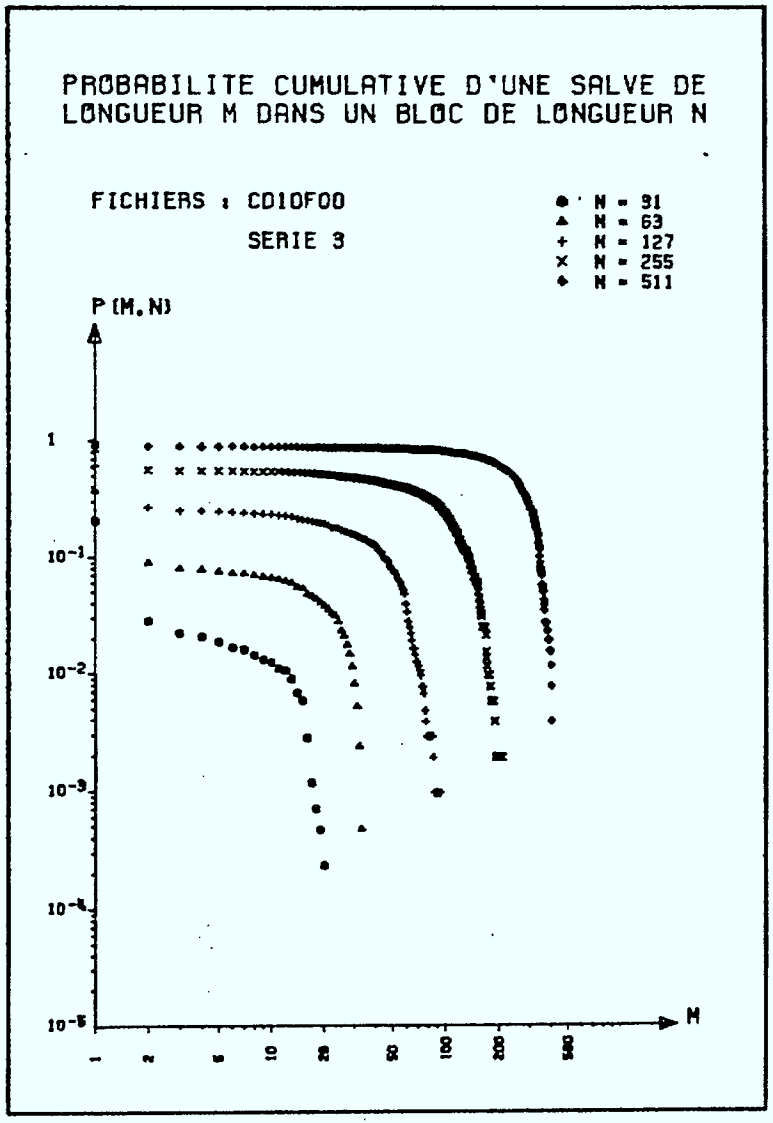

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : DOOFOO
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : DOOFOO
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'E7 JR PAR BLOC
FICHIERS : DOSFOO
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P (M, N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

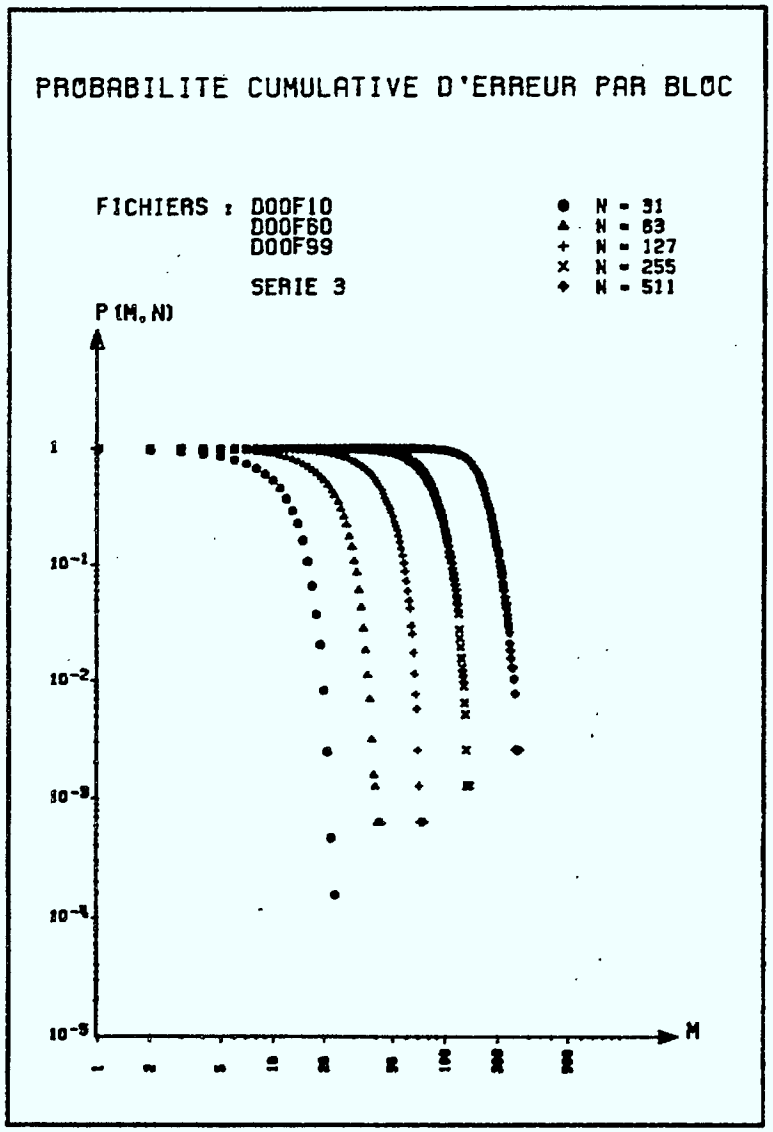

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : DOSFOO
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P (M, N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

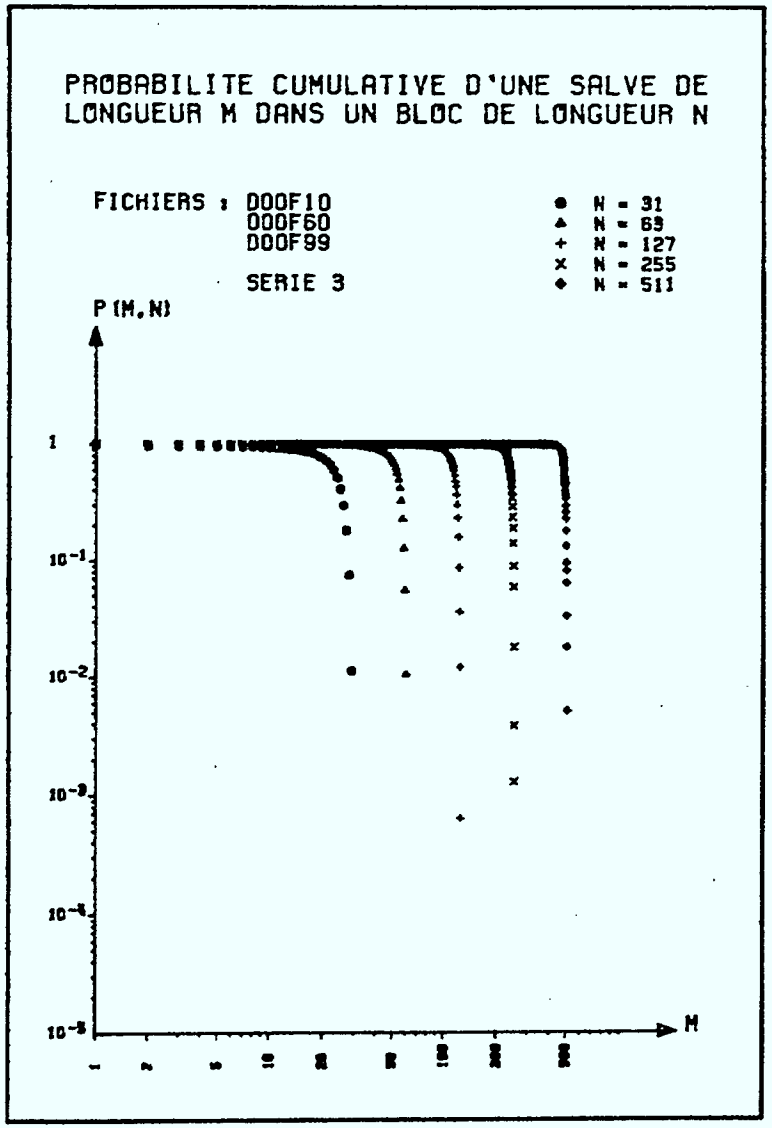

PROBABILITE CUMULATIVE D'EP _UR PAR BLOC
FICHIERS : CD10F00
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P (M, N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

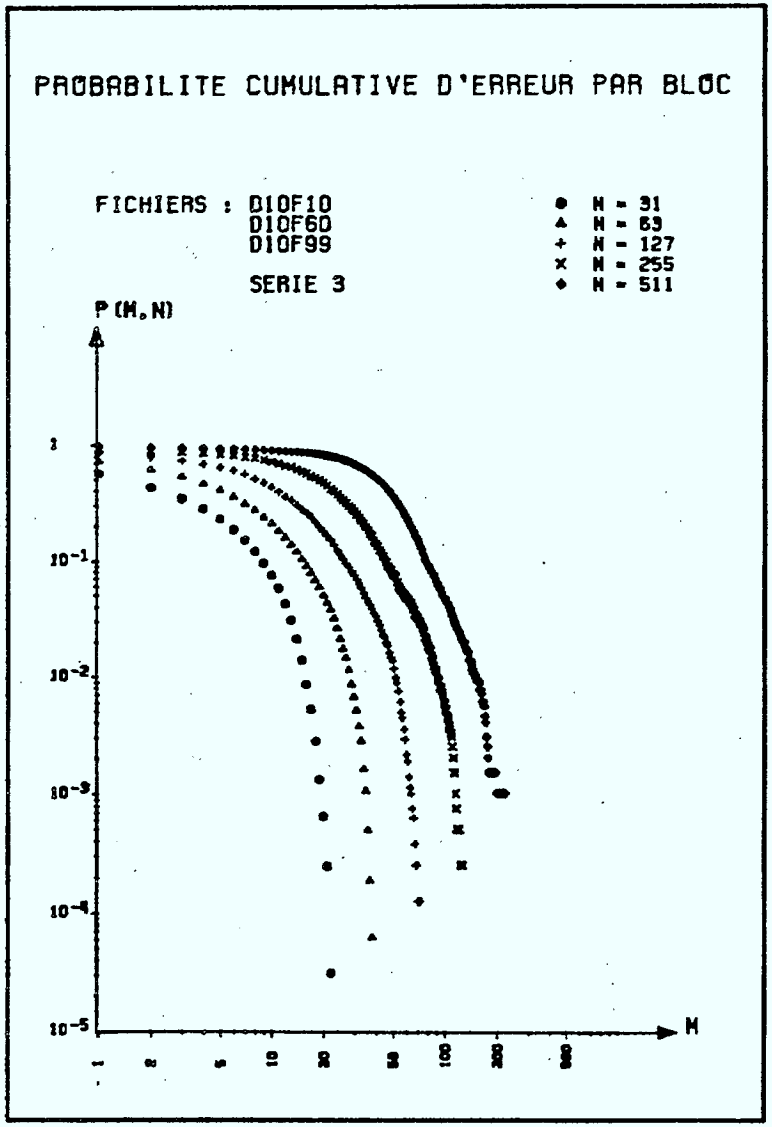

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : CD10F00
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P (M, N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

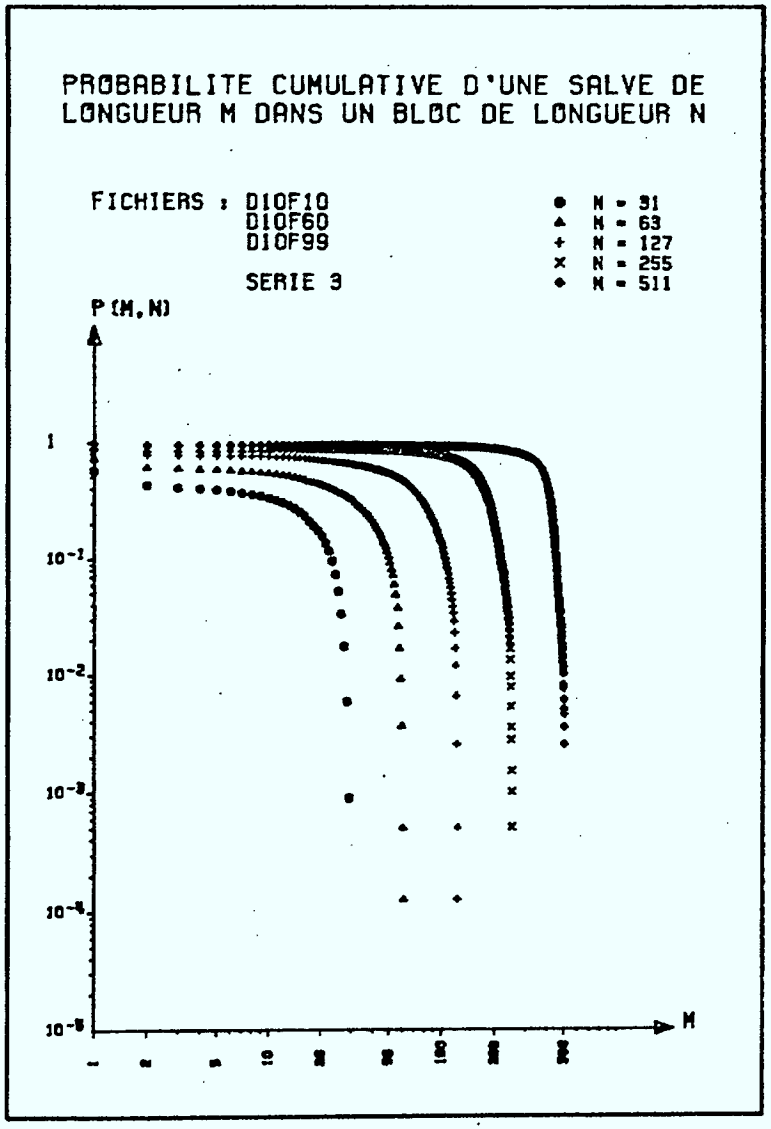
APPENDICE A2

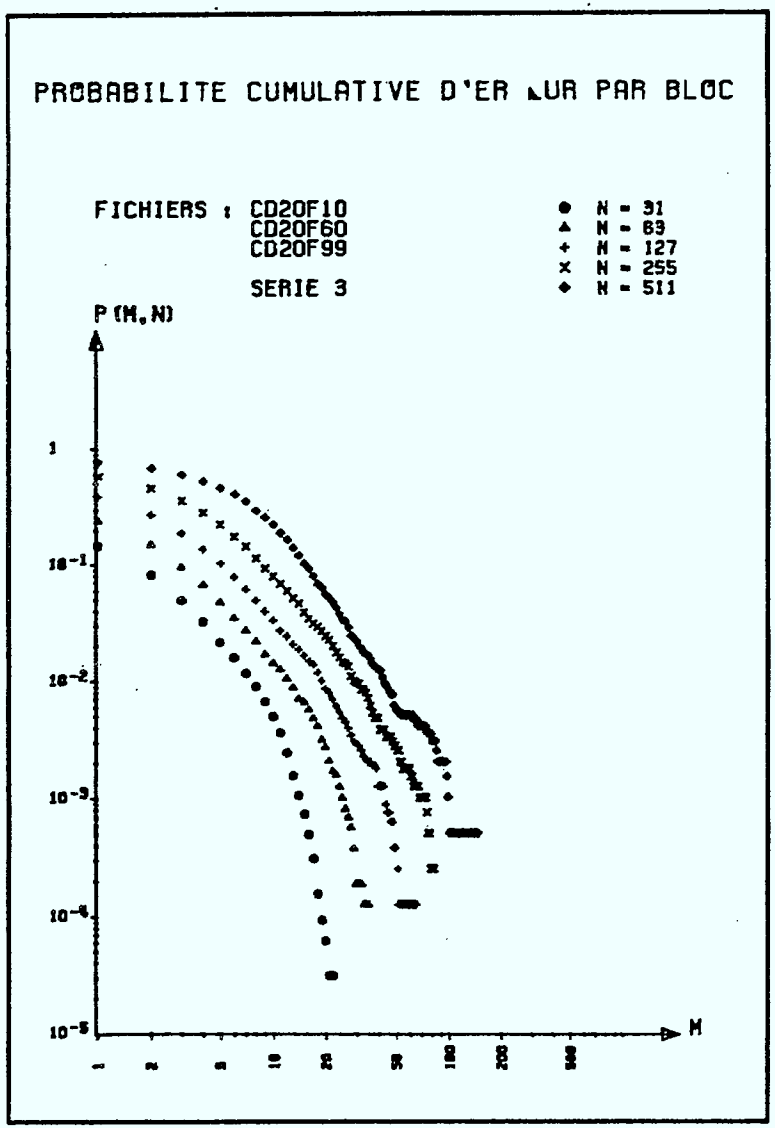
Dans cet appendice on trouvera les statistiques d'erreurs en présence de bruit et d'évanouissements de Rayleigh. Les courbes qui sont tracées aux pages suivantes représentent les statistiques d'erreurs correspondant aux 5 valeurs de la longueur de bloc N=31,63,127,255,511 et ont été obtenues respectivement comme la moyenne arithmétique des enregistrements obtenus pour les valeurs de fréquence Doppler 10, 60 et 100 Hz et pour les valeurs du rapport signal à bruit C/N=0,10,20,30,40,50 dB correspondant aux fichiers respectifs D00F10, D00F60, D00F99, D10F10, D10F60, D10F99 , . . . , D50F10, D50F60, D50F99 de la série d'enregistrements 03.

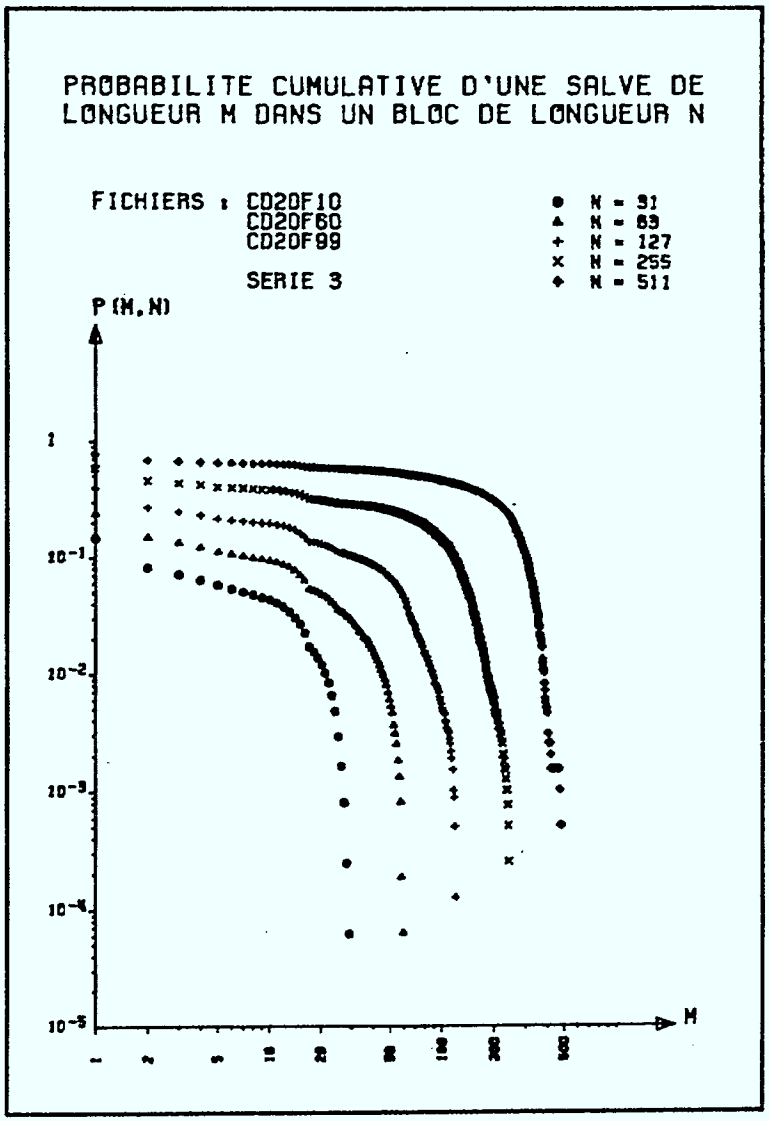

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : DOOF10
DOOF60
DOOF99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

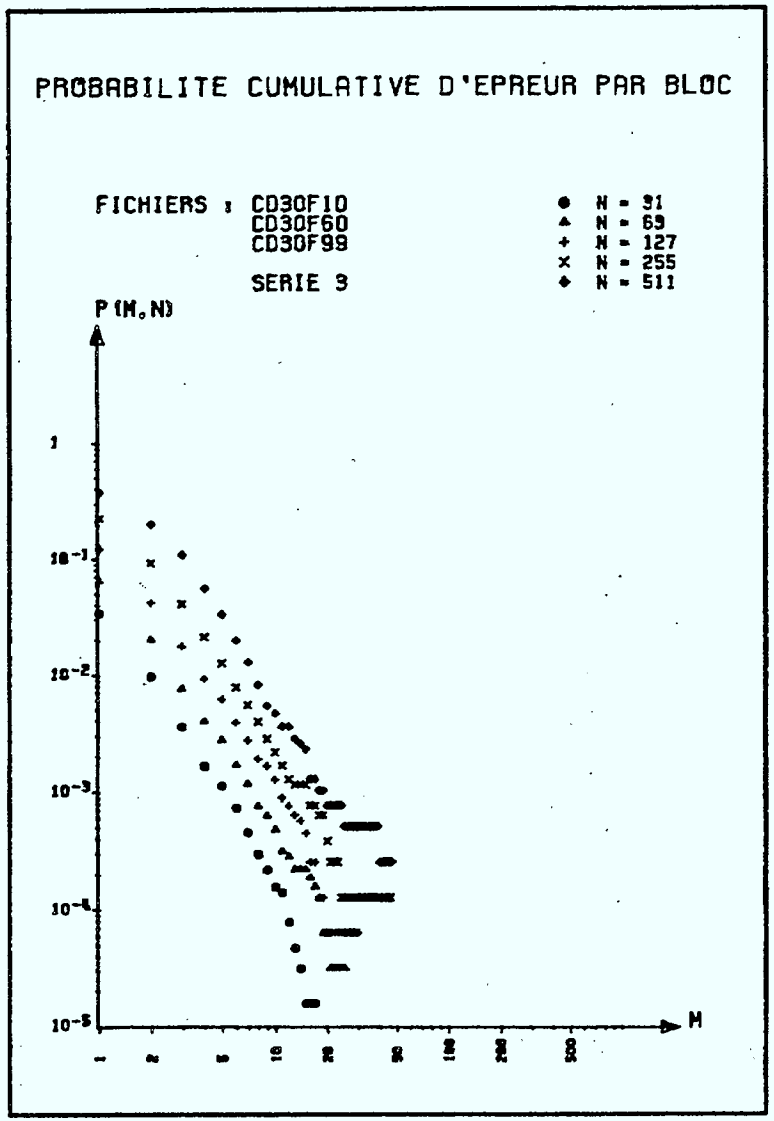

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : DOOF10
DOOF60
DOOF99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

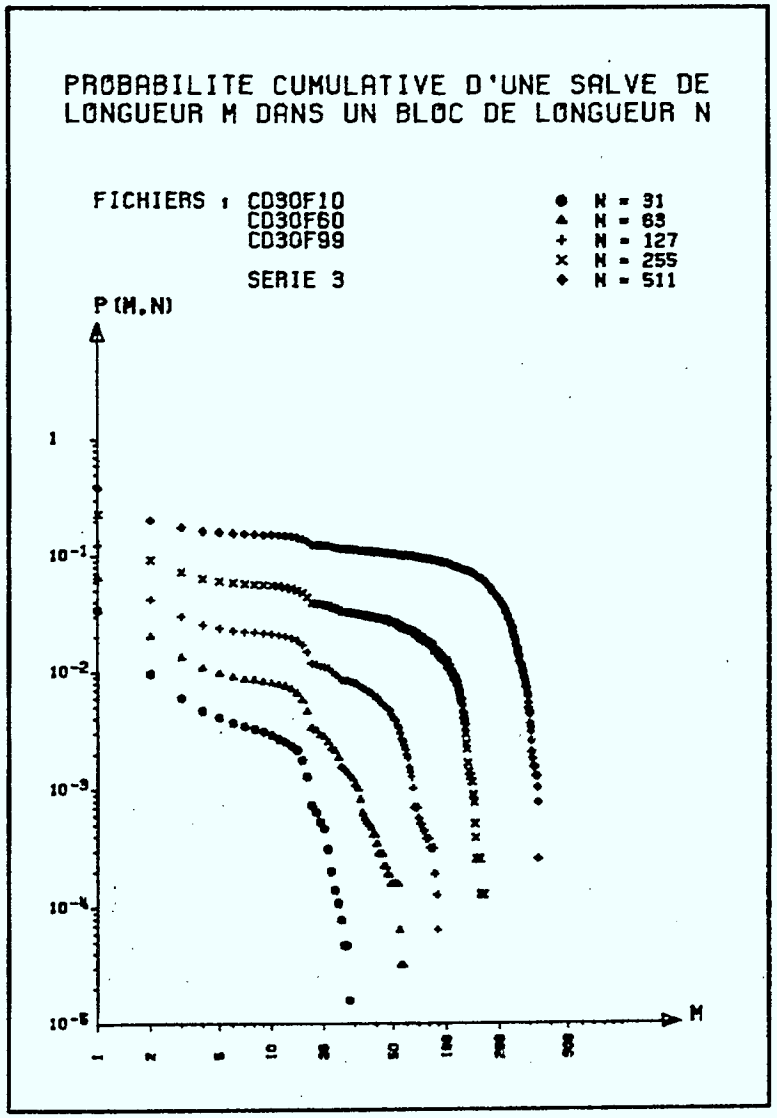

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : D10F10
D10F60
D10F99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P (M, N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

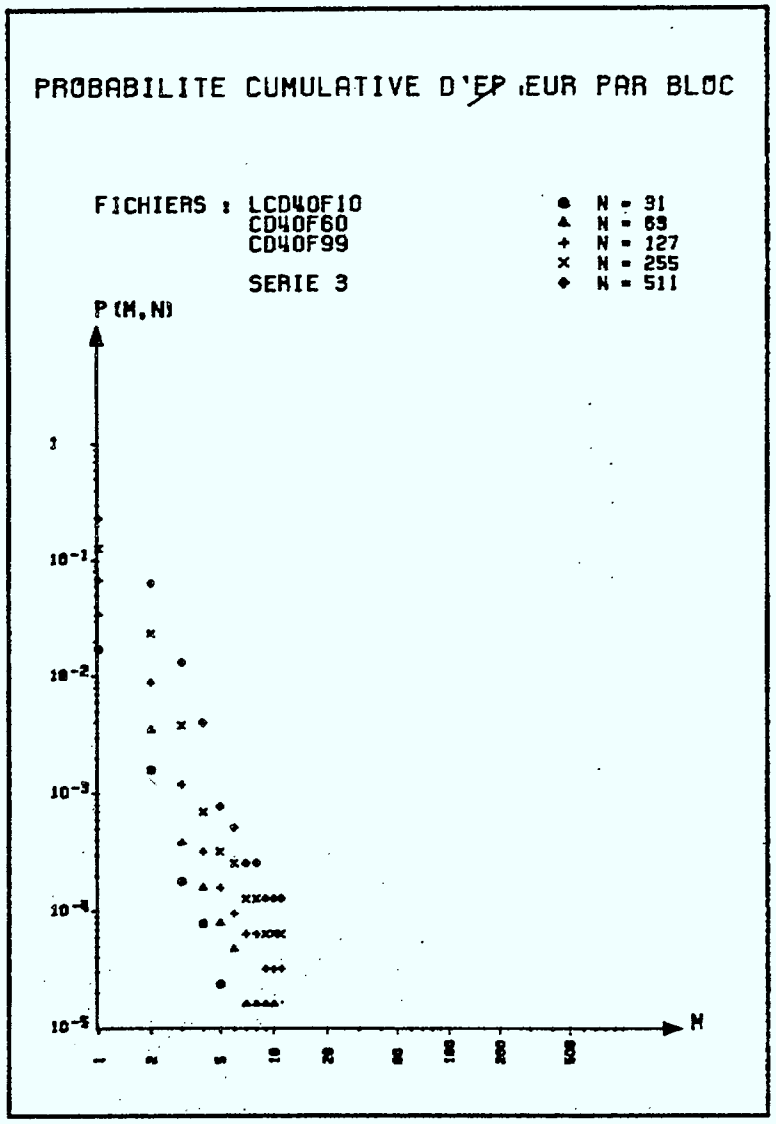

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : D10F10
D10F60
D10F99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P (M, N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

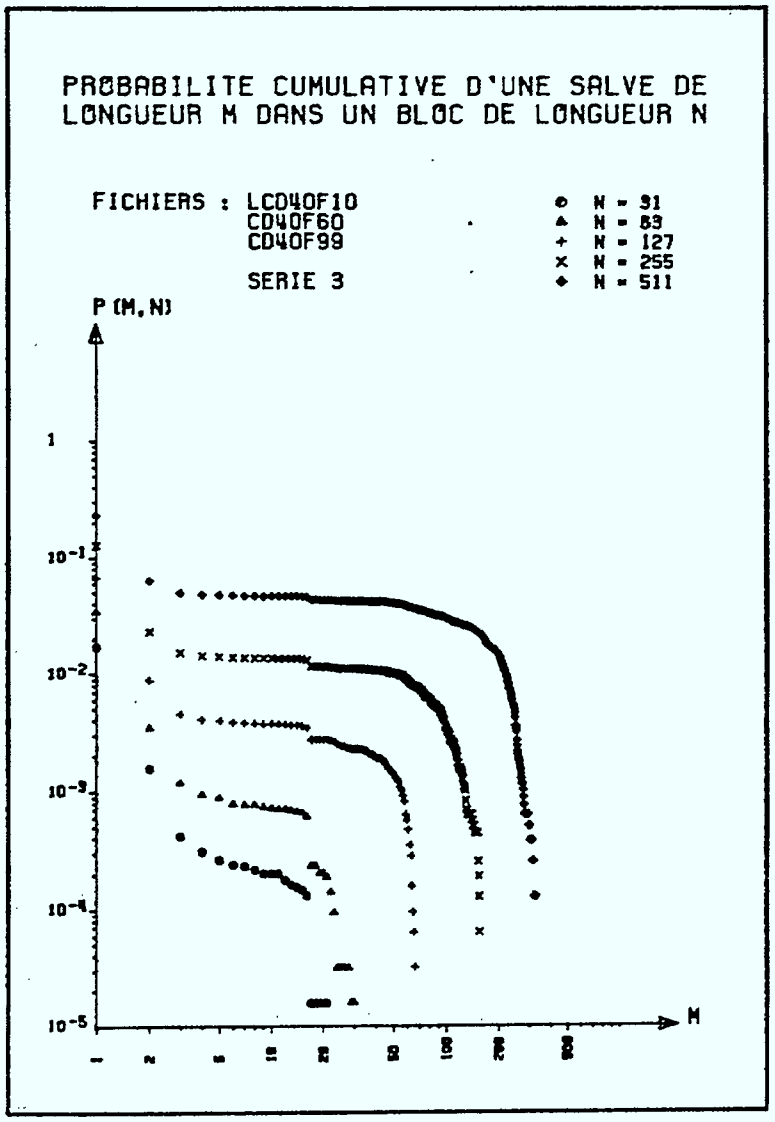

PROBABILITE CUMULATIVE D'ER ▲UR PAR BLOC
FICHIERS : CD20F10
CD20F60
CD20F99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

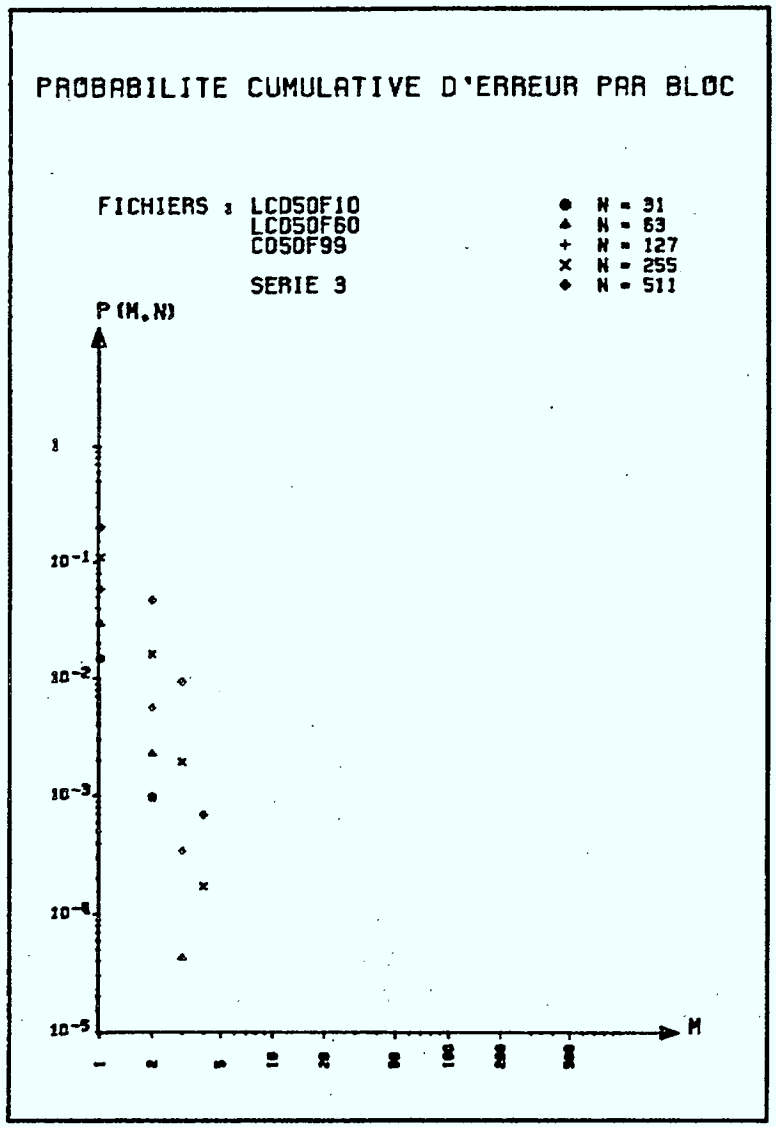

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : CD20F10
CD20F60
CD20F99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

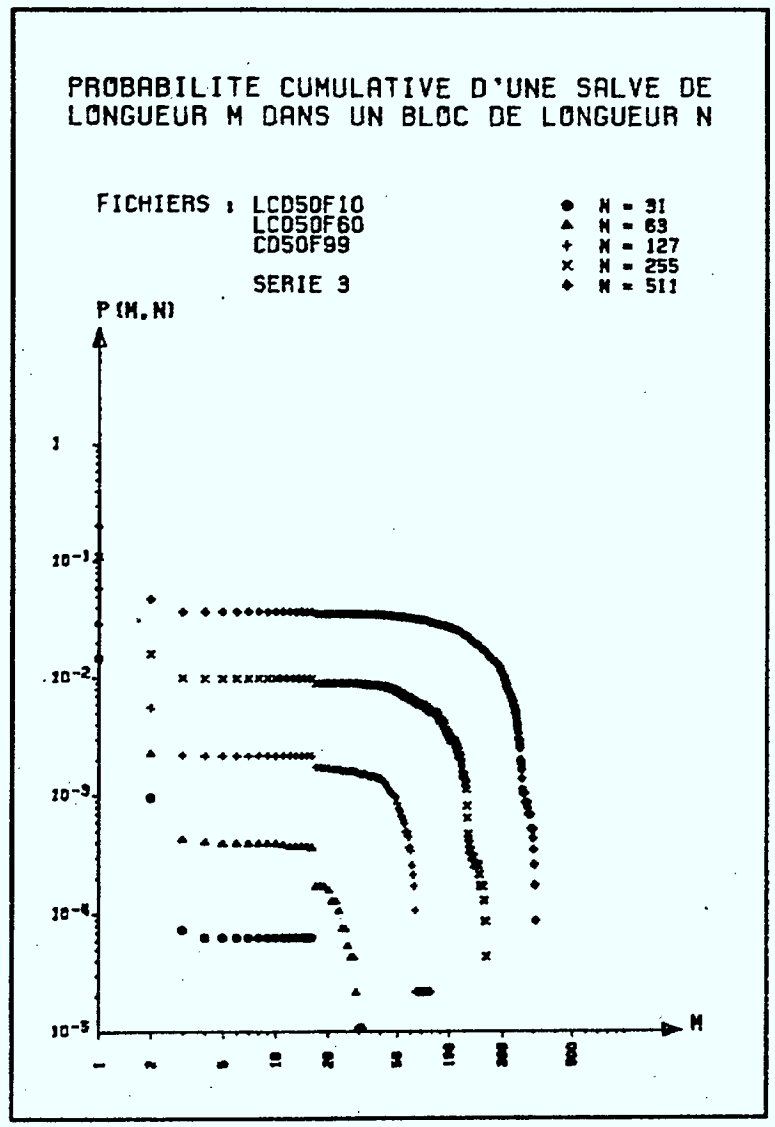

PROBABILITE CUMULATIVE D'EPREUR PAR BLOC
FICHIERS : CD30F10
CD30F60
CD30F99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : CD30F10
CD30F60
CD30F99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : LCD40F10
CD40F60
CD40F99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

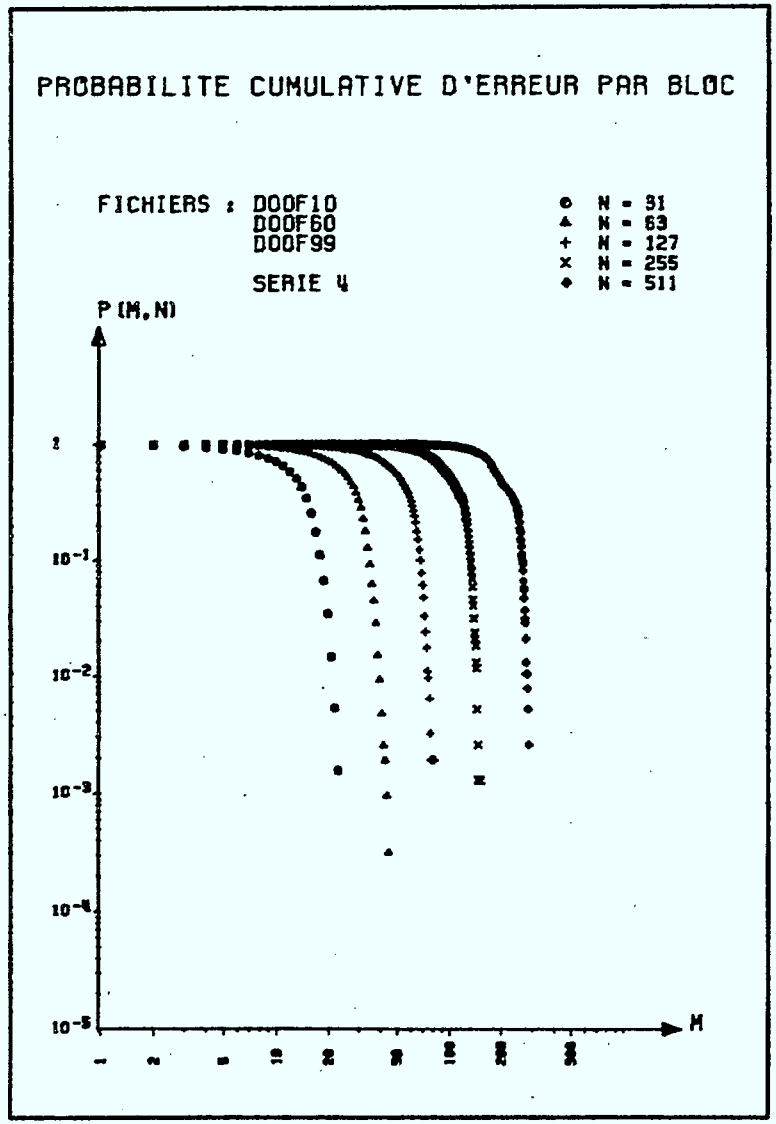

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : LCD40F10
CD40F60
CD40F99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

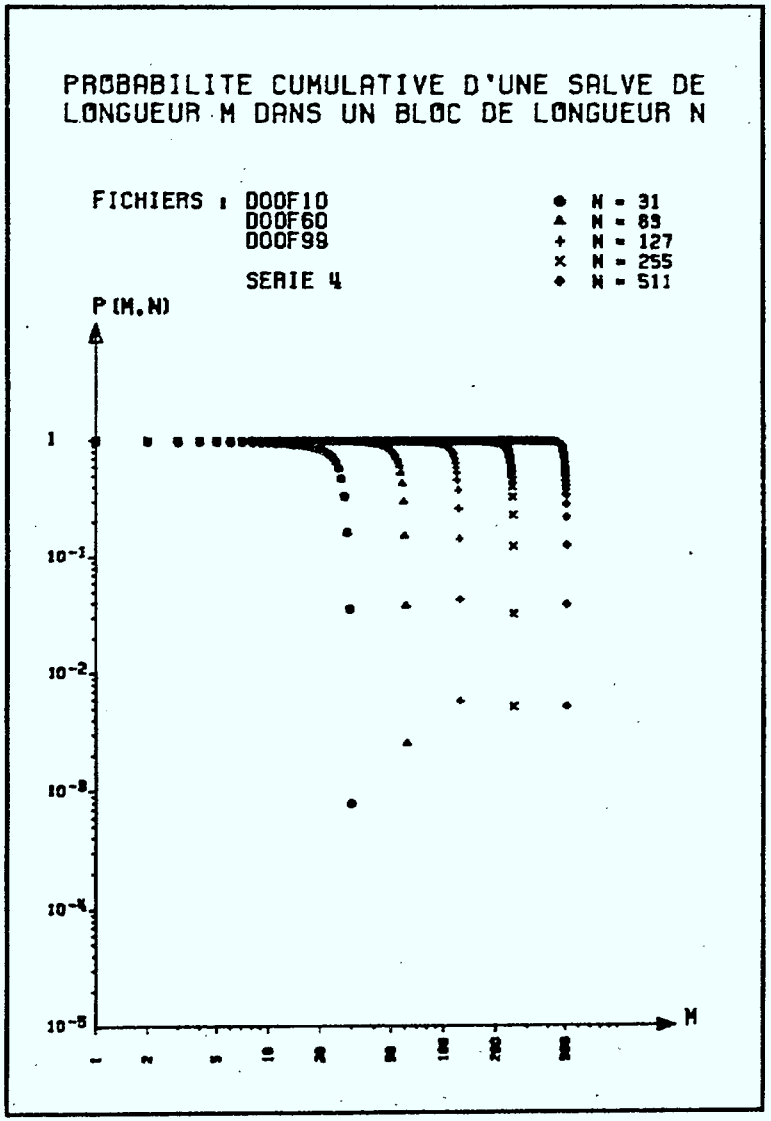

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : LCD50F10
LCD50F60
CD50F99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

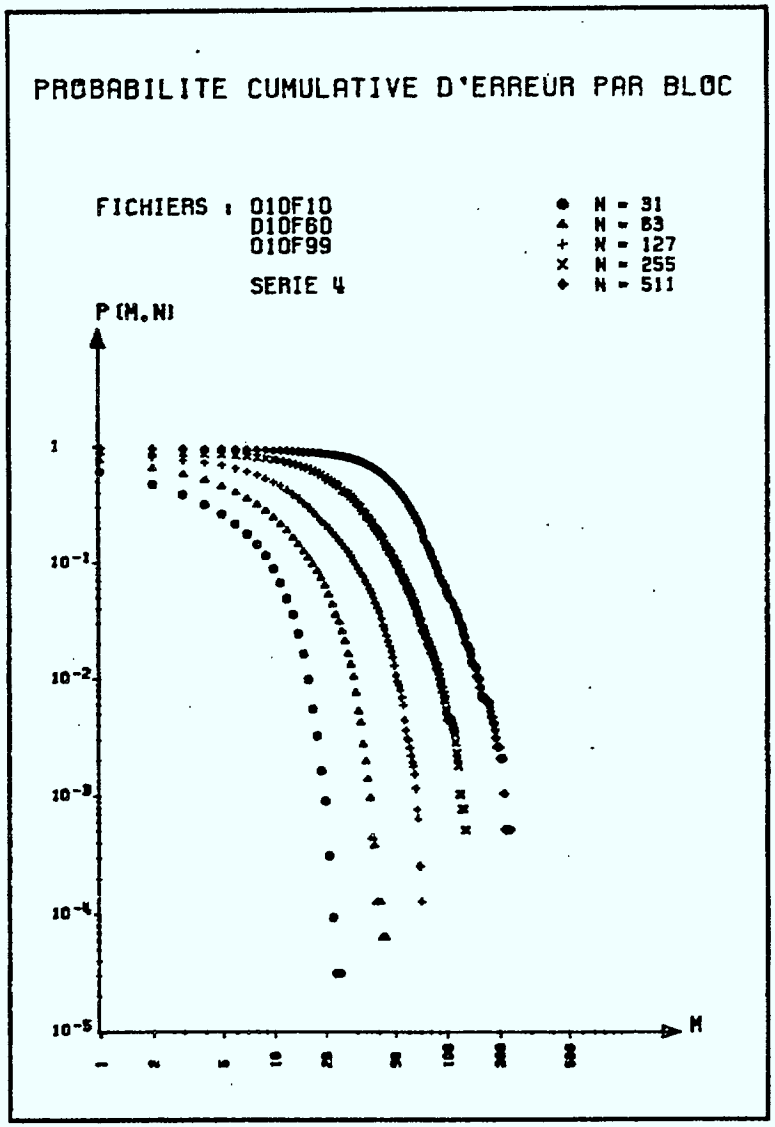

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : LCD50F10
LCD50F60
CD50F99
SERIE 3
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

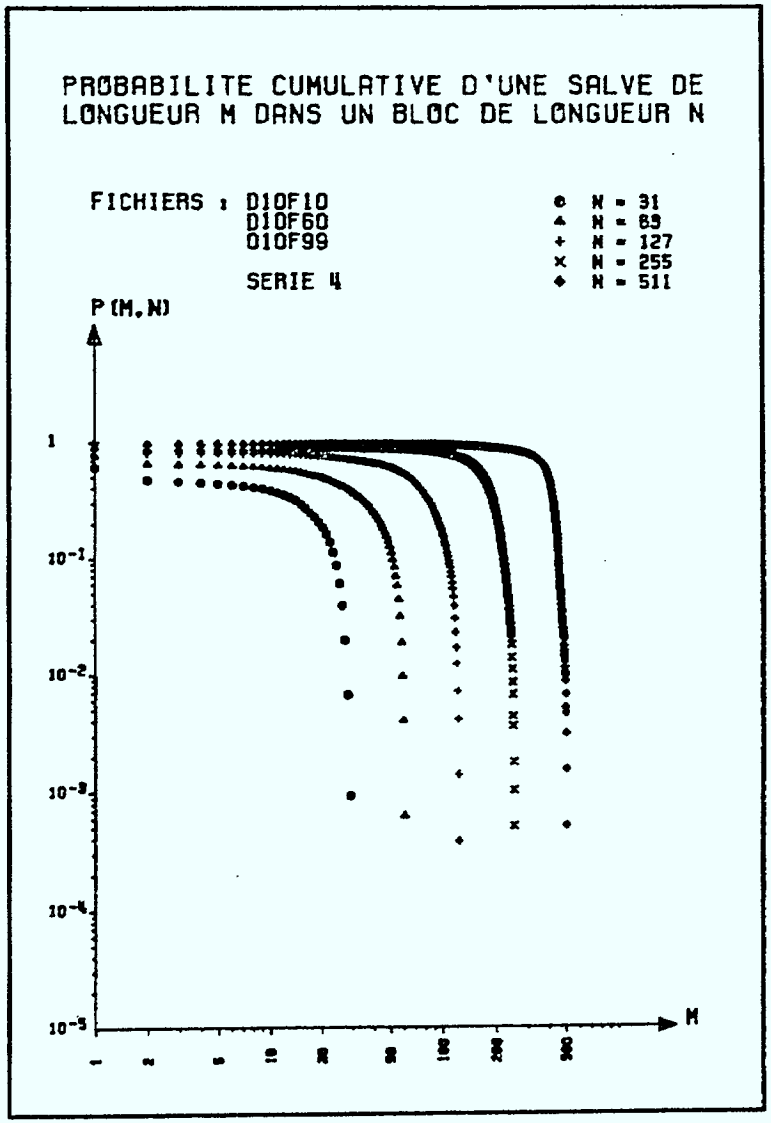
APPENDICE A3

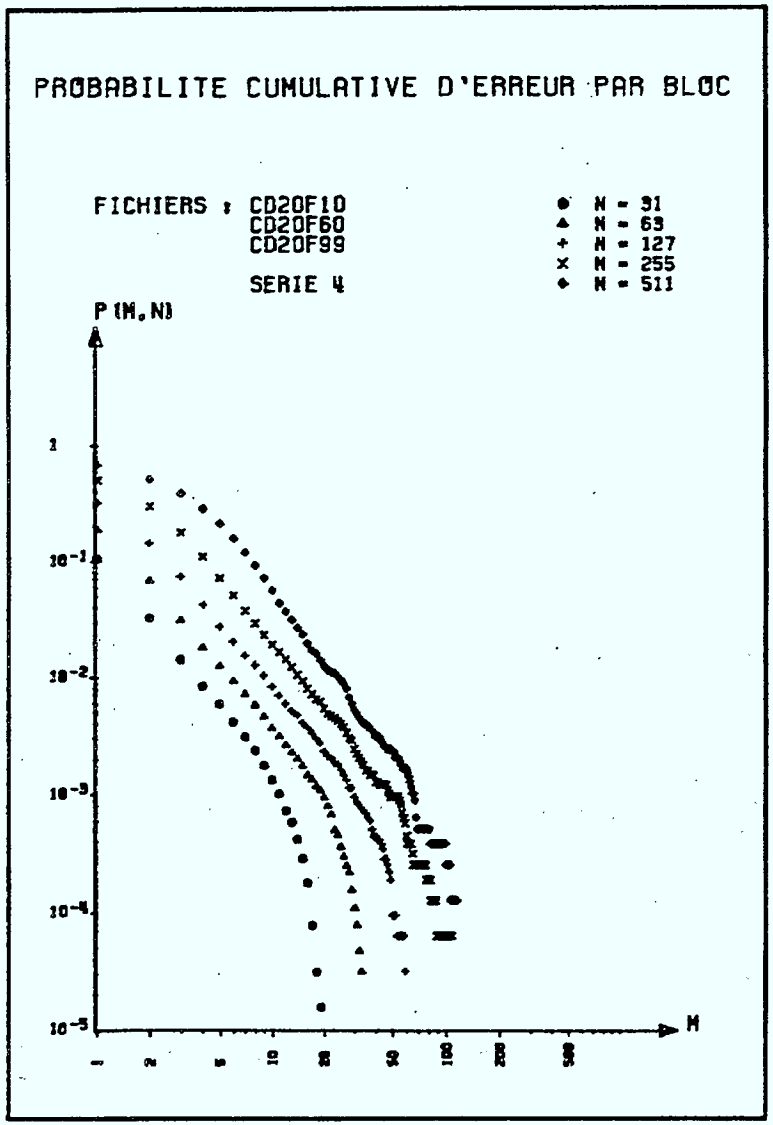
Dans cet appendice on trouvera les statistiques d'erreurs en présence de bruit et d'évanouissements de Rayleigh avec réception en diversité de fréquence, le seuil de commutation étant reglé à 9 dB en dessous du niveau moyen de porteuse. Les courbes qui sont tracées aux pages suivantes représentent les statistiques d'erreurs correspondant aux 5 valeurs de la longueur de bloc N=31,63,127,255,511 et ont été obtenues respectivement comme la moyenne arithmétique des enregistrements obtenus pour les valeurs de fréquence Doppler 10, 60 et 100 Hz et pour les valeurs du rapport signal à bruit C/N=0,10,20,30,40,50 dB correspondant aux fichiers respectifs D00F10, D00F60, D00F99, D10F10, D10F60, D10F99 , . . . , D50F10, D50F60, D50F99 de la série d'enregistrements 04.

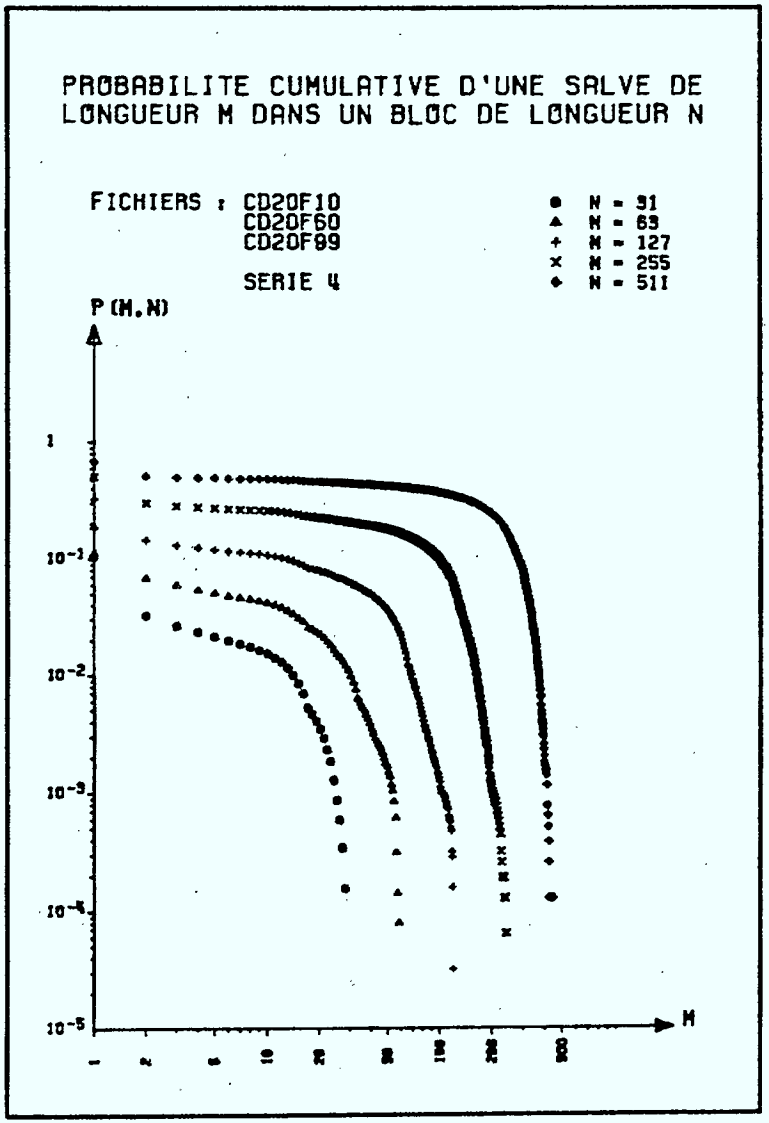

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : DOOF10
DOOF60
DOOF99
SERIE 4
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

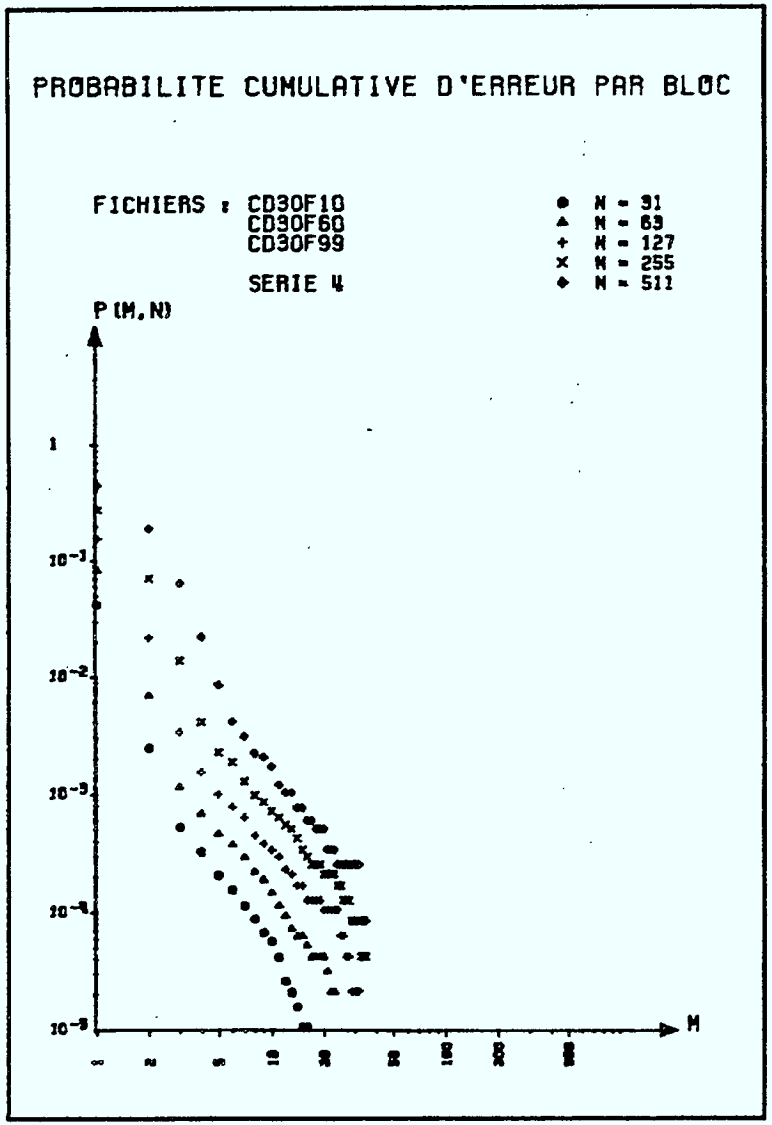

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : DOOF10
DOOF60
DOOF98
SERIE 4
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

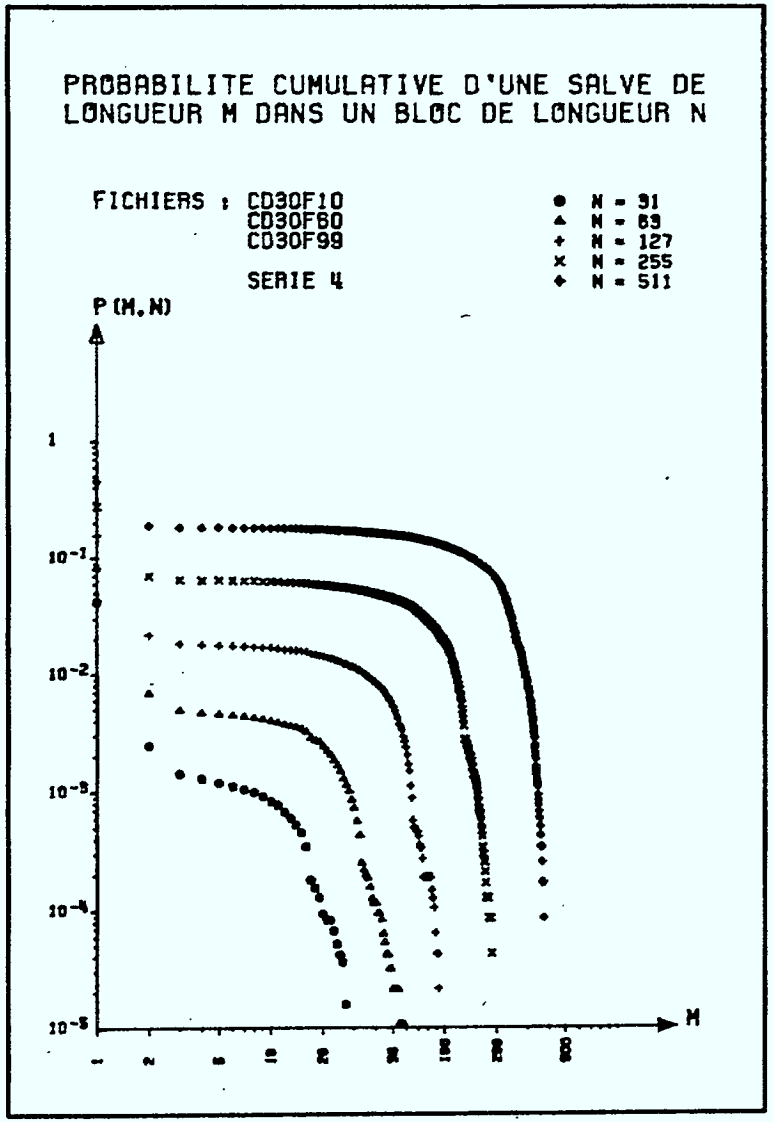

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : D10F10
D10F60
D10F99
SERIE 4
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

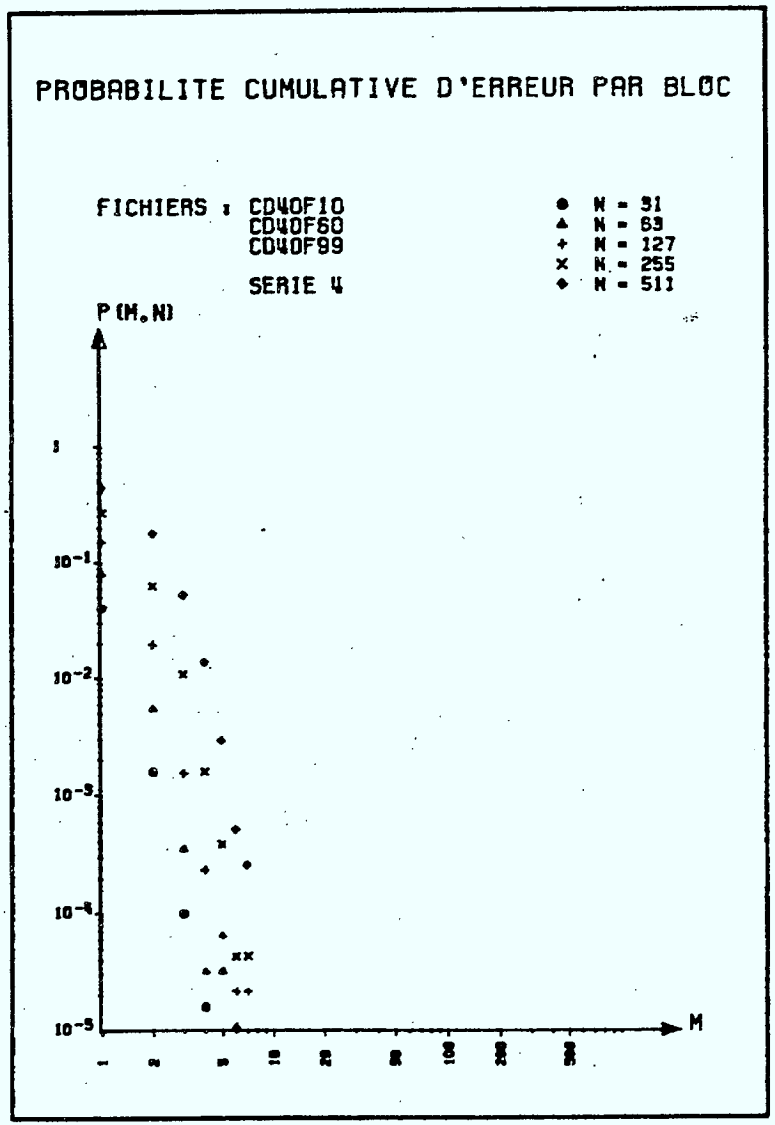

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : D10F10
D10F60
D10F99
SERIE 4
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

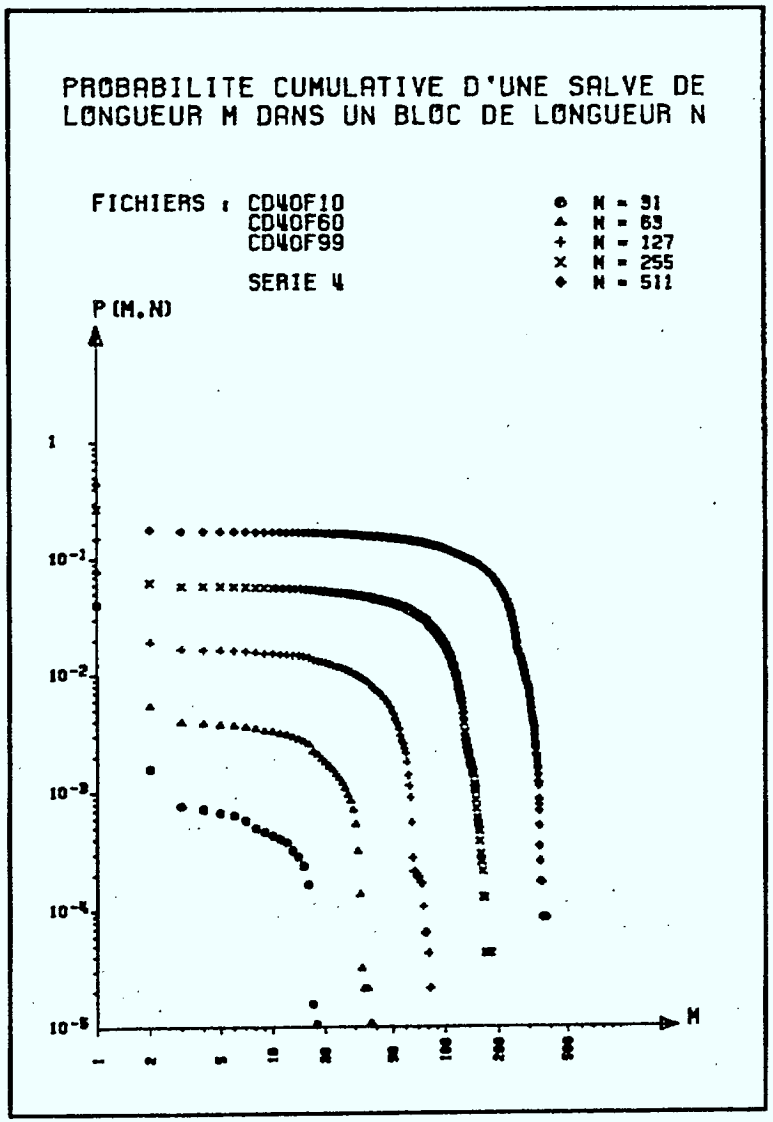

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : CD20F10
CD20F60
CD20F99
SERIE 4
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : CD20F10
CD20F60
CD20F99
SERIE 4
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : CD30F10
CD30F60
CD30F99
SERIE 4
N = 31
N = 69
N = 127
N = 255
N = 511
P (M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : CD30F10
CD30F60
CD30F99
SERIE 4
N = 31
N = 69
N = 127
N = 255
N = 511
P (M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : CD40F10
CD40F60
CD40F99
SERIE 4
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

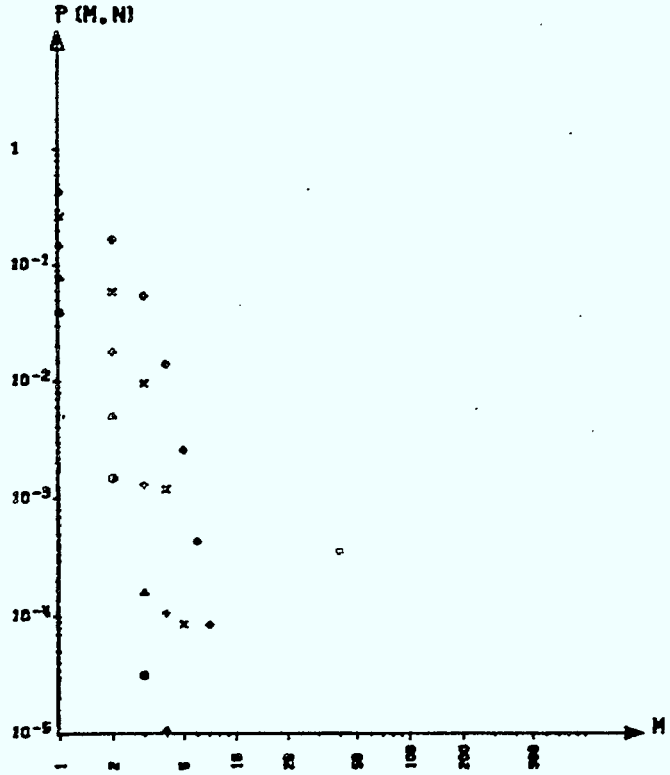

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : CD40F10
CD40F60
CD40F99
SERIE 4
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC

FICHIERS : LCD50F10
CD50F60
CD50F99

SERIE 4

● N = 31
▲ N = 63
+ N = 127
× N = 255
◆ N = 511

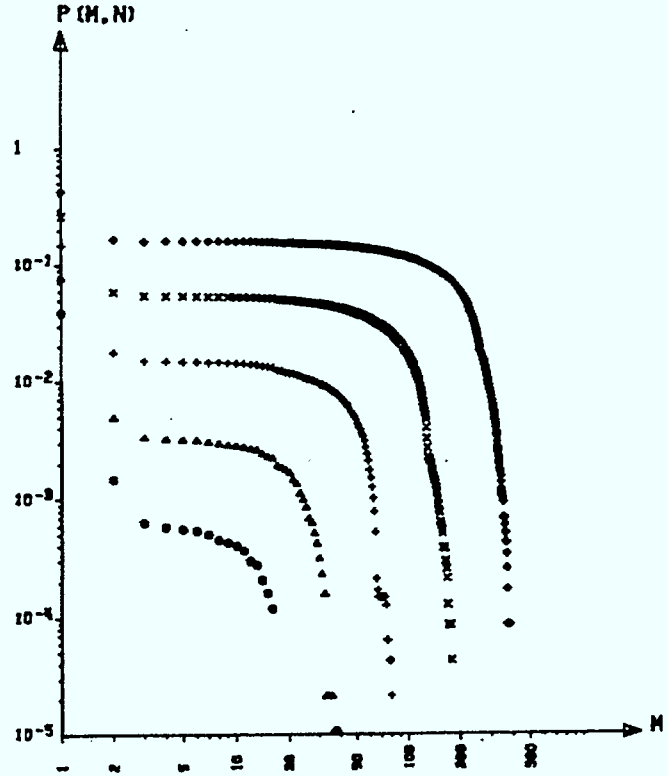


PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N

FICHIERS : LCD50F10
CD50F60
CD50F99

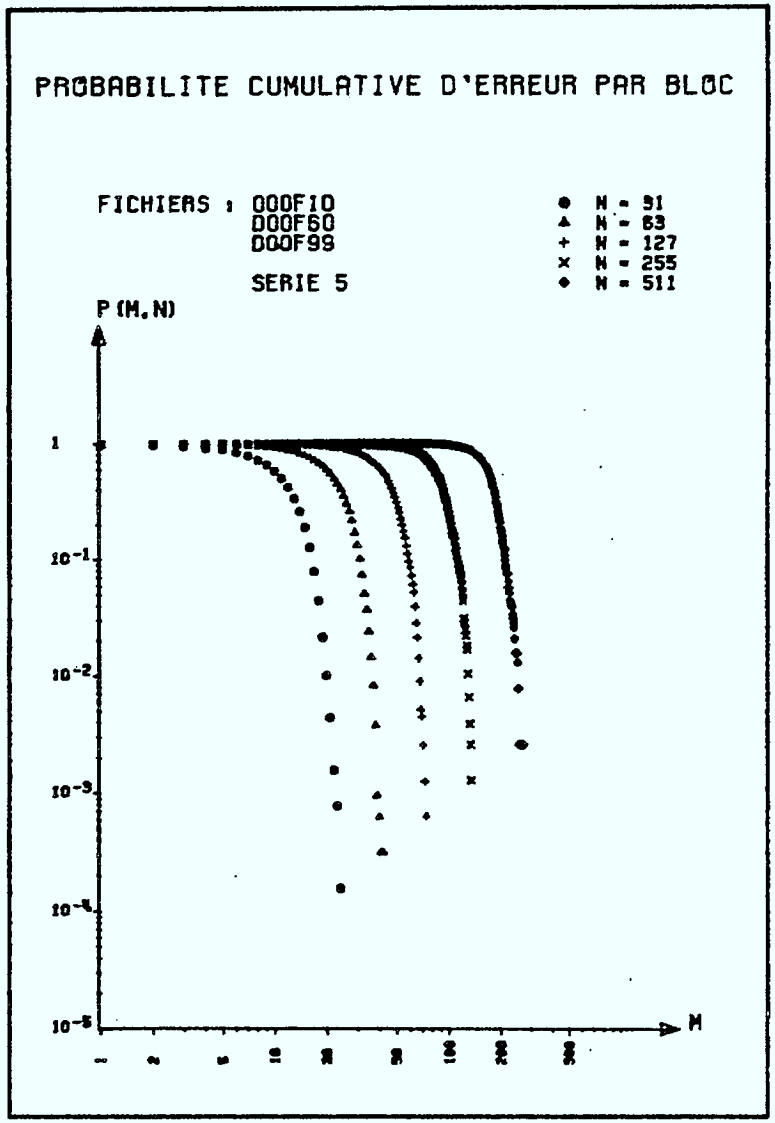
SERIE 4

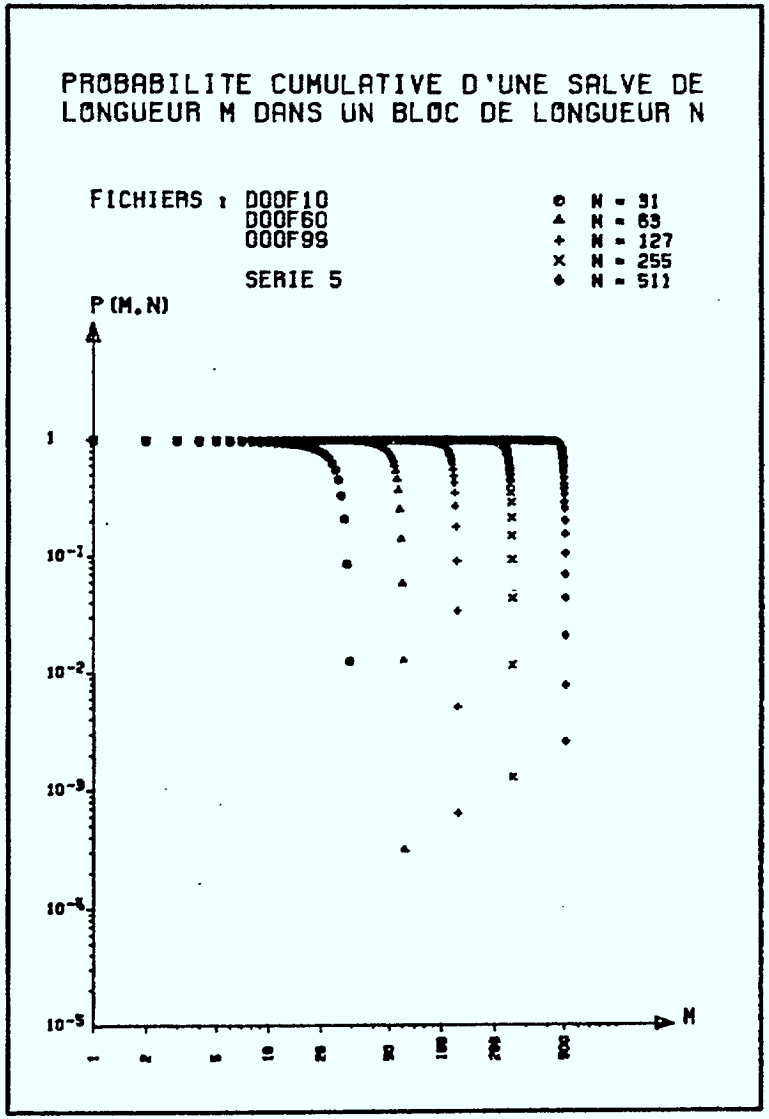
● N = 31
▲ N = 63
+ N = 127
× N = 255
◆ N = 511

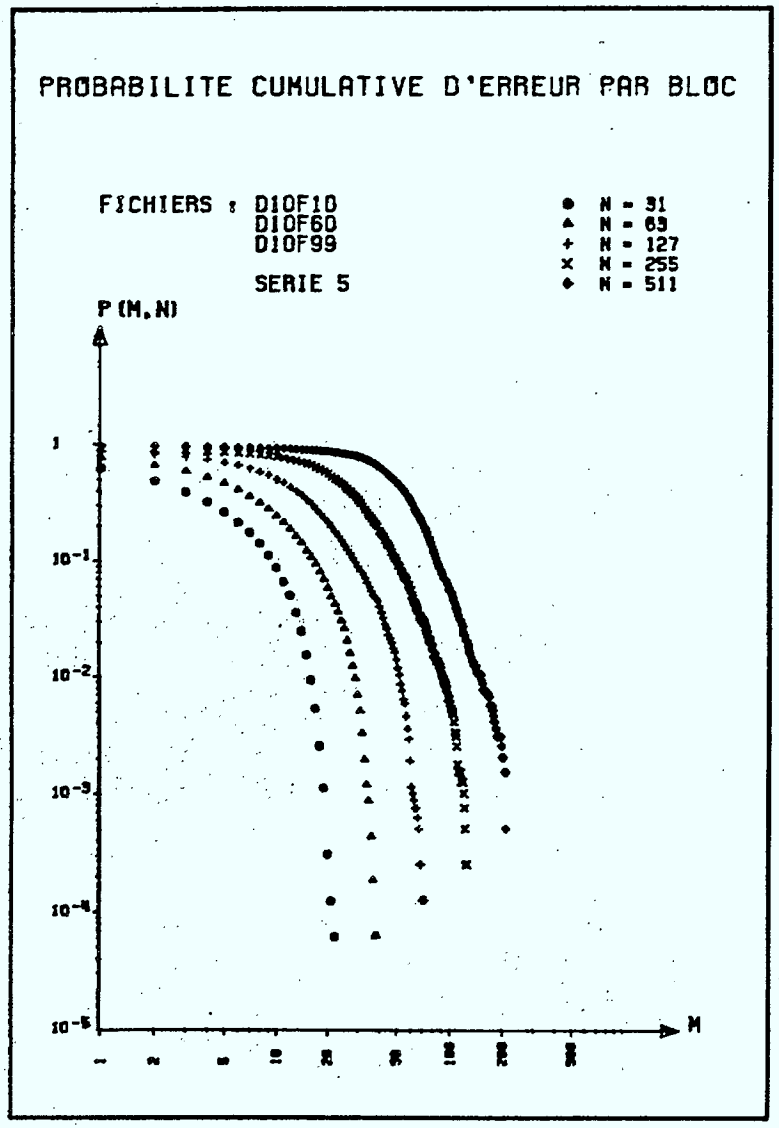


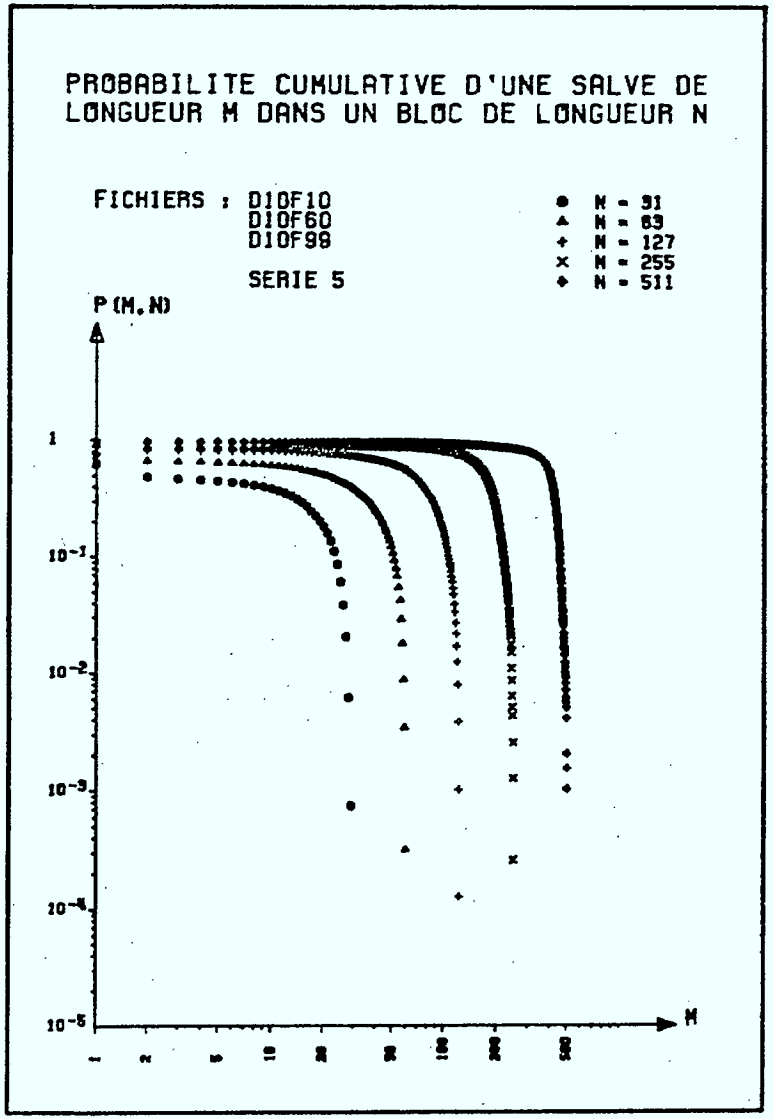
APPENDICE A4

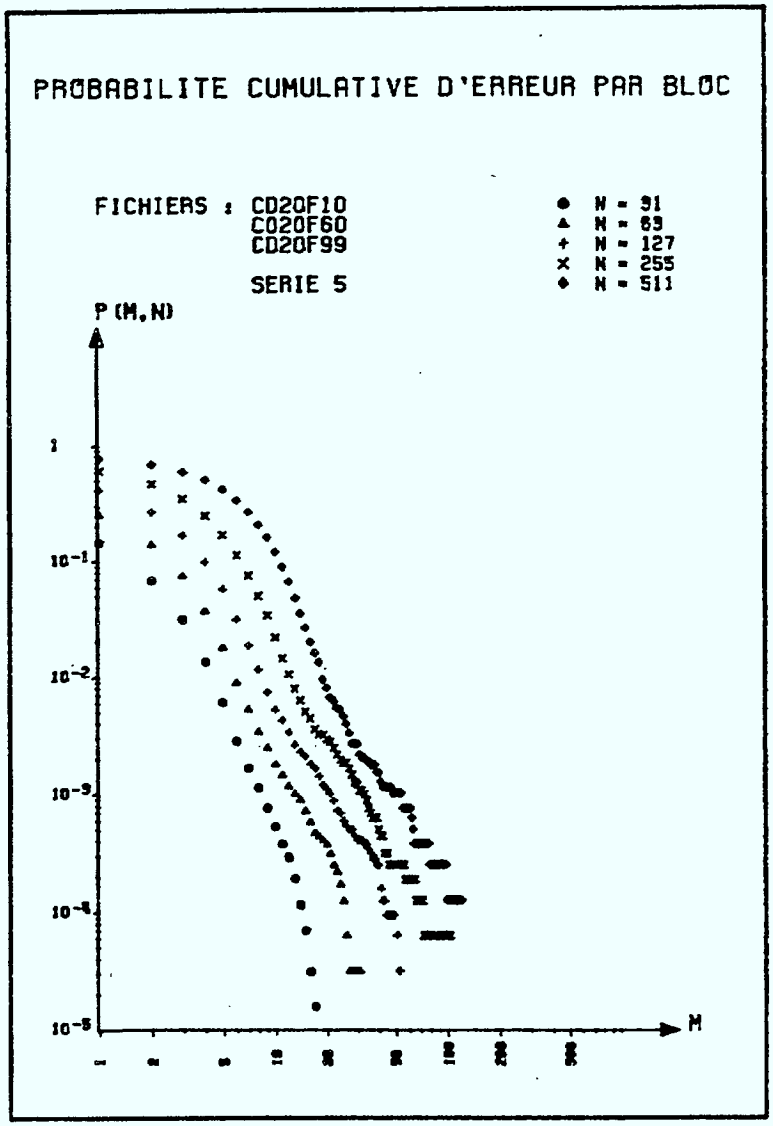
Dans cet appendice on trouvera les statistiques d'erreurs en présence de bruit et d'évanouissements de Rayleigh avec réception en diversité de fréquence, le seuil de commutation étant fonction du rapport moyen de la porteuse au bruit. Les courbes qui sont tracées aux pages suivantes représentent les statistiques d'erreurs correspondant aux 5 valeurs de la longueur de bloc N=31,63,127,255,511 et ont été obtenues respectivement comme la moyenne arithmétique des enregistrements obtenus pour les valeurs de fréquence Doppler 10, 60 et 100 Hz et pour les valeurs du rapport signal à bruit C/N=0,10,20,30,40,50 dB correspondant aux fichiers respectifs D00F10, D00F60, D00F99, D10F10, D10F60, D10F99 , . . . , D50F10, D50F60, D50F99 de la série d'enregistrements 05.

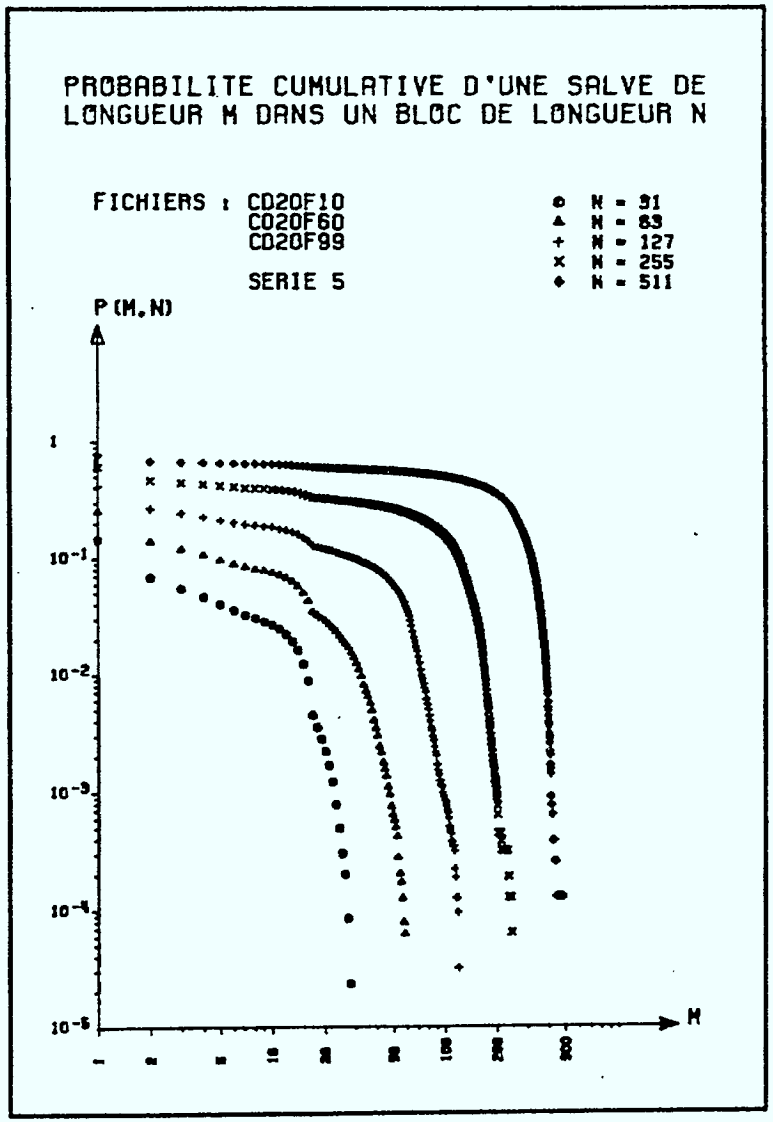

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : 000F10
000F60
000F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

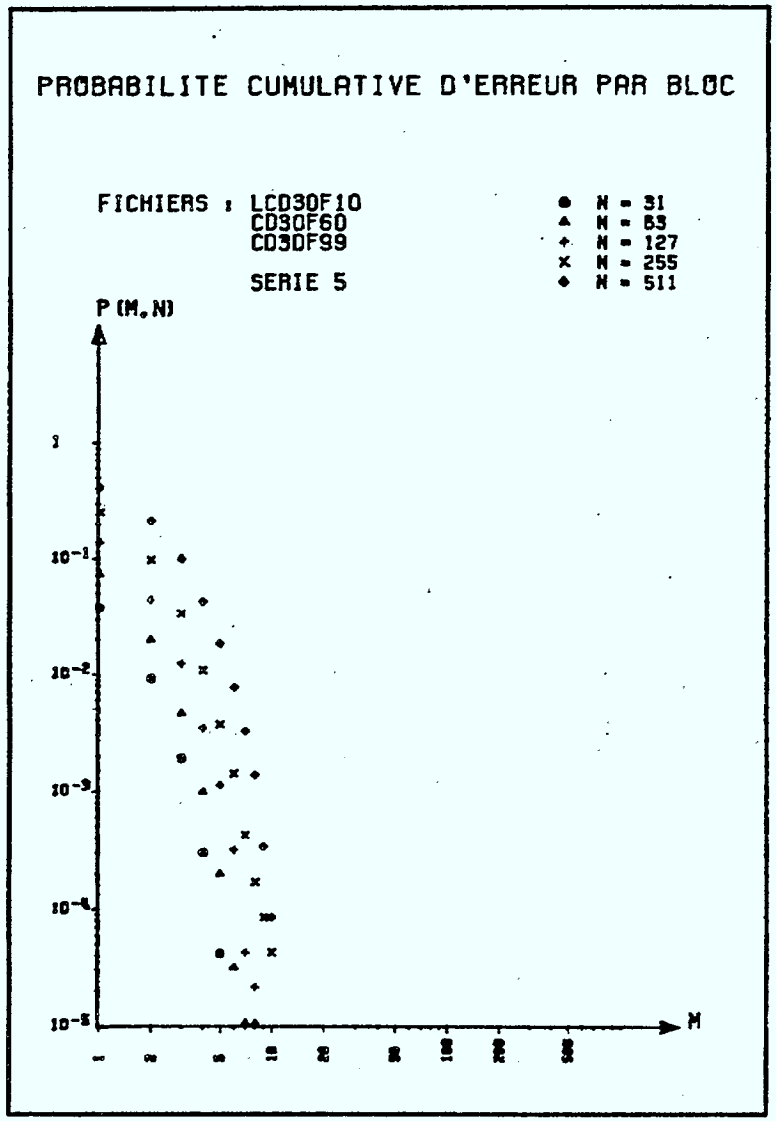

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : 000F10
000F60
000F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

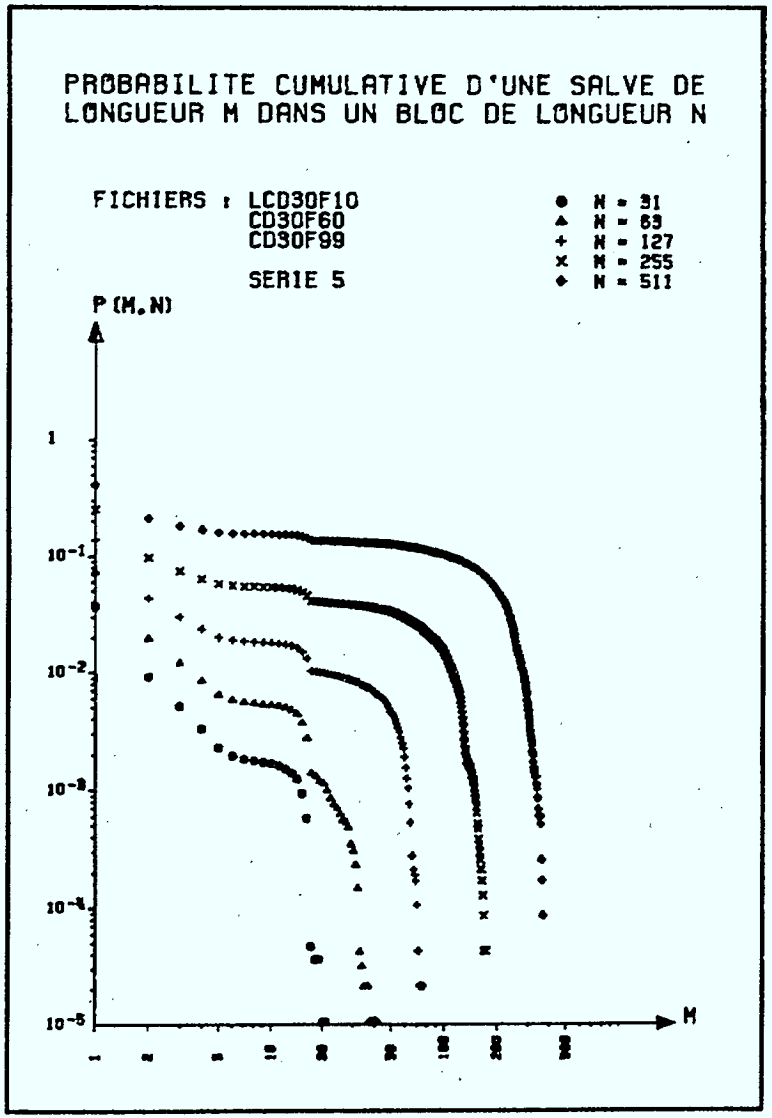

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : D10F10
D10F60
D10F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

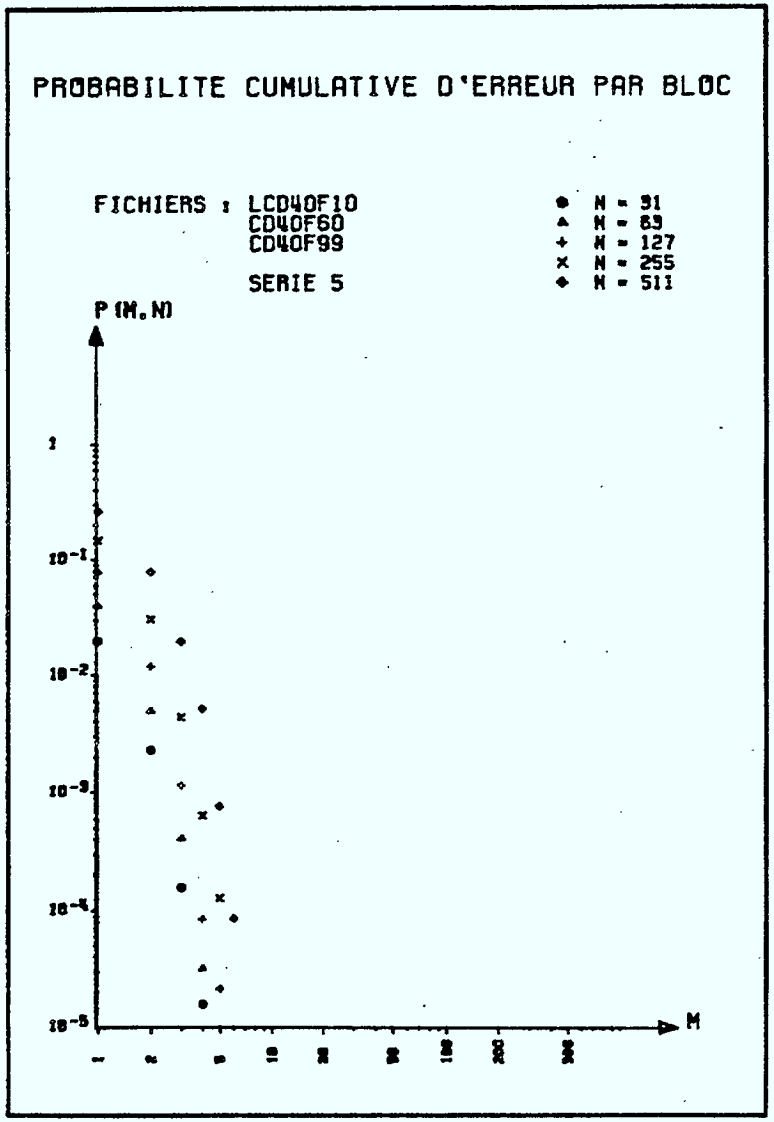

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : D10F10
D10F60
D10F98
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M

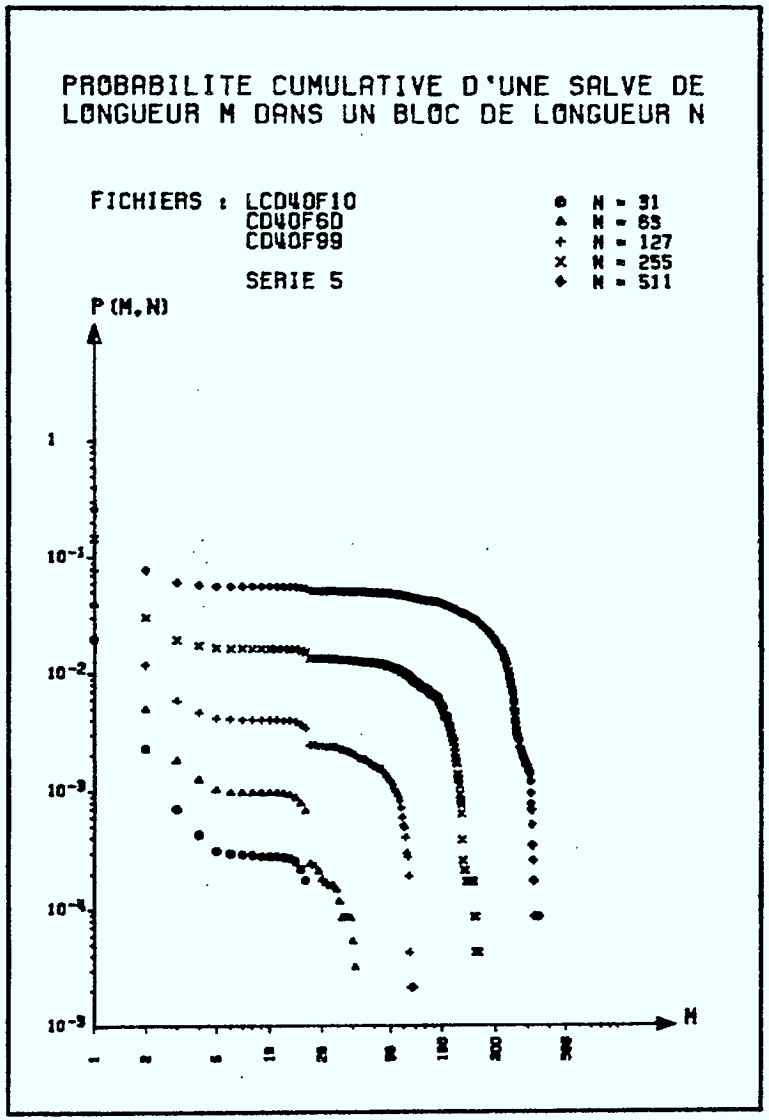

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : CD20F10
CD20F60
CD20F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

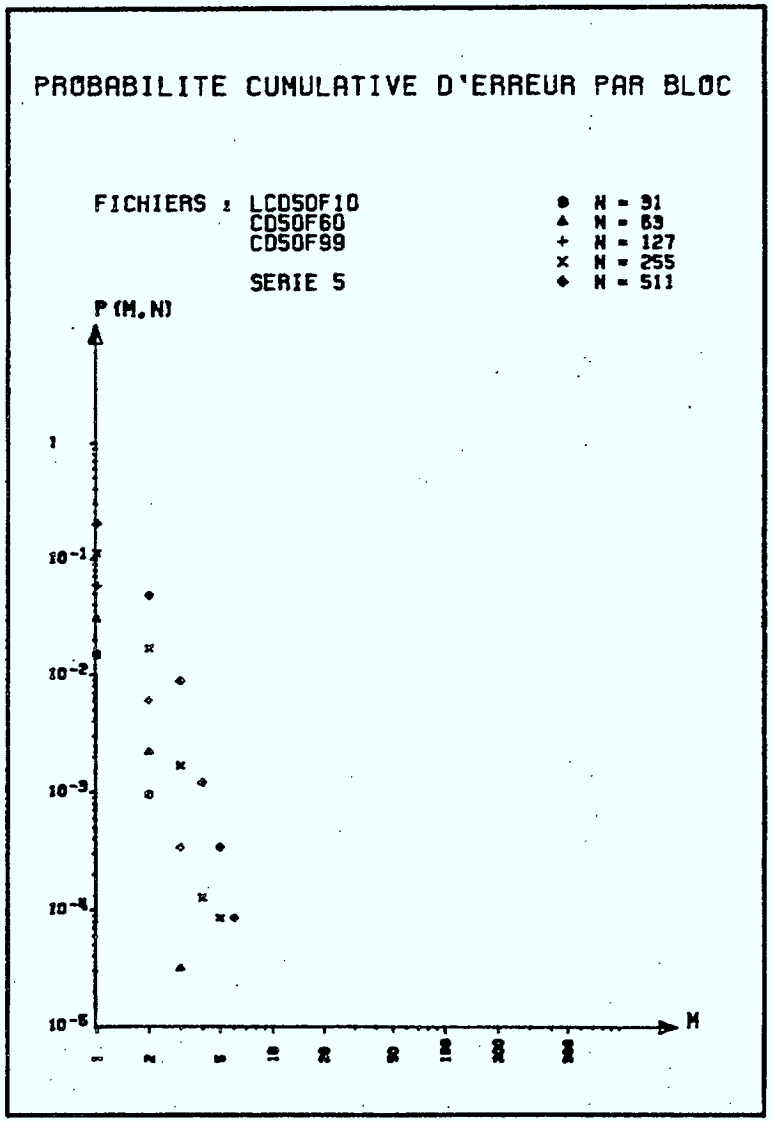

PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : CD20F10
CD20F60
CD20F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

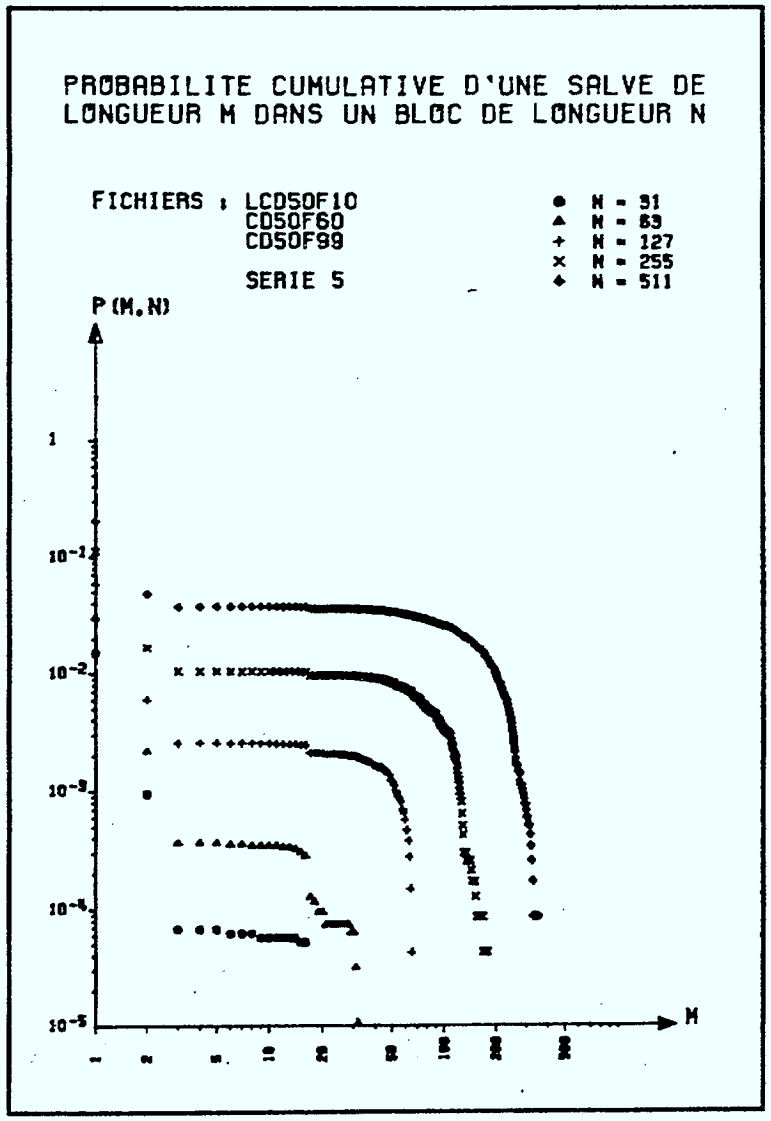

PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : LCD30F10
CD30F60
CD30F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P (M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : LCD30F10
CD30F60
CD30F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P (M,N)
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : LCD40F10
CD40F60
CD40F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : LCD40F10
CD40F60
CD40F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'ERREUR PAR BLOC
FICHIERS : LCD50F10
CD50F60
CD50F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M


PROBABILITE CUMULATIVE D'UNE SALVE DE LONGUEUR M DANS UN BLOC DE LONGUEUR N
FICHIERS : LCD50F10
CD50F60
CD50F99
SERIE 5
N = 31
N = 63
N = 127
N = 255
N = 511
P(M,N)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
M

CHAPITRE 3

ANALYSE STATISTIQUE DES ENREGISTREMENTS CONTINUS D'ERREURS

On considère dans cette section le problème lié à l'analyse statistique des enregistrements continus d'erreurs. En particulier, nous envisageons la possibilité de définir un modèle markovien représentatif des séquences d'erreurs. Différents paramètres sont de plus introduits dont il sera fait usage dans le travail subséquent.

3.1 Modèles markoviens

Soit $\underline{I}$ la séquence des erreurs enregistrées supposée de longueur très grande mais finie. Il est possible de représenter cette séquence $\underline{I}$ comme une suite alternée de sous-séquences formées, d'une part, de salves solides d'erreurs (i.e, des symboles "1") que nous désignerons par $\{\underline{E}^i\}$ et, d'autre part, d'intervalles successifs sans erreurs (i.e., des symboles "0") que nous noterons $\{\underline{0}^i\}$. Il résulte de ces définitions que l'on peut donc toujours écrire:

$$\underline{I}=\{\underline{0}^1,\underline{E}^1, \ldots , \underline{0}^n ,\underline{E}^n \} \tag{3.1}$$

de sorte que les sous-séquences finies $\{\underline{E}^i\}$ et $\{\underline{0}^i\}$ représentent respectivement les sous-intervalles avec et sans erreurs de $\underline{I}$

On définira , de façon générale, la longueur des sous-séquences $\underline{0}^i$ et $\underline{E}^i$ comme le nombre $l_0(l_E)\geq 1$ de symboles ("0" ou "1") qui les composent. On remarquera donc, compte tenu de cette définition, que la représentation (3.1) ci-dessus est unique si on admet, de façon à tenir compte des effets de bord, la possibilité de longueur nulle pour les sous-séqences $\underline{0}^1$ et $\underline{E}^n$. Du point de vue de la notation, il sera commode de représenter les sous-séquences $\underline{0}$ et $\underline{E}$ comme 0^{m_0} et 1^{m_E} pour indiquer qu'il s'agit de suites de m_0 0's et de m_E 1's respectivement.

Associées aux suites $\{\underline{0}^i\}$ et $\{\underline{E}^i\}$, nous introduisons les statistiques élémentaires suivantes.

a) les quantités $h_0(j)$ et $h_E(j)$ représentent les fréquences d'apparition des salves successives de "0" et de "1" de longueur j où j peut prendre les valeurs 1,2,3 $\cdots$ et définies comme:

$$h_0(j)(h_E(j))=\frac{\textit{Nombre d' intervalles } \underline{0}(\underline{E}) \textit{ de longueur } = j}{\textit{Nombre total d' intervalles } \underline{0}(\underline{E})} \tag{3.2}$$

b) Similairement, $P_0(j)$ et $P_E(j)$ seront les fréquences cumulatives d'apparition des salves successives de "0" et de "1" de longueur $\geq$ à j (j=1,2,3,...). Par définition, on note l'identité immédiate:

$$P_0(j)(P_E(j))=\sum_{l\geq j} h_0(l)(h_E(l))=1-\sum_{l<j} h_0(l)(h_E(l)) \tag{3.3}$$

ou de façon équivalente:

$$h_0(j)(h_E(j))=P_0(j)-P_0(j+1)(P_E(j)-P_E(j+1)) \tag{3.4}$$

c) Compte tenu des distributions $P_0(j)$ et $P_E(j)$ des salves solides de "0" et de "1", on introduira de plus les moyennes du premier ordre correspondantes:

$$E[l_0](E[l_E]) = \sum_{j \geq 1} j h_0(j)(h_E(j)) \tag{3.5}$$

Il devient aisé à partir des développements précédents de déduire un certain nombre de paramètres associés. Par exemple, le Taux d'Erreur Moyen par symbole (TEM) p qui représente la fraction de symboles "1" dans $\underline{I}$ s'écrit:

$$TEM = \frac{E[l_E]}{(E[l_E]+E[l_0])} = \frac{1}{(1+\frac{E[l_0]}{E[l_E]})} \tag{3.6}$$

L'intérêt essentiel de ces quantités réside dans le fait qu'elles nous permettent rapidement de tester la plausibilité associée à l'hypothèse que le canal d'erreur que l'on désire modéliser soit représentable par un modèle du type binaire symétrique à erreurs indépendantes.

En effet dans ce cas, si p est la valeur du taux d'erreur moyen par symbole, on peut écrire:

$$\begin{aligned} P_0(j) &= \text{Prob}\{0^{j-1} \mid 10\} = (1-p)^{j-1} \quad j \geq 1 \\ P_E(j) &= \text{Prob}\{1^{j-1} \mid 01\} = p^{j-1} \quad j \geq 1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

On en déduit immédiatement:

$$\begin{aligned} h_0(j) &= P_0(j) - P_0(j+1) = p(1-p)^{j-1} \quad j \geq 1 \\ h_E(j) &= P_E(j) - P_E(j+1) = (1-p)p^{j-1} \quad j \geq 1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

ce qui implique que les intervalles sans erreur ainsi que les salves solides d'erreurs

sont distribués selon des lois géométriques de paramètres $(1-p)$ et p respectivement. Les moyennes du premier ordre sont alors aisément calculées comme:

$$E[l_0]=\frac{1}{p} \text{ et } E[l_E]=\frac{1}{(1-p)}. \tag{3.9}$$

Pour modéliser les canaux de transmission dont les erreurs ont tendance à se regrouper par paquets, un modèle markovien à deux états a récemment été proposé par Gilbert [1]. Compte tenu de ce modèle que l'on trouvera représenté à la Figure 3.1, le canal peut passer de l'état B à l'état M avec une probabilité P et réciproquement de l'état M à l'état B avec une probabilité p. Dans l'état B, aucune erreur n'est commise et le symbole d'erreur émis est donc toujours "0" dans ce cas. Par opposition, lorsque le canal se trouve dans l'état M, le symbole d'erreur émis est soit "1" avec probabilité h soit "0" avec probabilité $(1-h)$.

Il s'ensuit que si T est la matrice de transition d'état correspondante et que l'on suppose que la première rangée de T est associée à l'état B. on peut écrire:

$$T=\begin{bmatrix} 1-P & P \\ p & 1-p \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Si Π_B, Π_M représentent les probabilités stationnaires d'occupation des états B et M, ces quantités satisfont au système d'équations linéaires

$$(\Pi_B, \Pi_M)=(\Pi_B, \Pi_M)T$$
$$\Pi_B+\Pi_M=1$$

dont les solutions sont:

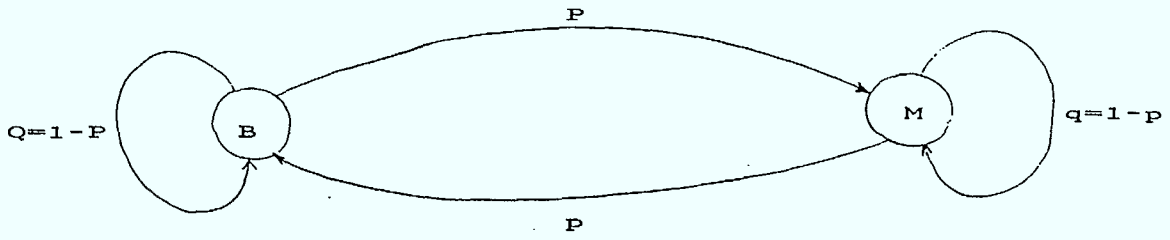


Figure 3.1 Transition d'états du modèle de Gilbert à 2 états d'un canal de transmission binaire générant des salves d'erreurs. (Le canal ne génère des erreurs que dans l'état M avec probabilité h)

$$\Pi_B = \frac{p}{(p+P)}$$
$$\Pi_M = \frac{P}{(p+P)}. \tag{3.11}$$

Il s'ensuit que pour le modèle de Gilbert, le taux d'erreur moyen par symbole vaut:

$$TEM = h\,\Pi_M = \frac{hP}{(p+P)}. \tag{3.12}$$

Il est de plus démontré à l'appendice B que les distributions des salves solides de "1" et de "0" satisfont aux lois:

$$h_E(j) = \text{Prob}\{1^{j-1}0 \mid 01\} = (1-hq)(hq)^{j-1} \qquad j \geq 1$$
$$P_E(j) = \text{Prob}\{1^{j-1} \mid 01\} = (hq)^{j-1} \qquad j \geq 1 \tag{3.13}$$

et

$$h_0(j) = \text{Prob}\{0^{j-1} \mid 10\} = A\,\alpha_1^j + B\,\alpha_2^j \qquad j \geq 1$$
$$P_0(j) = \text{Prob}\{0^{j-1} \mid 10\} = \left[\frac{A}{1-\alpha_1}\right]\alpha_1^j + \left[\frac{B}{1-\alpha_2}\right]\alpha_2^j \tag{3.14}$$

où α_1 et α_2 sont les racines de l'équation du second degré:

$$t^2 - t\,[Q + (1-h)q] + (1-h)(Q-p) = 0 \tag{3.15}$$

et où A et B sont des constantes dont les valeurs respectives en fonction des paramètres du modèle sont:

$$A = \frac{h\,[q\,\alpha_1 + (p-Q)]}{(\alpha_1-\alpha_2)(1-hq)}$$
$$B = \frac{h\,[q\,\alpha_2 + (p-Q)]}{(\alpha_2-\alpha_1)(1-hq)} \tag{3.16}$$

Il s'ensuit que la distribution des longueurs des salves successives de zéros est dans ce cas une distribution mixte formée par la somme pondérée entre deux distributions géométriques dont la valeur moyenne est calculée à l'appendice B comme:

$$E(l_0)=\frac{p+(1-h)(1-Q)}{h(1-Q)(1-Q)}. \tag{3.17}$$

D'autre part, du fait que la distribution des salves successives de uns est géométrique de paramètre hq, on obtient aussi:

$$E(l_E)=\frac{1}{(1-hq)}.$$

Reportant cette dernière valeur ainsi que celle de $E(l_0)$ telle que donnée par (3.17) dans (3.6), on vérifie à postériori la consistance de nos calculs en se référant à la valeur de TEM telle que calculée d'après (3.12).

Une des restrictions majeures du modèle de Gilbert est due au fait que la distribution des salves de zéros successifs doit être une somme pondérée de 2 distributions géométriques; ce qui est très restrictif en pratique. D'autre part, même lorsque ces conditions sont approximativement satisfaites, l'identification des paramètres p, q, h du modèle à partir des observations expérimentales n'est pas simple du fait des relations complexes (3.13) et (3.14) qui lient ces quantités. Pour palier à ces difficultés, l'utilisation d'un modèle à plus de deux états doit être envisagée. Une telle extension a été proposée par Fritchman et est représentée à la Figure 3.2. Ce modèle opère sur un ensemble de $N+1$ états numérotés de 0 à N. L'état 0 conduit à la génération de symboles "1" (erreurs).

Dans tous les autres états, on ne commet pas d'erreur.

En utilisant la notation $p_{i,j}$ pour représenter la probabilité de transition de l'état i vers l'état j et en se référant au schéma de la Figure 3.2, on voit donc que la matrice de transitions d'états de la chaîne de Markov considérée peut s'écrire:

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & \cdots & \cdots & p_{0,N} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p_{2,0} & 0 & p_{2,2} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N,0} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_{N,N} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

La clé permettant une identification aisée des paramètres du modèle (i.e., les probabilités de transition d'états) réside dans le fait que, de par la structure de la matrice P , les états sans erreurs ne peuvent pas communiquer entre eux.

Plus spécifiquement on peut donc écrire, du fait que seuls les états numérotés strictement positifs peuvent produire des zéros et qu'ils ne peuvent pas communiquer entre eux:

$$v_j = \text{Prob}\{0^j 1 \mid 1\} = \sum_{l=1}^{N} f_{j+1}^{l} \qquad j \geq 1 \text{ et } v_0 = p_{0,0}$$

où f_{j+1}^{l} représente la probabilité de premier retour à l'état 0 à partir de l'état l en exactement $j+1$ étapes.

Il est immédiat de vérifier, d'autre part, que l'on a:

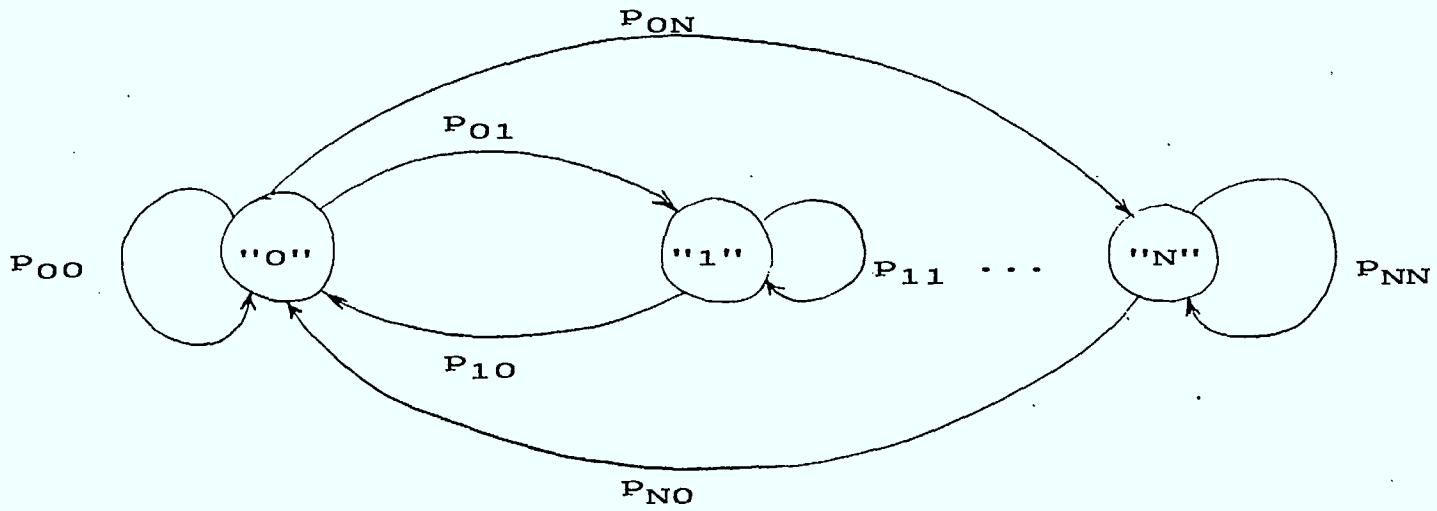


Figure 3.2 Transitions d'états d'un modèle markovien à états multiples d'un canal de transmission génèrant des salves d'erreurs. (Le canal génère des erreurs avec probabilité 1 dans tous les états à étiquette positive)

$$f_1^2 = p_{0,1}p_{1,0}\ ,\ f_m^1 = p_{0,1}p_{1,0}(p_{1,1})^{m-2} \qquad m \geq 2$$

de sorte que si $F^1(z)$ est la fonction génératrice associée à la suite (f_j^1), on peut écrire:

$$F^1(z) = \sum_{j \geq 1} f_{j+1}^1 z^j = \frac{zp_{0,1}p_{1,0}}{(1-zp_{1,1})}$$

Il s'ensuit que la génératrice $V(z)$ de la suite (v_j) s'écrit:

$$V(z) = \sum_{j \geq 0} v_j z^j = p_{0,0} + \sum_{l=1}^{N} \frac{zp_{0,l}\,p_{l,0}}{(1-zp_{l,l})}$$

d'où l'on déduit, en remarquant que pour tout l on a l'identité $p_{l,l} + p_{l,0} = 1$:

$$V_0 = p_{0,0} \text{ et } v_j = \sum_{l=1}^{N} p_{0,1}(1-p_{l,l})(p_{l,l})^{j-1} \qquad j = 1. \tag{3.19}$$

Lorsque l'on utilise le codage des longueurs des séquences successives de zéros et de uns, la quantité d'intérêt devient l'expression $\text{Prob}\{0^{j-1}1 \mid 10\}$ que l'on obtient, en notant l'identité $\text{Prob}\{0 \mid 1\} = 1 - \text{Prob}\{1 \mid 1\} = 1 - v_o = 1 - p_{0,0}$, comme:

$$\text{Prob}\{0^{j-1}1 \mid 10\} = \frac{\text{Prob}\{0^j 1 \mid 1\}}{\text{Prob}\{0 \mid 1\}} = \frac{\text{Prob}\{0^j 1 \mid 1\}}{(1-p_{0,0})} \qquad j \geq 1.$$

Les distributions des séquences de zéros successifs s'en déduisent comme:

$$\begin{aligned} h_0(j) &= \sum_{l=1}^{N} \frac{p_{0,l}(1-p_{l,l})(p_{l,l})^{j-1}}{(1-p_{0,0})} \qquad j \geq 1 \\ P_0(j) &= \sum_{l=1}^{N} \frac{p_{0,l}(p_{l,l})^{j-1}}{(1-p_{0,0})} \qquad j \geq 1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

On en déduit immédiatement la moyenne d'ordre 1 correspondante:

$$E(l_0)=\frac{1}{(1-p_{0,0})}\sum_{l\geq 1}\frac{p_{0,l}}{(1-p_{l,l})} \tag{3.21}$$

En ce qui concerne la distribution des salves d'erreurs successives, il est évident, du fait que seul l'état "0" conduit à des erreurs avec certitude, que l'on peut écrire:

$$P_E(j)=\text{Prob}\{1^{j-1}\mid 01\}=(p_{0,0})^{j-1} \qquad j\geq 1$$
$$h_E(j)=P_E(j)-P_E(j+1)=(1-p_{0,0})(p_{0,0})^{j-1} \qquad j\geq 1$$

c-à-d que la distribution des salves solides d'erreurs est une distribution géométrique de paramètre $p_{0,0}$ dont la valeur moyenne est:

$$E(l_E)=\frac{1}{(1-p_{0,0})}$$

Reportant cette dernière relation dans (3.16) et en utilisant (3.21), il vient:

$$TEM=\left[1+\sum_{l=1}^{N}\frac{p_{0,l}}{(1-p_{l,l})}\right]^{-1}.$$

D'autre part, si $\underline{\pi}=(\pi_0,\pi_1,\ldots,\pi_N)$ est le vecteur des probabilitiés stationnaires d'occupation d'états, il doit satisfaire aux équations $\pi=p_i P$ et $\sum\pi_e=1$, d'où l'on déduit:

$$\pi_1=\pi_0\frac{p_{0,l}}{(1-p_{l,l})} \quad l=1,2,\ldots,N$$

et

$$\pi_0=\left[1+\sum_{l=1}^{N}\frac{p_{0,l}}{(1-p_{l,l})}\right]^{-1}.$$

On peut donc vérifier à postériori la consistance de nos calculs du fait que l'on obtient l'identité évidente $\pi_0 = TEM$.

Suite à l'analyse théorique ci-dessus, le problème d'identification des paramètres du modèle devient très simple lorsque l'on dispose d'une "bonne" approximation de la distribution cumulative $P_0(j)$ des salves solides de zéros par une somme finie et pondérée de distributions géométriques. En effet, si l'on peut écrire:

$$P_0(j) \approx \sum_{i=1}^{N} A_i \exp(-B_i j), \quad \sum_{i=1}^{N} A_i \exp(-B_i) = 1, \tag{3.22}$$

il s'ensuit, d'après (3.20), que l'on doit avoir pour le modèle markovien $N+1$ états dont n servent à générer les salves de zéros. D'autre part les $2N+1$ paramètres distincts requis par le modèle ($p_{0,i}, i=0,1, \ldots, N$, et $p_{1,1}, i=1,2, \ldots, N$) s'identifient très simplement à partir des équations suivantes:

$$\begin{aligned} p_{i,i} &= \exp(-B_i) \quad i=1,2, \ldots, N, \\ p_{0,0} &= 1 - \frac{1}{E(l_E)}, \\ p_{0,i} &= \frac{A_i \exp(-B_i)}{E(l_E)} \quad i=1,2, \ldots, N, \end{aligned} \tag{3.23}$$

où $E(l_E)$ représente la longueur moyenne des salves d'erreurs et les coefficients A_i et b_i sont obtenus à partir de l'approximation (3.22).

3.2 Identification des paramètres du modèle par la méthode de Prony.

Le calcul des coefficients (A_i) et des exposants (B_i) satisfaisant

$$P_0(j)=\sum_{i=1}^{N} A_i\, e^{-B_i j}$$

se fait par analyse numérique , en utilisant la méthode de Prony [4]. Cette méthode permet précisément d'ajuster une combinaison linéaire d'exponentielles à un ensemble de données expérimentales, à la condition que ces données soient prises à des intervalles fixes de la variable indépendante (j , dans notre cas).

La méthode de Prony est basée sur le fait que si la fonction de la variable x qu'il faut approximer est définie de façon exacte comme une somme de N exponentielles

$$P_0(j)=A_1 e^{B_1 j}+A_2 e^{B_2 j}+\cdots+A_N e^{B_N j} \tag{3.24}$$

alors les valeurs de $P_0(j)$ pour $j=0,w,2w,\cdots$ (que nous nommerons $K_0,K_1,K_2,\ldots$) doivent satisfaire à l'équation des différences finies:

$$C_1K_{n+N}+C_2K_{n+N-1}+\cdots+C_{N+1}K_n=0. \tag{3.25}$$

On démontre que les racines de l'équation caractéristique

$$C_1x^N+C_2x^{N-1}+\cdots+C_{N+1}=0 \tag{3.26}$$

sont égales à $e^{B_1 w}, e^{B_2 w}, \ldots, e^{B_N w}$.

Pour obtenir les valeurs de $C_1, C_2, \ldots, C_{N+1}$, on choisit un ensemble comportant au moins $2N$ valeurs de P_0. Soient $K_0, K_1, \ldots, K_{M-1}$, M valeurs de cet ensemble. Les $M-N$ équations satisfaisant la relation (3.25) s'écrivent donc:

$$\begin{array}{lllll}
C_1K_N & + C_2K_{N-1} & + \cdots + & C_{N+1}K_0 & =0 \\
C_1K_{N+1} & + C_2K_N & + \cdots + & C_{N+1}K_1 & =0 \\
\text{"} & & & \text{"} & \text{"} \\
\text{"} & & & \text{"} & \text{"} \\
\text{"} & & & \text{"} & \text{"} \\
\text{"} & & & \text{"} & \text{"} \\
C_1K_{2N-1} & + C_2K_{2N-2} & + \cdots + & C_{N+1}K_{N-1} & =0 \\
\text{"} & & & \text{"} & \text{"} \\
\text{"} & & & \text{"} & \text{"} \\
\text{"} & & & \text{"} & \text{"} \\
\text{"} & & & \text{"} & \text{"} \\
C_1K_{M-1} & + C_2K_{M-2} & + \cdots + & C_{N+1}K_{M-N-1} & =0
\end{array} \tag{3.27}$$

Le fait de poser $C_1 \equiv 1$ ne change évidemment pas les solutions de l'équation (3.26) et permet de faire du système (3.27) un ensemble de $M-N$ équations à N inconnues. Les coefficients $C_2, \ldots, C_{N+1}$ sont alors obtenus par une méthode de régression linéaire multiple, et les valeurs obtenues sont celles qui satisfont le mieux le système (3.27), au sens des moindres carrés.

La résolution de l'équation (3.26) nous donne directement les valeurs de $e^{B_i w}$, et de là nous pouvons obtenir les B_i recherchés. Cette résolution doit se faire numériquement, étant donné que N peut prendre des valeurs plus grandes que 4. La méthode la plus appropriée semble être celle de Graeffe, mentionnée dans [5], qui permet d'obtenir en une seule passe (quoique sous certaines réserves) toutes les racines d'une équation polynomiale, sans nécessiter d'estimation préalable de la valeur des racines.

A partir des B_i trouvés, on peut obtenir les coefficients A_i, par une régression linéaire cette fois à partir du système

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} A_i = K_0 = P_0(0) \\
&\sum_{i=1}^{N} A_i\, e^{B_i w} = K_1 = P_0(w) \\
&\sum_{i=1}^{N} A_i\, e^{2B_i w} = K_2 = P_0(2w) \\
&\sum_{i=1}^{N} A_i\, e^{(M-1)B_i w} = K_{M-1} = P_0((M-1)w).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Encore une fois, les A_i recherchés sont ceux qui satisfont le mieux le système (3.28), au sens des moindres carrés.

3.3 Résultats d'identification des paramètres pour les enregistrements fournis

Compte tenu de l'analyse théorique précédente, différents enregistrements expérimentaux fournis par le CRC ont été analysés (i.e., les statistiques relatives aux distributions des salves d'erreur et des intervalles de garde entre les salves d'erreurs on été déterminées). Les courbes représentatives sont rassemblées à l'appendice C.

Les modèles markoviens relatifs à chacun de ces canaux expérimentaux sont les suivants:

1) **Fichier D09F00 (série 3):**

TEM: 0.151 E-01

Intervalle moyen entre les salves: 69.50

Longueur moyenne des salves: 1.06

Modèle markovien:

$$0.051\exp(-0.0070)+0.964\exp(-0.0156)$$

$$\begin{bmatrix} 0.0566 & 0.0480 & 0.8954 \\ 0.0070 & 0.9930 & 0.0000 \\ 0.0155 & 0.0000 & 0.9845 \end{bmatrix}$$

2) **Fichier D12F00 (série 3):**

TEM: 0.166 E-02

Intervalle moyen entre les salves: 607.49

Longueur moyenne des salves: 1.01

Modèle markovien:

$$0.7812\exp(-0.0016)+0.2204\exp(-0.0017)$$

$$\begin{bmatrix} 0.0099 & 0.7722 & 0.2178 \\ 0.0016 & 0.9984 & 0.0000 \\ 0.0017 & 0.0000 & 0.9983 \end{bmatrix}$$

3) **Fichier D20F10 (série 4):**

TEM: 0.351 E-02

Intervalle moyen entre les salves: 376.84

Longueur moyenne des salves: 1.33

Modèle markovien:

$$0.0934\exp(-0.0006)+0.2226\exp(-0.0011)+0.6874\exp(-0.0046)$$

$$\begin{bmatrix} 0.2481 & 0.0702 & 0.1672 & 0.5145 \\ 0.0006 & 0.9994 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0011 & 0.0000 & 0.9989 & 0.0000 \\ 0.0046 & 0.0000 & 0.0000 & 0.9954 \end{bmatrix}$$

4) **Fichier D30F10 (série 4):**

TEM: 0.663 E-03

Intervalle moyen entre les salves: 1698.17

Longueur moyenne des salves: 1.13

Modèle markovien:

$$0.7757\exp(-0.0005)+0.2268\exp(-0.0093)$$

$$\begin{bmatrix} 0.1150 & 0.6861 & 0.1989 \\ 0.0005 & 0.9995 & 0.0000 \\ 0.0093 & 0.0000 & 0.9907 \end{bmatrix}$$

5) **Fichier D20F99 (série 4):**

TEM: 0.697 E-02

Intervalle moyen entre les salves: 161.11

Longueur moyenne des salves: 1.13

Modèle markovien:

$$0.1112\exp(-0.0017)+0.7285\exp(-0.0074)+0.1729\exp(-0.0411)$$

$$\begin{bmatrix} 0.1150 & 0.0982 & 0.6399 & 0.1468 \\ 0.0017 & 0.9983 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0074 & 0.0000 & 0.9926 & 0.0000 \\ 0.0403 & 0.0000 & 0.0000 & 0.9597 \end{bmatrix}$$

6) **Fichier D30F99 (série 4):**

TEM: 0.128 E-02

Intervalle moyen entre les salves: 803.10

Longueur moyenne des salves: 1.03

Modèle markovien:

$$0.8440\exp(-0.0011)+0.1586\exp(-0.0107)$$

$$\begin{bmatrix} 0.0291 & 0.8185 & 0.1523 \\ 0.0011 & 0.9989 & 0.0000 \\ 0.0106 & 0.0000 & 0.9894 \end{bmatrix}$$

7) **Fichier D20F10 (série 3):**

TEM: 0.122 E-01

Intervalle moyen entre les salves: 110.21

Longueur moyenne des salves: 1.36

Modèle markovien:

0.1194exp(–0.0010)+0.9475exp(–0.9731)

$$\begin{bmatrix} 0.2631 & 0.0879 & 0.6490 \\ 0.0010 & 0.9990 & 0.0000 \\ 0.0705 & 0.0000 & 0.9295 \end{bmatrix}$$

8) **Fichier D30F10 (série 3):**

TEM: 0.120 E-02

Intervalle moyen entre les salves: 1113.22

Longueur moyenne des salves: 1.34

Modèle markovien:

0.3065exp(–0.0003)+0.6995exp(–0.0084)

$$\begin{bmatrix} 0.2513 & 0.2294 & 0.5194 \\ 0.0003 & 0.9997 & 0.0000 \\ 0.0084 & 0.0000 & 0.9916 \end{bmatrix}$$

9) **Fichier D20F99 (série 3):**

TEM: 0.137 E-01

Intervalle moyen entre les salves: 93.22

Longueur moyenne des salves: 1.29

Modèle markovien:

0.5782exp(–0.0064)+0.4692exp(–0.0976)

$$\begin{bmatrix} 0.2267 & 0.4443 & 0.3291 \\ 0.0064 & 0.9936 & 0.0000 \\ 0.0930 & 0.0000 & 0.9070 \end{bmatrix}$$

10) **Fichier D30F99 (série 3):**

TEM: 0.245 E-02

Intervalle moyen entre les salves: 468.98

Longueur moyenne des salves: 1.15

Modèle markovien:

$$0.9179\exp(-0.0019)+0.0882\exp(-0.0499)$$

$$\begin{bmatrix} 0.1304 & 0.7967 & 0.0730 \\ 0.0019 & 0.9981 & 0.0000 \\ 0.0487 & 0.0000 & 0.9513 \end{bmatrix}$$

11) **Fichier D20F10 (série 5):**

TEM: 0.339 E-02

Intervalle moyen entre les salves: 355.26

Longueur moyenne des salves: 1.21

Modèle markovien:

$$0.3279\exp(-0.0010)+0.0141\exp(-0.0023)+0.6649\exp(-0.0098)$$

$$\begin{bmatrix} 0.1715 & 0.2714 & 0.0117 & 0.5455 \\ 0.0010 & 0.9990 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0023 & 0.0000 & 0.9977 & 0.0000 \\ 0.0098 & 0.0000 & 0.0000 & 0.9902 \end{bmatrix}$$

12) **Fichier D30F10 (série 5):**

TEM: 0.212 E-03

Intervalle moyen entre les salves: 5027.28

Longueur moyenne des salves: 1.07

Modèle markovien:

$$0.9129\exp(-0.0002)+0.0876\exp(-0.0043)$$

$$\begin{bmatrix} 0.0625 & 0.8557 & 0.0818 \\ 0.0002 & 0.9998 & 0.0000 \\ 0.0043 & 0.0000 & 0.9957 \end{bmatrix}$$

13) **Fichier D20F99 (série 5):**

TEM: 0.131 E-01

Intervalle moyen entre les salves: 95.42

Longueur moyenne des salves: 1.26

Modèle markovien:

$$0.6752\exp(-0.0073)+0.0172\exp(-0.0155)+0.3318\exp(-0.0590)$$

$$\begin{bmatrix} 0.2092 & 0.5301 & 0.0134 & 0.2474 \\ 0.0073 & 0.9927 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0154 & 0.0000 & 0.9846 & 0.0000 \\ 0.0573 & 0.0000 & 0.0000 & 0.9427 \end{bmatrix}$$

14) **Fichier D30F99 (série 5):**

TEM: 0.272 E-02

Intervalle moyen entre les salves: 425.60

Longueur moyenne des salves: 1.16

Modèle markovien:

$$0.9022\exp(-0.0021)+0.1028\exp(-0.0316)$$

$$\begin{bmatrix} 0.1371 & 0.7769 & 0.0859 \\ 0.0021 & 0.9979 & 0.0000 \\ 0.0311 & 0.0000 & 0.9689 \end{bmatrix}$$

REFERENCES

[1] Gilbert, E.N., "Capacity of a Burst-noise Channel", Bell Syst. Tech. J., Vol. 39, Sept. 1960, pp. 1253-1265.

[2] Fritchman, B.D., "A Binary Channel Characterization Using Partitioned Markov Chains", IEEE Trans. Info. Theory, Vol. IT-13, April 1967, pp. 221-236.

[3] Adoul, J.P., Fritchman, B.D. and Danal, L.N., "A Critical Statistic for Channel With Memory", IEEE Trans. Info. Theory, Vol. IT-18, January 1972, pp. 133-141.

[4] Whittaker, E.T., Robinson, G., "The Calculus of Observations", 3rd edition, Glasgow, Blackie, 1940.

[5] Carnahan, B., Luther, H.A., Wilkes, J.O., "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, New York, 1969.

APPENDICE B

CALCUL DES DISTRIBUTIONS DES SALVES DE "1" ET DE "0" POUR LE MODELE DE GILBERT

Dans cet appendice, nous calculerons les distributions des salves successives de "1" et de "0" en se basant sur le modèle à deux états de Gilbert introduit au Chapitre 3.

B.1: Evaluation des statistiques relatives aux salves de "1"

On remarque dans ce cas que lorsque $j \geq 1$ et tenant compte du fait que l'on ne peut avoir des "1" que lorsque le système est dans l'état M, on peut toujours écrire la relation suivante:

$$\text{Prob}\{01^j\} = \Pi_M (1-h)[\text{Prob}\{M \mid M\}]^j h^j + \Pi_B \text{Prob}\{M \mid B\}[\text{Prob}\{M \mid M\}]^{j-1} h^j .$$

Après substitution des valeurs correspondantes de Π_M et Π_B, $\text{Prob}\{M \mid M\}$ et $\text{Prob}\{M \mid B\}$, cette expression devient:

$$\text{Prob}\{01^j\} = \frac{P}{p+P} h (1-hq)(hq)^{j-1} \qquad j \geq 1. \tag{B.1}$$

De plus, du fait que l'on a toujours:

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{01^j\} &= \text{Prob}\{0\} \times \text{Prob}\{1^j \mid 0\} \\ &= \text{Prob}\{01\} \times \text{Prob}\{1^{j-1} \mid 01\}, \end{aligned}$$

et que d'une part

$$\text{Prob}\{0\}=1-\text{Prob}\{1\}=1-\frac{hP}{p+P}=\frac{p+P(1-h)}{p+P}$$

et (d'après B.1)

$$\text{Prob}\{01\}=\frac{P}{p+P}h(1-hq).$$

On en déduit directement les distributions conditionnelles des salves de "1":

$$\text{Prob}=\{1^j \mid 0\}=\frac{Ph(1-hq)(hq)^{j-1}}{p+P(1-h)} \qquad j\geq 1 \tag{B.2}$$

et

$$P_E(j)=\text{Prob}\{1^{j-1} \mid 01\}=(hq)^{j-1} \qquad j\geq 1 \tag{B.3}$$

auxquelles on peut associer les densités respectives

$$\text{Prob}=\{1^j \mid 0\}=\frac{Ph(1-hq)^2}{p+(1-h)P}(hq)^{j-1} \qquad j\geq 1 \tag{B.4}$$

et

$$R_E(j)=\text{Prob}\{1^{j-1}0 \mid 01\}=(1-hq)(hq)^{j-1} \qquad j\geq 1 \tag{B.5}$$

On constate que la distribution des salves solides d'erreurs est une distribution géométrique de paramètre hq dont la moyenne est:

$$E\{P_E\}=\frac{1}{1-hq}. \tag{B.6}$$

B.2: Evaluation des statistiques relatives aux salves de "0":

Dans ce cas nous nous intéressons tout d'abord à évaluer les quantités v_j, $j \geq 0$, représentant la probabilité, compte tenu du modèle, d'une salve solide de "0"'s de longueur j, i.e.,

$$v_j = \text{Prob}\{0^j 1 \mid 1\}.$$

Si nous introduisons f_1^m, la probabilité du $m^{\text{ème}}$ retour à l'état M en exactement 1 étape, on peut donc écrire:

$$v_j = \sum_{m \geq 1} f_{j+1}^m h(1-h)^{m-1}$$

Définissant la fonction génératrice $V(z) = \sum_{j \geq 0} v_j z^j$, il vient:

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{z} \sum_{j \geq 0} \sum_{m \geq 1} f_{j+1}^m h(1-h)^{m-1} z^{j+1} \\ &= \frac{h}{z} \sum_{m \geq 1} (1-h)^{m-1} \sum_{j \geq 0} f_{j+1}^m z^{j+1}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Si nous définissons la formule génératrice intermédiaire

$$F_m(z) = \sum_{j \geq 0} f_{j+1}^m z^{j+1},$$

il vient de la relation évidente

$$f_k^m = \sum_{l=1}^{k-1} f_{k-1}^{m-1} f_1^1, \quad k \geq 1$$

$$\sum_{k \geq 1} f_k^m z^k = \sum_{k \geq 1} \sum_{l=1}^{k-1} f_{k-1}^{m-1} f_1^1 z^k = \sum_{l \geq 1} \sum_{k \geq l+1} f_{k-1}^{m-1} f_1^1 z^k$$

que l'on peut réécrire, en posant $k-1=n$, comme

$$F_m(z)=\sum_{l\geq 1}\sum_{n\geq 1} f_1^1 f_n^{m-1} z^{1+n}=\sum_{l\geq 1} f_1^1 z^1 \cdot \sum_{n\geq 1} f_n^{m-1} z^n = F_{m-1}(z)\cdot F_1(z)$$

d'où on déduit immédiatement par induction

$$F_m(z)=[F_1(z)]^m .$$

Reportant ce résultat dans (B.7), il vient

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{h}{z}\sum_{m\geq 1}(1-h)^{m-1}[F_1(z)]^m \\ &= \frac{h}{z}\cdot\frac{F_1(z)}{[1-(1-h)F_1(z)]}. \end{aligned} \tag{B.8}$$

L'évaluation de $F_1(z)$, la fonction génératrice relative à la probabilité de premier retour, s'évalue comme il suit. Tout d'abord, on remarque que l'on peut écrire

$$f_1^1=(1-p)=q$$

$$f_2^1=pP, \quad f_3^1=pQP, \quad f_k^1=pQ^{k-2}P \qquad k\geq 2,$$

d'où l'on déduit

$$F_1(z)=\sum_{l\geq 0} f_1^1 z^1 = qz+\frac{pPz^2}{1-Qz}.$$

Reportant cette dernière équation dans (B.8) et après quelques manipulations algébriques, on obtient:

$$V(z)=\frac{h\,[q+z(p-Q)]}{1-z\,[Q+(1-h)q]+(1-h)(Q-p)z^2}. \tag{B.9}$$

Si α_1 et α_2 sont les racines de l'équation du second degré

$$t^2-t\,[Q+(1-h)q]+(1-h)(Q-p)$$

i.e.,

$$\alpha_1,\alpha_2=\frac{Q+(1-h)q\pm\sqrt{[q+(1-h)q]^2+4(1-h)(p-Q)}}{2} \tag{B.10}$$

La fonction rationelle (B.9) peut se réécrire après décomposition en éléments simples, où nous supposons explicitement $\alpha_1\neq\alpha_2$:

$$V(z)=\frac{A'}{1-\alpha_1 z}+\frac{B'}{1-\alpha_2 z} \tag{B.11}$$

où A' et B' sont calculés au moyen des expressions

$$A'=\frac{h\,[q\,\alpha_1+(p-Q)]}{[\alpha_1-\alpha_2]} \tag{B.12}$$

$$B'=\frac{h\,[q\,\alpha_2+(p-Q)]}{[\alpha_2-\alpha_1]} \tag{B.13}$$

l'expansion de (B.11) en puissances successives de z permet de déterminer les coefficients v_j comme

$$v_j=A'\ \alpha_1^j+B'\ \alpha_2^j \qquad j\geq 0. \tag{B.14}$$

Il en résulte que les quantités d'intérêt s'écrivent:

$$h_0(j)=\text{Prob}\{0^{j-1}1\mid 10\}=\frac{v_j}{\text{Prob}\{0\mid 1\}}=\frac{v_j}{(\sum_{l\geq l} v_l)}$$

$$=\frac{v_j}{(1-v_0)}=\frac{v_j}{(1-hq)}\quad j\geq 1$$

soit

$$h(t)=A\,\alpha_1^j+B\,\alpha_2^j \qquad j\geq 1 \tag{B.15}$$

où

$$A = \frac{A'}{[1-hq]} \quad \text{et} \quad B = \frac{B'}{[1-hq]}.$$

La distribution correspondante est donc

$$P_0(j) = \frac{A\,\alpha_1^j}{[1-\alpha_1]} + \frac{B\,\alpha_2^j}{[1-\alpha_2]}. \tag{B.16}$$

Il est aisé, bien que pénible, de vérifier les relations suivantes exprimant la valeur moyenne des salves solides de "0"s

$$E\{l_0\} = \sum_{j \geq 1} j h_0(j) = \frac{A\,\alpha_1}{[1-\alpha_1]^2} + \frac{B\,\alpha_2}{[1-\alpha_2]^2}$$

$$= \frac{[A\,\alpha_1 + B\,\alpha_2] - 2\alpha_1\alpha_2[A+B] + \alpha_1\alpha_2[A\,\alpha_1 + B\,\alpha_2]}{[1-\alpha_1]^2[1-\alpha_2]^2}.$$

Utilisant les identités:

$$[1-hq][A+B] = \text{Prob}\{1 \mid 1\} = h \cdot \text{Prob}\{M \mid M\} = hq$$

$$[1-hq][A\,\alpha_1 + B\,\alpha_2] = h\,\{q\,[\alpha_1+\alpha_2] + p - Q\}$$

$$= h\,[q\,(Q + (1-h)q + p - Q]$$

$$[1-hq][A\,\alpha_1 + B\,\alpha_2] = h\,(Q-p)$$

$$[1-\alpha_1]^2[1-\alpha_2]^2 = h^2(1-Q)^2$$

il vient

$$[1-hq]E\{l_0\} = \frac{p + (1-h)(1-Q)}{h\,(1-Q)}. \tag{B.17}$$

APPENDICE C

Les pages suivantes contiennent les graphiques produits à partir des données expérimentales fournies par le CRC, pour les fichiers suivants:

série 3:

D09F00 D12F00

D20F10 D20F99

D30F10 D30F99

série 4:

D20F10 D20F99

D30F10 D30F99

série 5:

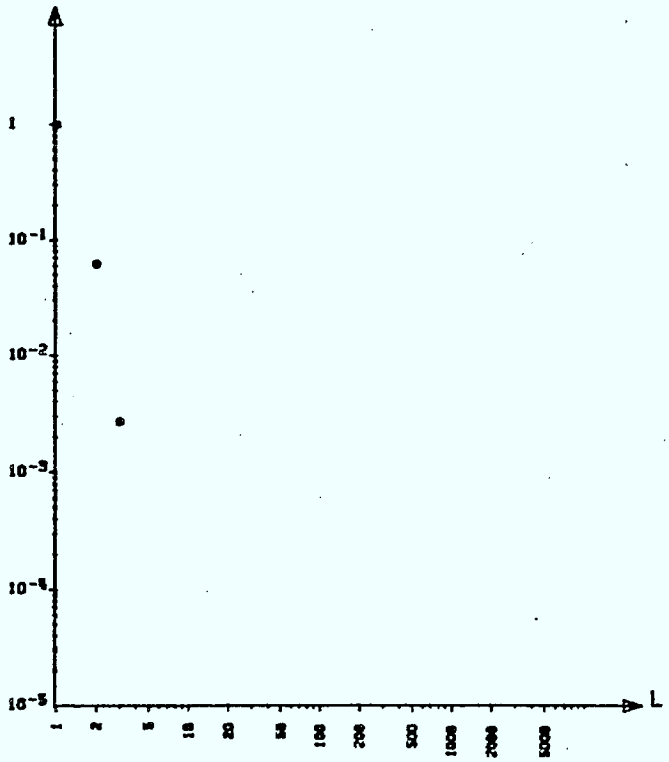
D20F10 D20F99

D30F10 D30F99

HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SALVE DE LONGUEUR L

FICHIER : CD09F00 SERIE 3 M = 1

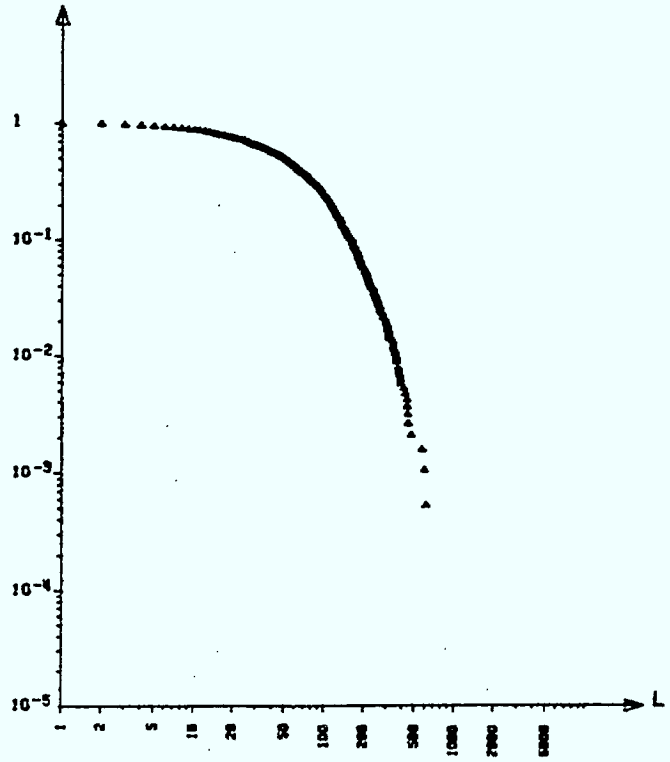
FREQUENCE (CUMULATIVE)



HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

FICHIER : CD09F00 SERIE 3 M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

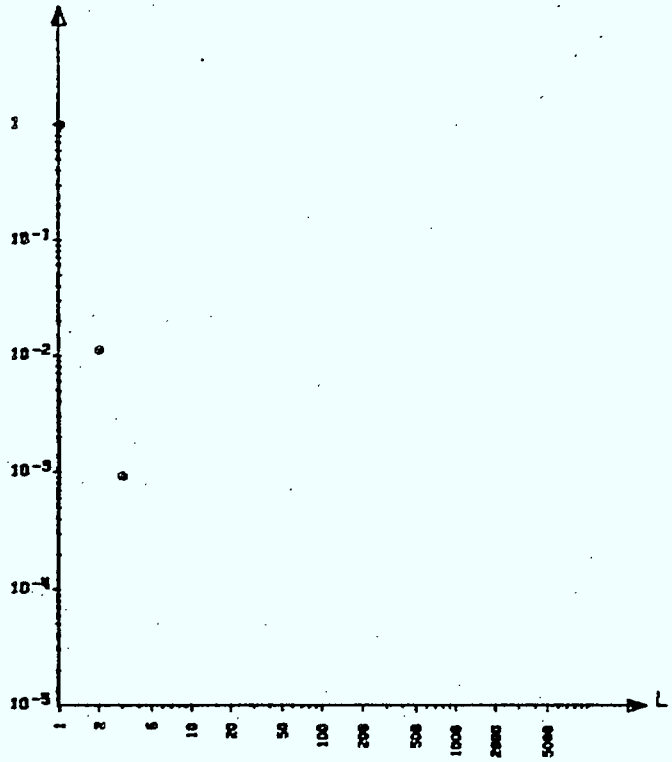


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SALVE DE LONGUEUR L

FICHIER : CD12F00
SERIE 3

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

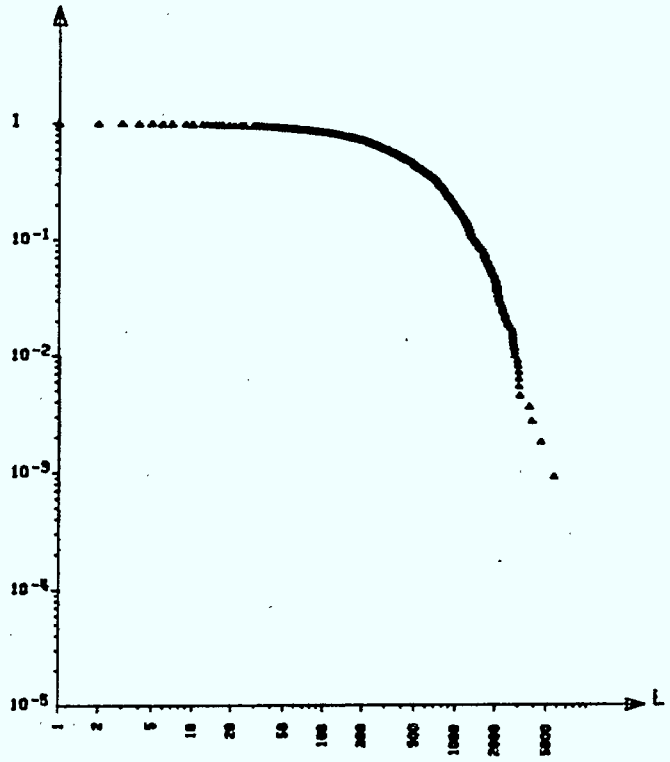


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

FICHIER : CD12F00
SERIE 3

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

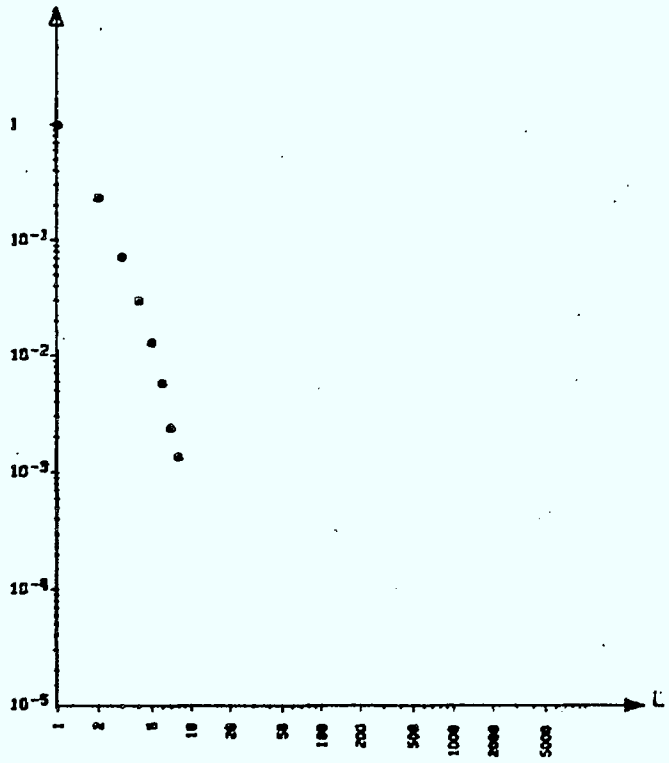


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SALVE DE LONGUEUR L

FICHIER : CD20F10
SERIE 3

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

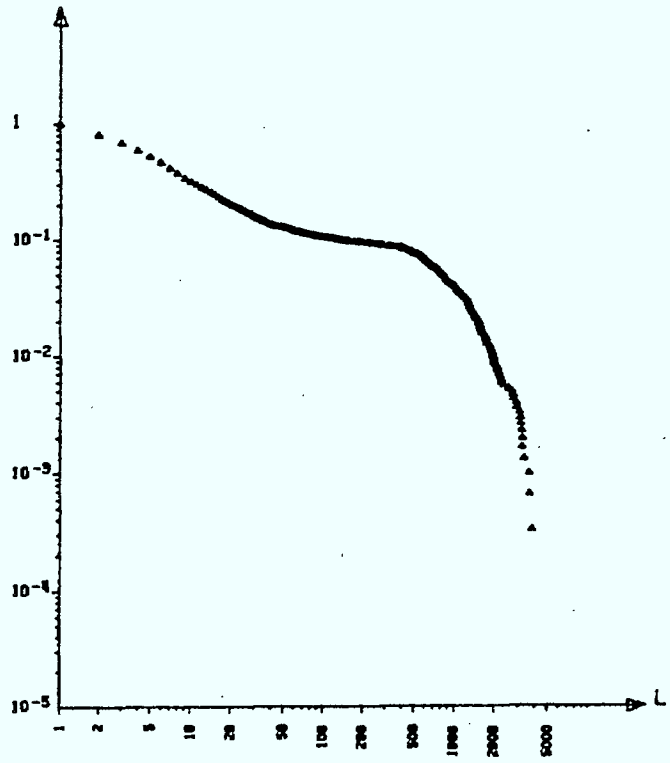


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

FICHIER : CD20F10
SERIE 3

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

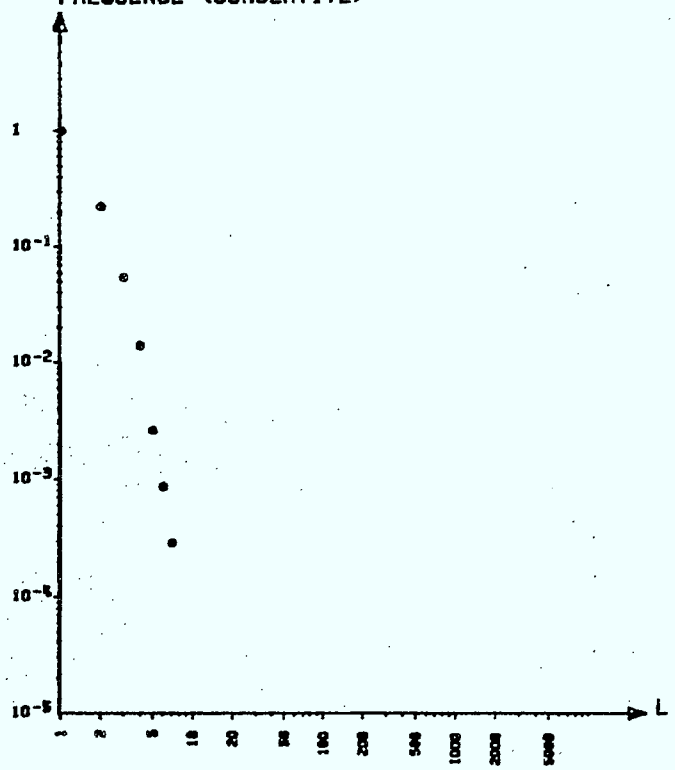


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SALVE DE LONGUEUR L

FICHIER : CD20F99
SERIE 3

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

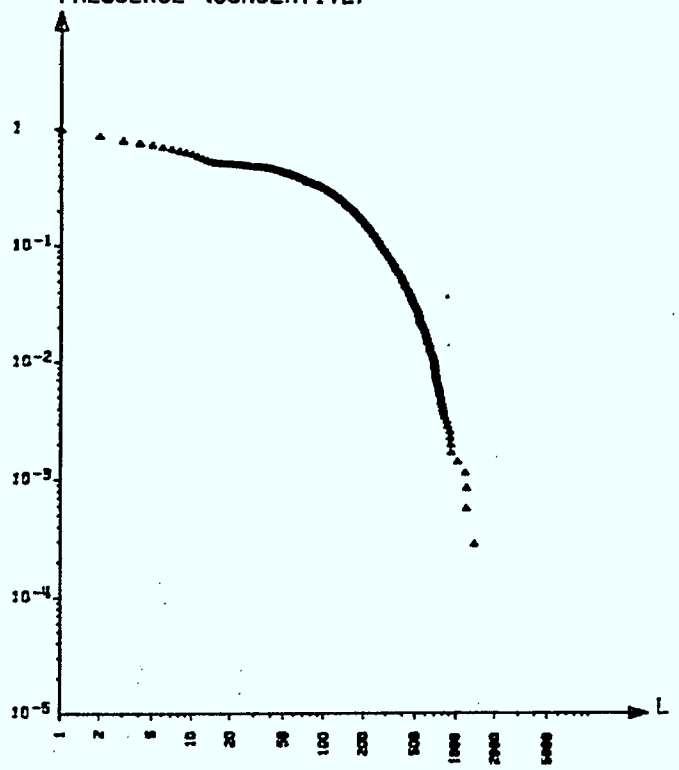


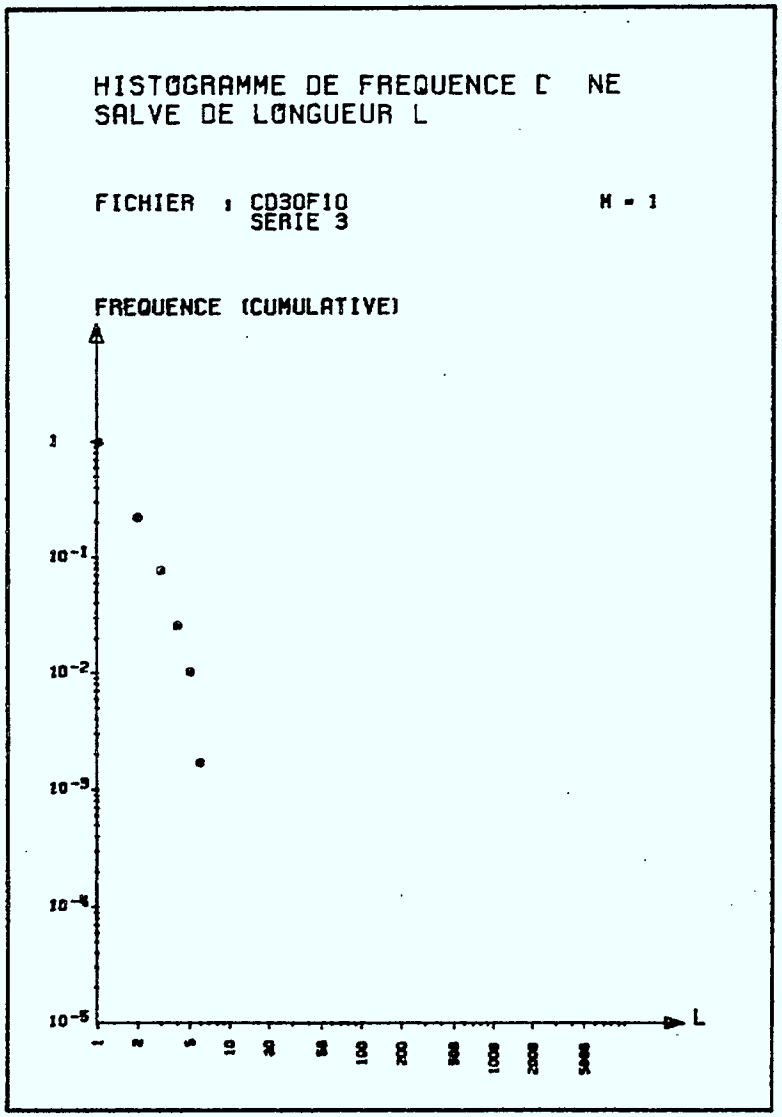
HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

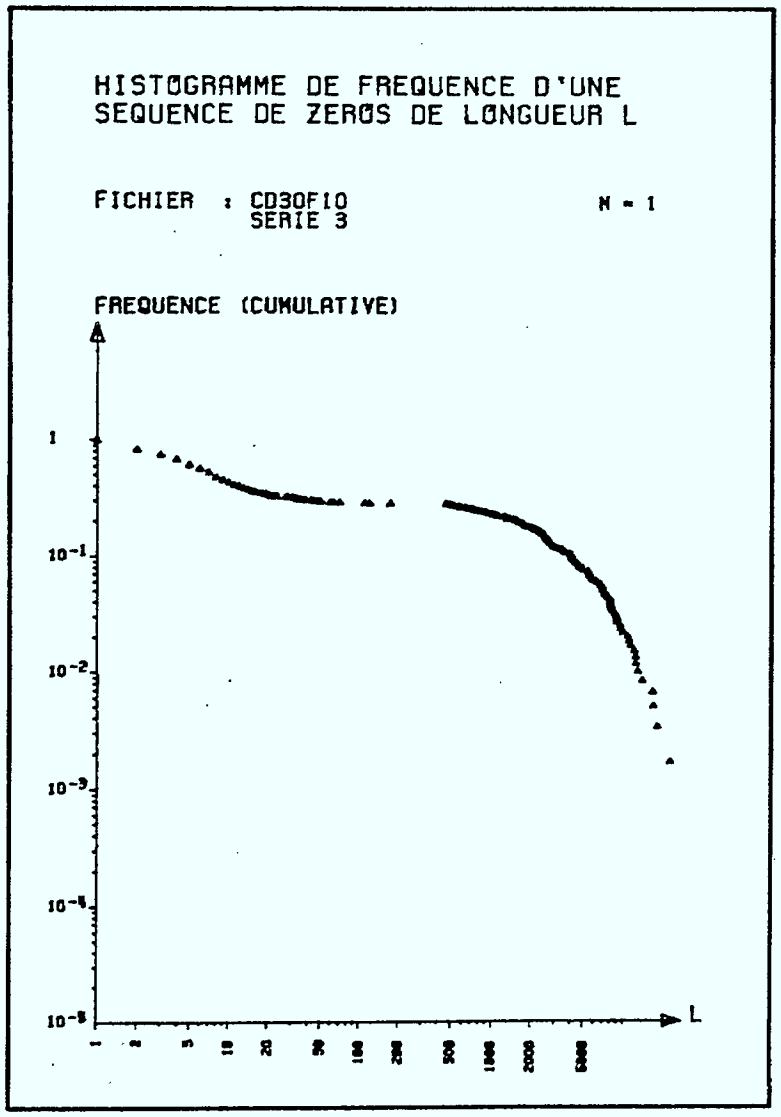
FICHIER : CD20F99
SERIE 3

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)




HISTOGRAMME DE FREQUENCE D NE
SALVE DE LONGUEUR L
FICHIER : CD30F10
SERIE 3
N = 1
FREQUENCE (CUMULATIVE)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
L

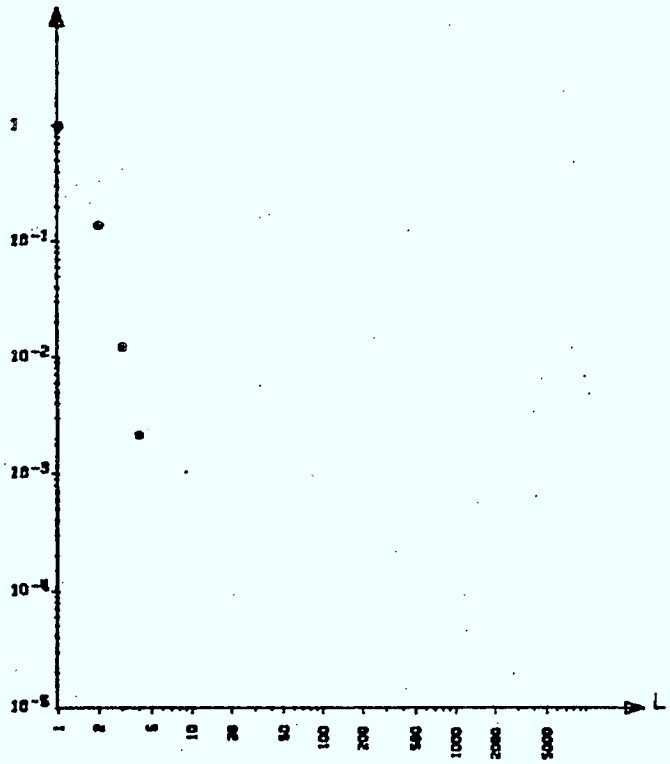

HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE
SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L
FICHIER : CD30F10
SERIE 3
N = 1
FREQUENCE (CUMULATIVE)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
L

HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SALVE DE LONGUEUR L

FICHIER : CD30F99
SERIE 3

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

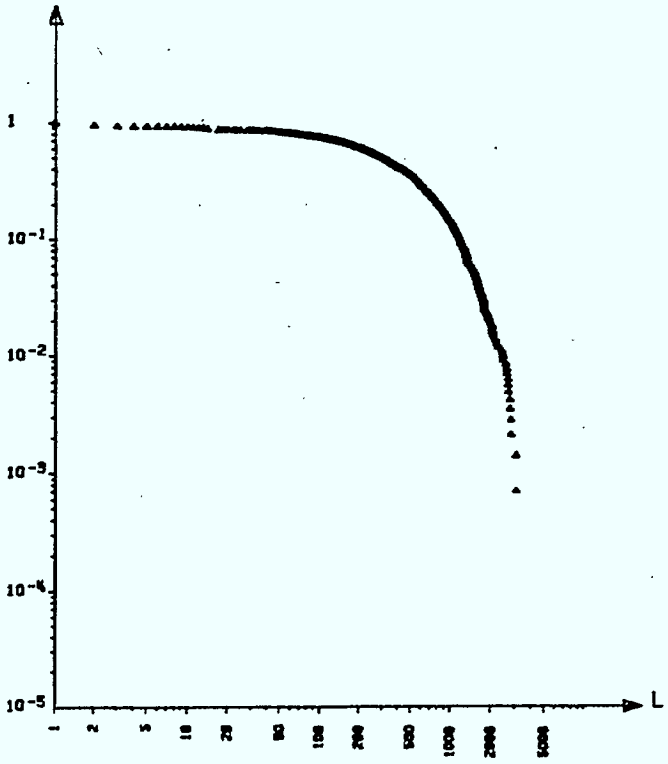


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

FICHIER : CD30F99
SERIE 3

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

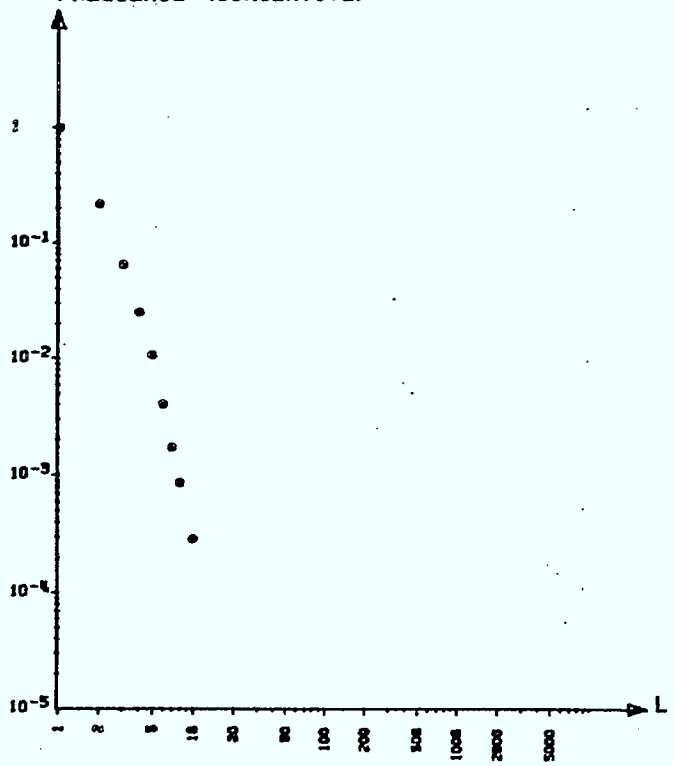


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SALVE DE LONGUEUR L

FICHIER : CD20F10
SERIE 4

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

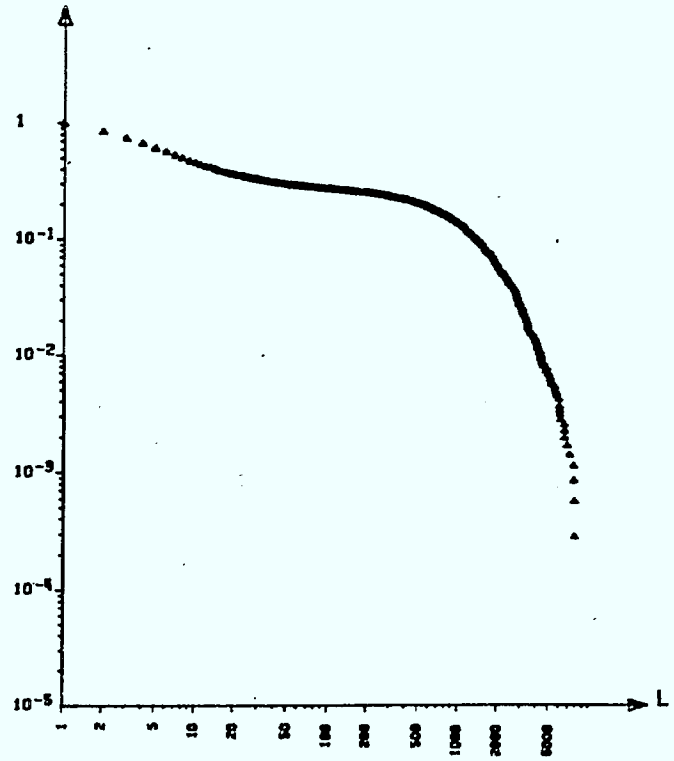


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

FICHIER : CD20F10
SERIE 4

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

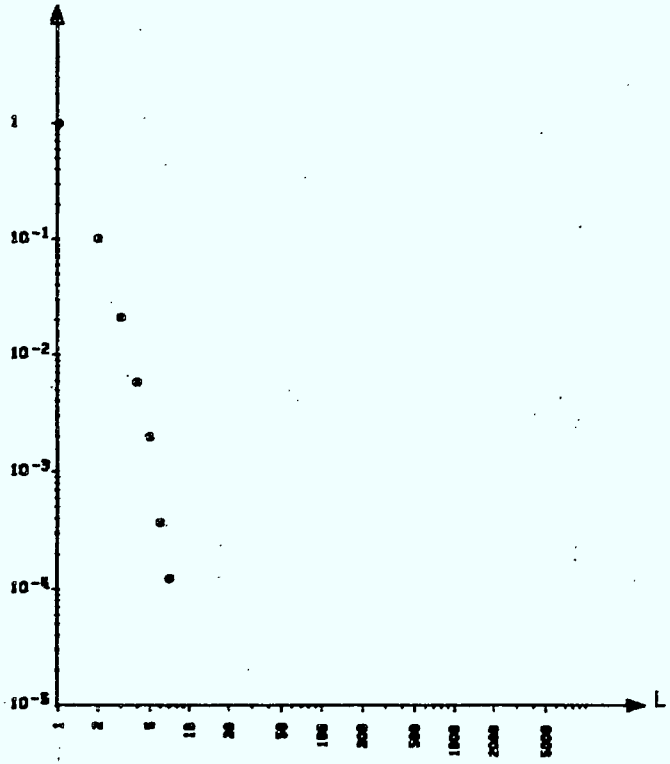


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SALVE DE LONGUEUR L

FICHIER : CD20F99
SERIE 4

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

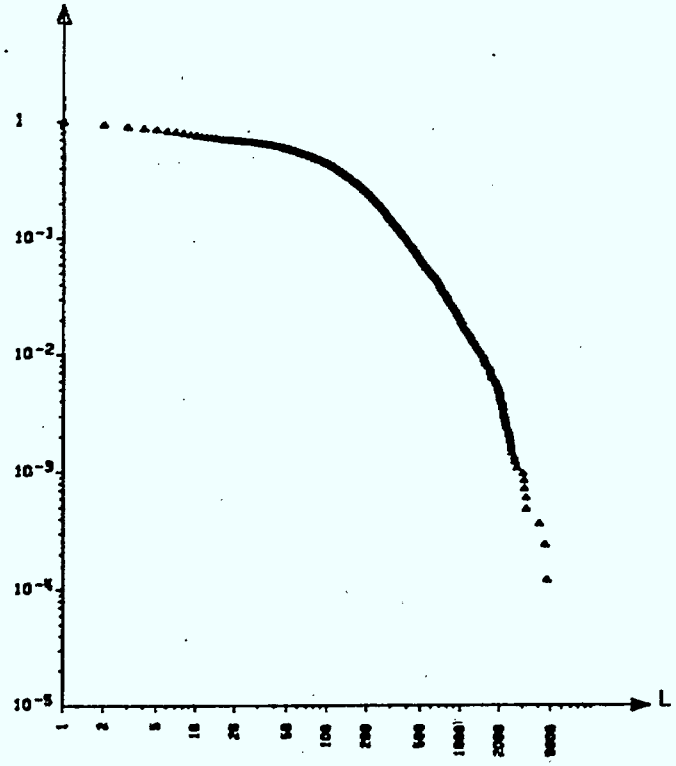


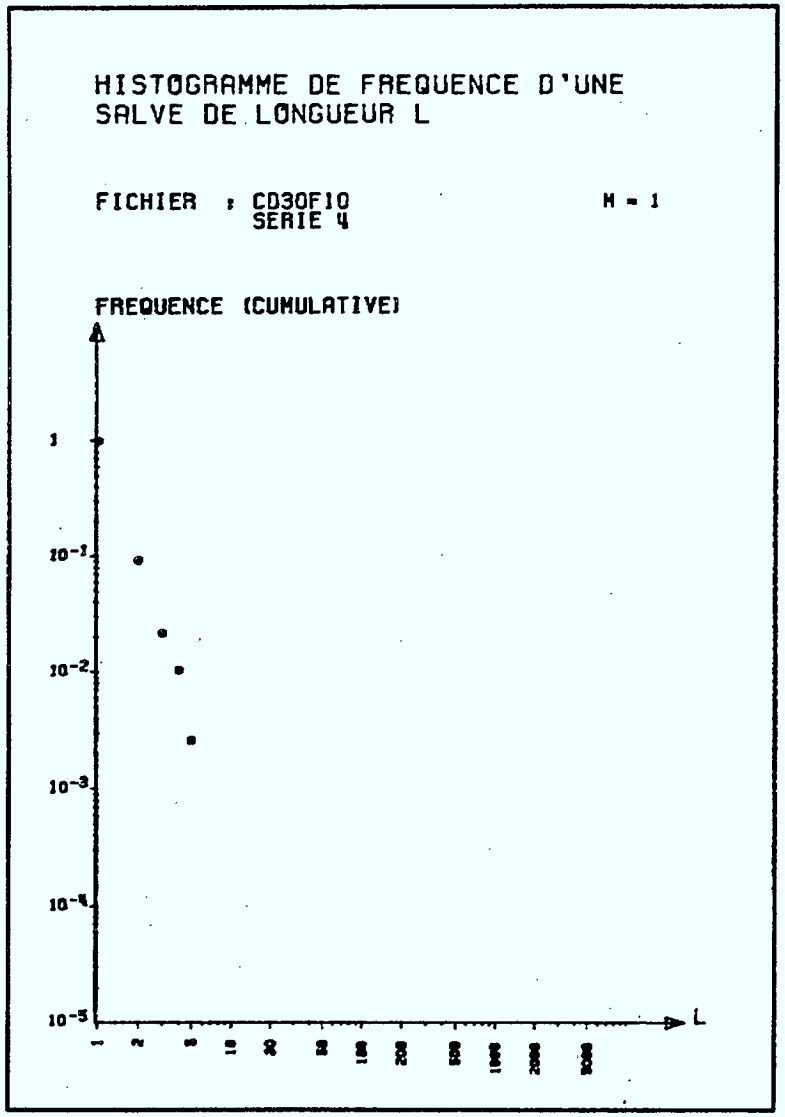
HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

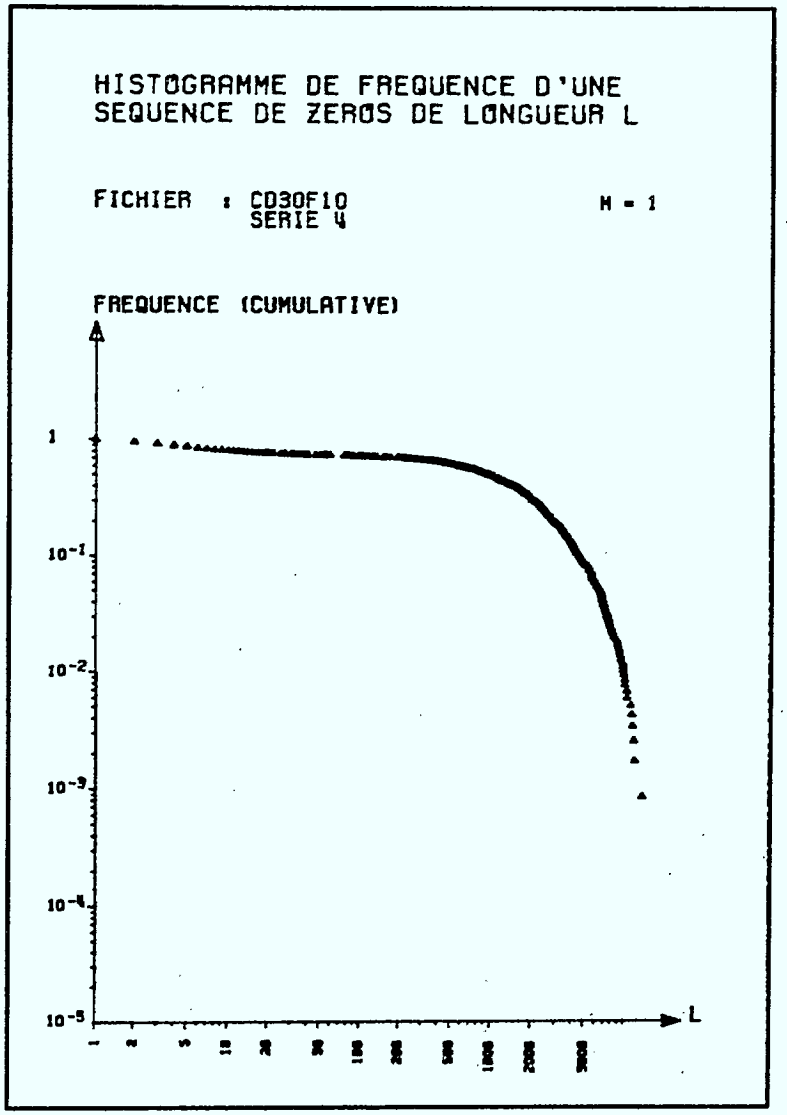
FICHIER : CD20F99
SERIE 4

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

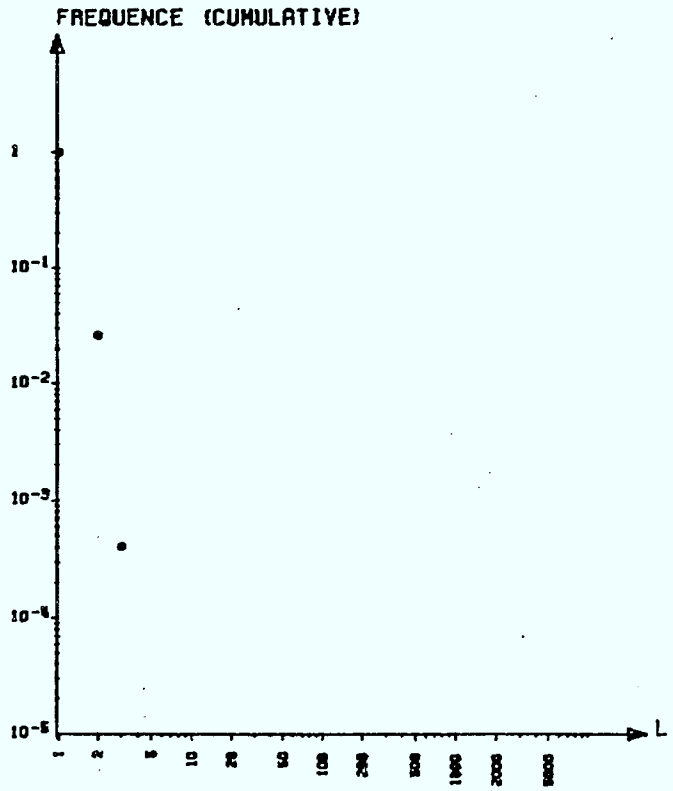



HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE
SALVE DE LONGUEUR L
FICHIER : CD30F10
SERIE 4
M = 1
FREQUENCE (CUMULATIVE)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
L


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE
SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L
FICHIER : CD30F10
SERIE 4
M = 1
FREQUENCE (CUMULATIVE)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
L

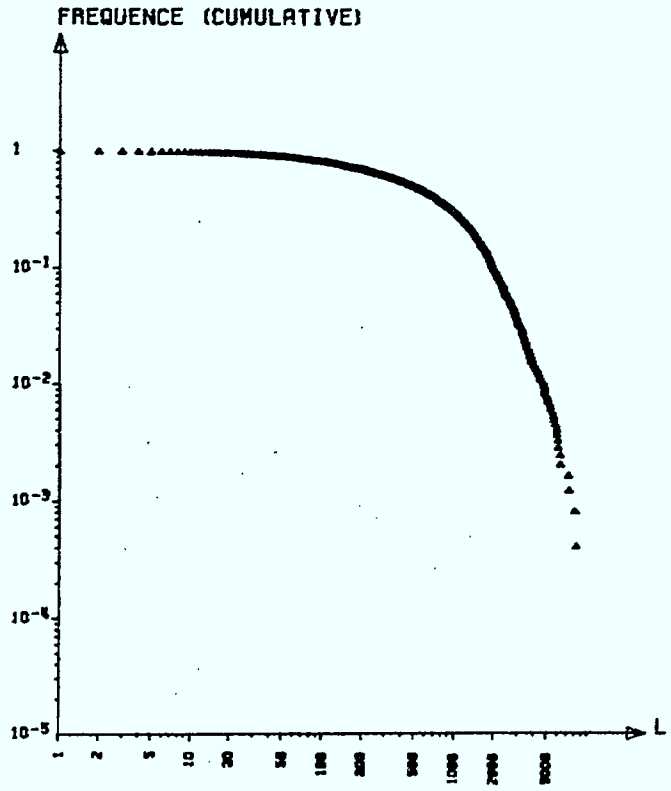
HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SALVE DE LONGUEUR L

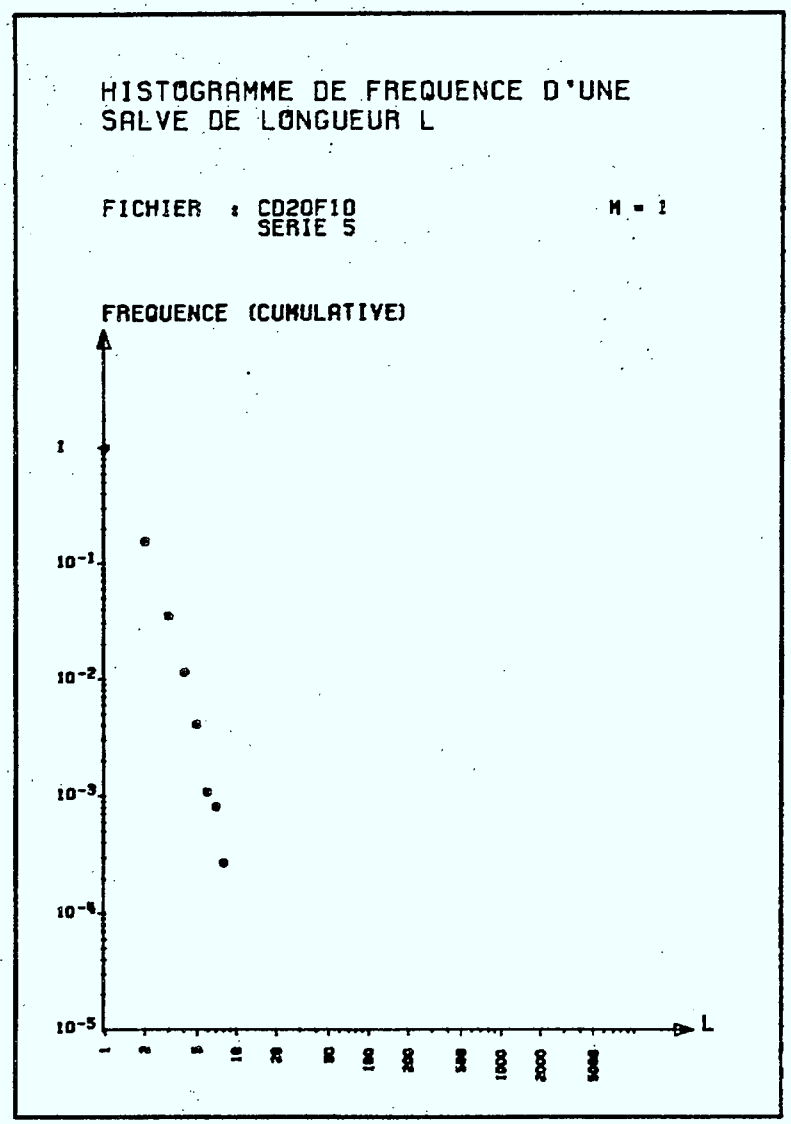
FICHIER : CD30F99 SERIE 4 M = 1

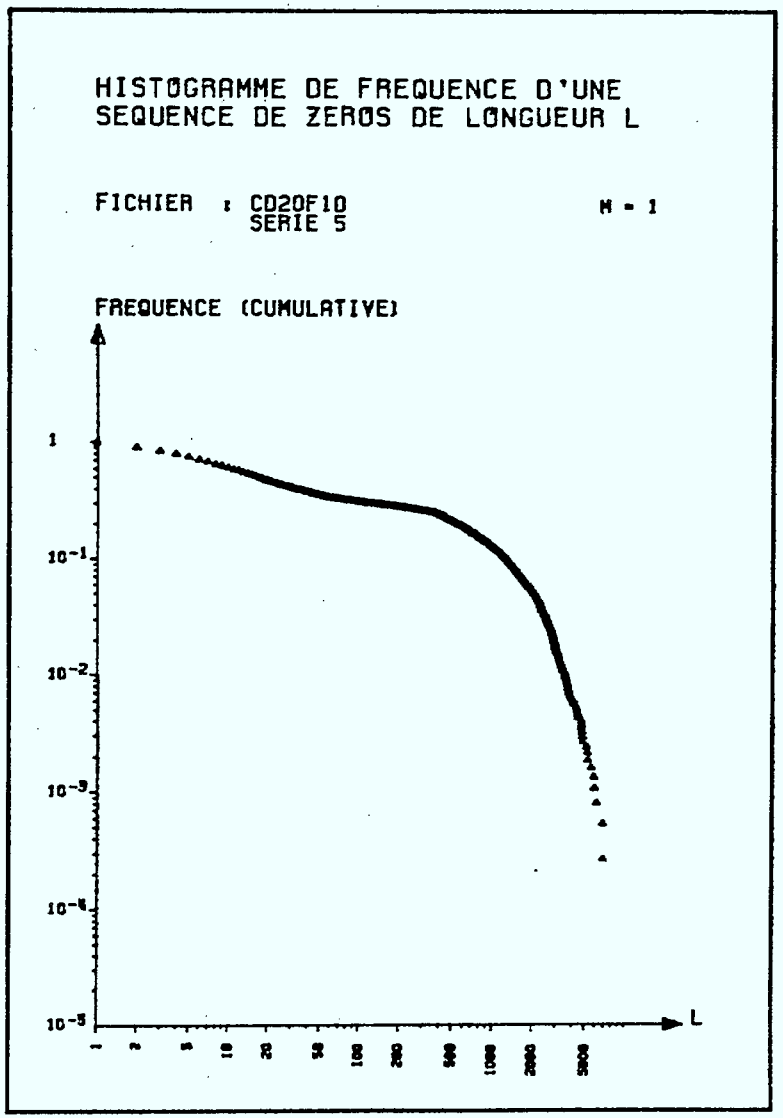


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

FICHIER : CD30F99 SERIE 4 M = 1




HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE
SALVE DE LONGUEUR L
FICHIER : CD20F10
SERIE 5
M = 1
FREQUENCE (CUMULATIVE)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
L

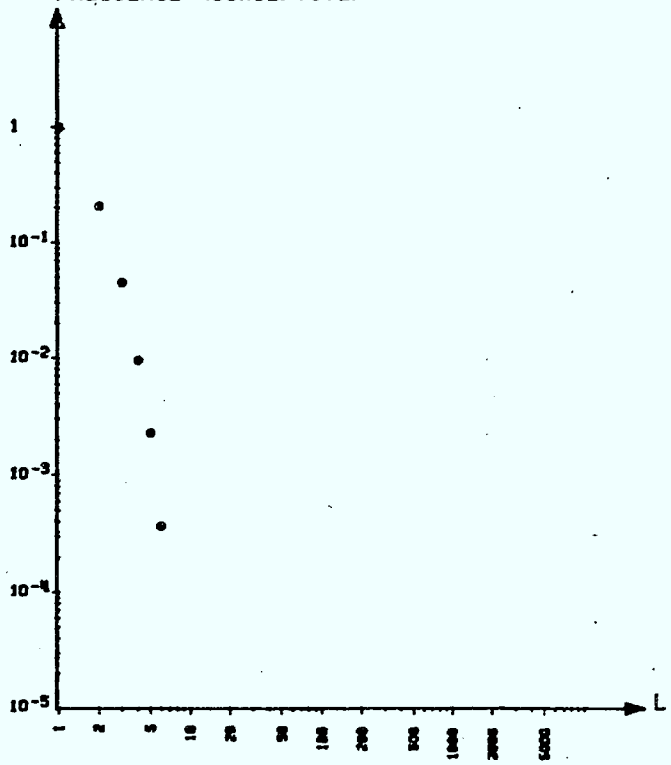

HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE
SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L
FICHIER : CD20F10
SERIE 5
M = 1
FREQUENCE (CUMULATIVE)
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
L

HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE
SALVE DE LONGUEUR L

FICHIER : CD20F99
SERIE 5

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

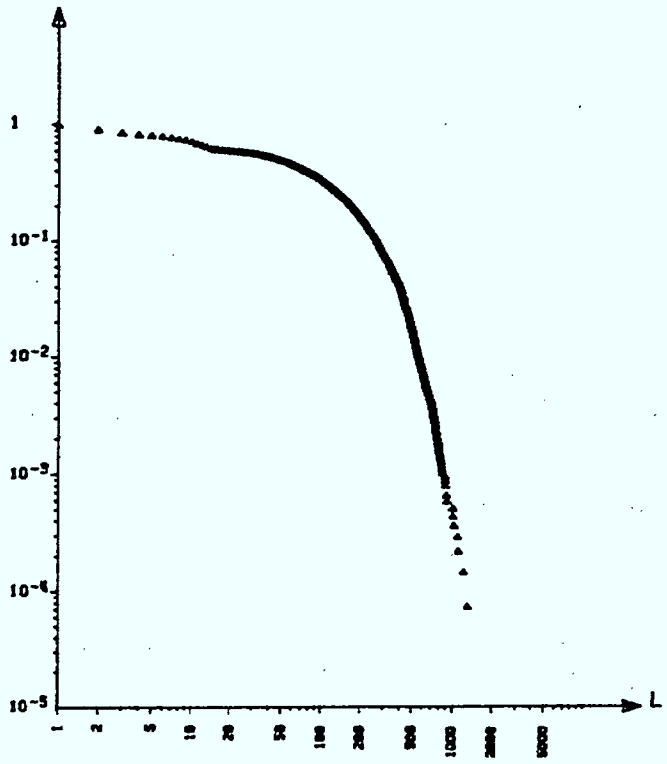


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE
SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

FICHIER : CD20F99
SERIE 5

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

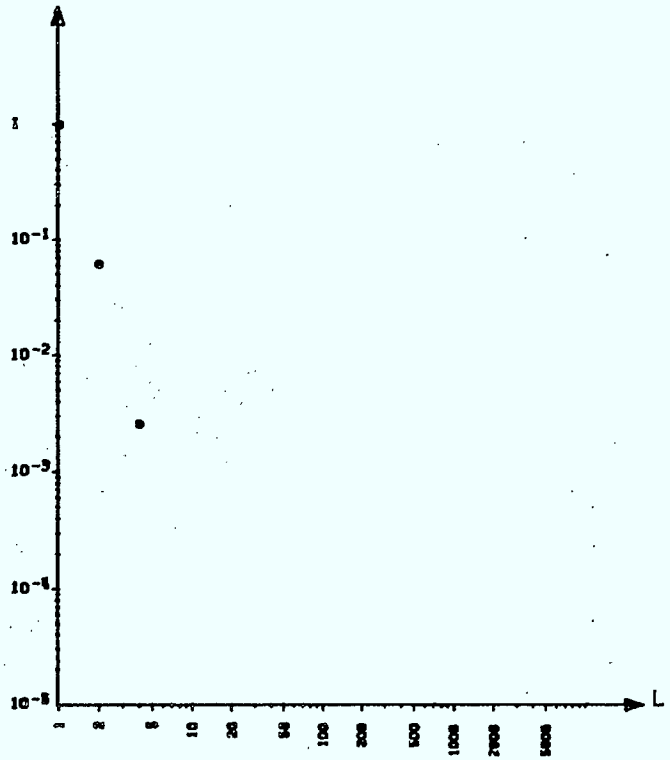


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE
SALVE DE LONGUEUR L

FICHIER : LCD30F10
SERIE 5

M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)

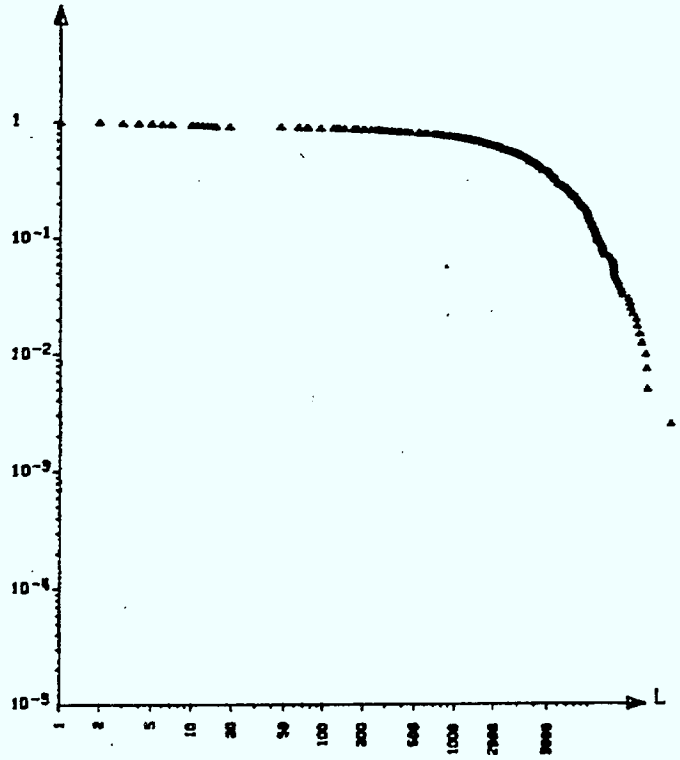


HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE
SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

FICHIER : LCD30F10
SERIE 5

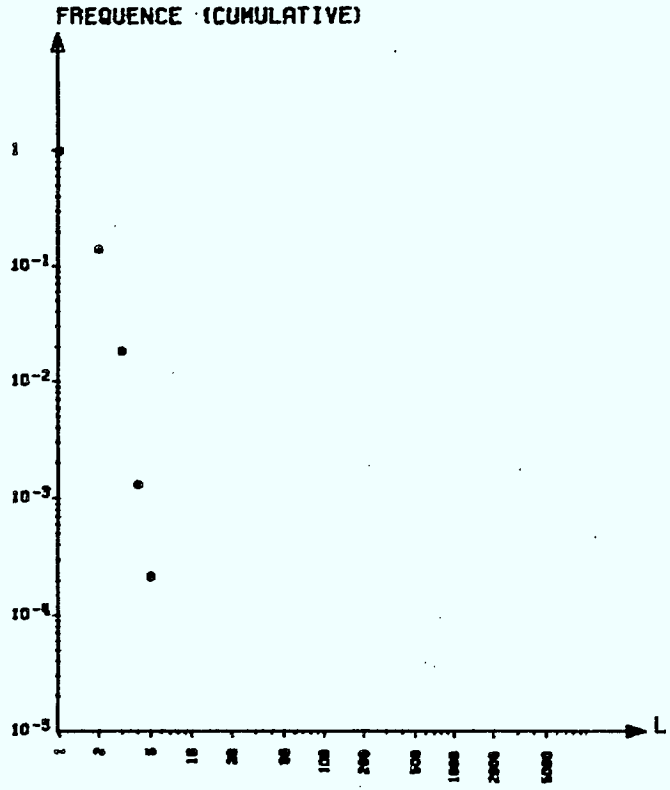
M = 1

FREQUENCE (CUMULATIVE)



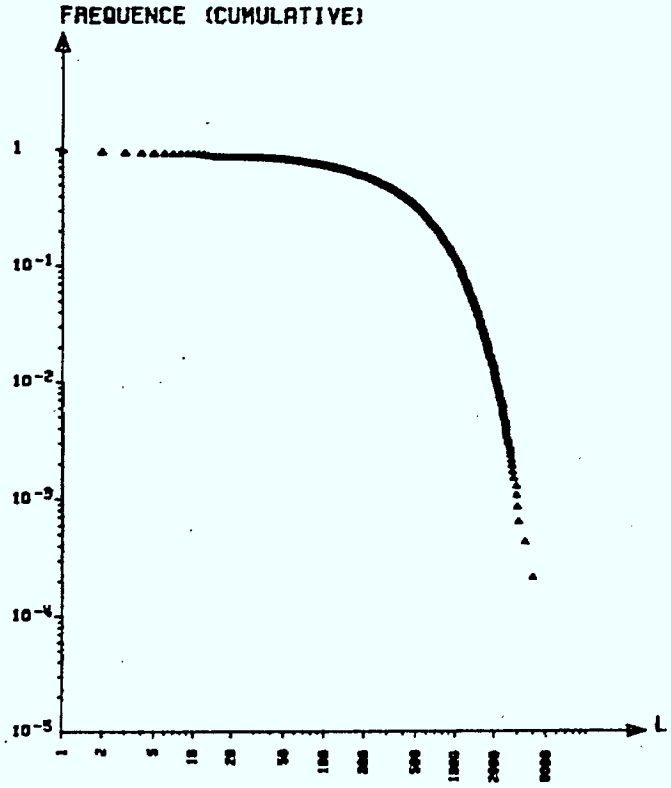
HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SALVE DE LONGUEUR L

FICHIER : CD30F99 SERIE 5 M = 1



HISTOGRAMME DE FREQUENCE D'UNE SEQUENCE DE ZEROS DE LONGUEUR L

FICHIER : CD30F99 SERIE 5 M = 1



CHAPITRE 4

UTILISATION DES CODES CONVOLUTIONNELS POUR LA CORRECTION DES SALVES D'ERREURS

Dans ce chapitre nous considérons les possibilités d'utilisation de codes convolutionnels pour la correction des erreurs en salve introduites par le canal VHF à évanouissements de Rayleigh considéré dans cette étude. L'organisation de notre présentation sur ce sujet est la suivante. La première section traite de la structure des encodeurs systématiques de convolution; on y définit plus particulièrement les notions fondamentales de matrices génératrices, générateurs, de syndromes ainsi que d'équations de vérification de parité en spécialisant plus particulièrement les résultats à la classe des codes de taux de codage de la forme $R = \frac{k}{(k+1)}$. La deuxième section aborde le sujet du décodage à décision majoritaire à partir d'un ensemble d'équations de parité "orthogonales". Finalement, on considère la technique de protection dite Δ-diffuse, et on présente les résultats expérimentaux obtenus à partir de simulations de deux codes particuliers (Le code de Kolhenberg-Forney-Massey de taux $R = \frac{1}{2}$ et le code de taux $R = \frac{2}{3}$ du à Iwadare et Massey) sur les enregistrements d'erreurs tels que fournis par le CRC.

4.1 Encodage de convolution systématique

Comme remarque préliminaire, on peut dire que les codes de convolution constituent une classe de codes linéaires théoriquement plus générale que la classe des codes linéaires en bloc et dont l'idée originale est due à Elias [1]. Cependant, du fait des valeurs essentiellement différentes de paramètres qui sont utilisés dans chacun des cas, on peut les considérer pour toute fin pratique comme deux classes de codes distinctes.

La définition générale d'un code convolutionnel peut se faire à partir du cheminement de principe suivant. Etant donnés deux entiers k et n satisfaisant aux conditions $k \leq n$ et n typiquement inférieur à 4; un code convolutionnel binaire (n, k) peut se définir comme toute application linéaire sur le corps de Galois GF(2) qui transforme la séquence d'entrée semi-infinie formée par les symboles d'information $\underline{i} = (\underline{i}_0 \underline{i}_1, \ldots,)$, représentant les sous séquences consécutives de k-symboles de $\underline{I}$, en une séquence codée de sortie $\underline{c} = (\underline{c}_0 \underline{c}_1, \ldots,)$ telle que les n-uples $\underline{c}_n$ soient de la forme:

$$\underline{c}_n = (\underline{i}_n, \underline{p}_n). \tag{4.1}$$

Il s'ensuit que la séquence codée contient l'information non modifée (i.e., l'encodage est systématique). D'autre part, il est imposé que les vecteurs ligne c_n satisfassent à la relation linéaire:

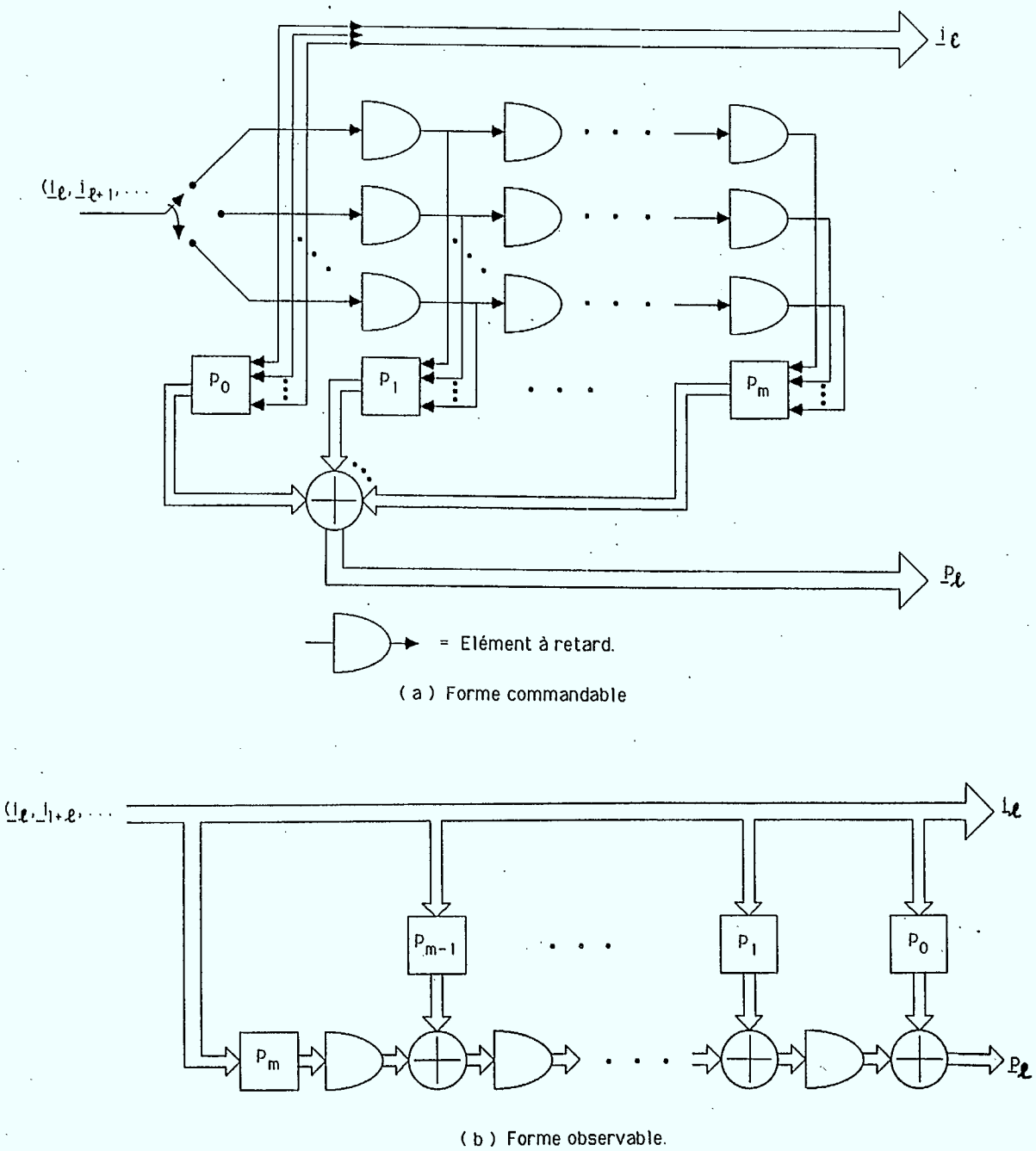


Figure 4.1 Schémas généraux d'encodeurs systématiques pour un code convolutionnel (n,k) de longueur de contrainte K = m+1 et caractérisé par les matrices de connexions P_0, P_1, ..., P_m.

$$\underline{c}_n = \sum_{j=0}^{m} \underline{i}_{n-j}\, G_j, \qquad n = 0,1,2 \cdots \tag{4.2}$$

expression dans laquelle on suppose d'une part que $i_n = 0$ lorsque $n < 0$ et d'autre part que les quantités G_j $j = 0,1,2, \ldots, m$ sont des matrices binaires de k rangées et n colonnes. La quantité $K = m + 1$ porte le nom de longueur de contrainte du code (m est souvent référencée comme la mémoire du code).

La transformation spécifiée par (4.2) associe à toute séquence de longueur Lk symboles binaires une séquence correspondante de Ln symboles binaires de sorte que le taux de codage associé à une telle opération est $R = \frac{k}{n}$.

La contrainte imposée par la relation (4.1) (i.e., le fait que la relation d'encodage soit systématique) a pour conséquence que les matrices G_j doivent être de la forme:

$$G_0 = [\underline{I}_k \mid P_0] \text{ et } G_j = [\underline{0}_k \mid P_j] \qquad j \geq 1 \tag{4.3}$$

où $\underline{I}_k$ et $\underline{0}_k$ représentent respectivement les matrices k par k unitaire et nulle et les matrices de parité P_j sont des matrices binaires k par $(n-k)$ qui spécifient uniquement l'encodeur.

L'encodeur tel que spécifié par (4.2) est aisément réalisable sous une forme connue, en théorie des systèmes, sous le vocable de commandable au moyen de k registres à glissement de longueur au plus m et connectés comme il est représenté à la Figure 4.1.a. Une autre réalisation possible (que l'on qualifie usuellement de forme observable) est aussi représentée à la Figure 4.1.b. On constate que cette dernière réalisation requiert au maximum $(n-k) \times m$ cellules de mémoire (à titre

de comparaison, la solution commandable nécessite un maximum de $k \times m$ éléments de mémoire) et est donc plus économique lorsque le taux de codage R est supérieur à $\frac{1}{2}$. Par contre, dans les applications qui nous intéressent et où la méthode de décodage à logique majoritaire est employée, l'encodeur systématique commandable est préférable du fait qu'il a l'avantage de fournir par la même occasion les différentes entrées retardées d'une longueur de contrainte qui sont nécessaires à l'opération de décodage.

Si $\underline{0}_{i \times j}$ représente la matrice nulle de i lignes et j colonnes, on constate que les équations (4.2) peuvent s'écrire comme.

$$\underline{c}_i = \sum_{l=0}^{m} \underline{c}_{i-l} \left[\frac{\underline{I}_k \mid \underline{0}_{k \times n-k}}{\underline{0}_{n-k \times k}} \right] G_l, \quad i \geq 0$$

i.e.

$$\underline{c}_i = \underline{c}_i \left[\frac{\underline{I}_k \mid P_0}{\underline{0}_{n-k \times n}} \right] + \sum_{l=1}^{m} \underline{c}_{i-l} \left[\frac{\underline{0}_k \mid P_l}{\underline{0}_{n-k \times n}} \right], \quad i \geq 0$$

de sorte que tout mot code $\underline{c} = (\underline{c}_0, \underline{c}_1, \ldots)$ satisfait aux équations de contrôle de parité:

$$\underline{c}\ H^T = \underline{0}, \tag{4.4}$$

où H^T représente la transposée de la matrice semi-infinie de vérification de parité H que l'on peut décrire sous la forme générale:

$$H = \begin{bmatrix} B & \underline{0}_{n-k \times n} & \cdots & \cdots \\ \underline{0}_{n-k \times n} & B & \underline{0}_{n-k \times n} & \cdots \\ \cdots & \underline{0}_{n-k \times n} & B & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

où B représente la matrice binaire $k \times (n-k)$:

$$B = \begin{bmatrix} -P_0^T & \underline{I}_{n-k} \\ -P_1^T & \underline{0}_{n-k} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ -P_m^T & \underline{0}_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ B_m \end{bmatrix}$$

Les équations spécifiées par (4.4) constituent la clé de toute métode de décodage basée sur l'utilisation du syndrome. En effet, si $\underline{e}$ est le vecteur d'erreur introduit par le canal de transmission, le signal reçu au décodeur peut s'écrire:

$$\underline{z} = \underline{c} + \underline{e} ,$$

de sorte que le vecteur $\underline{z}$ permet d'introduire le syndrome:

$$\underline{s} = \underline{z} H^T$$

qui satisfait donc aux équations:

$$\underline{s} = \underline{c} H^T + \underline{e} H^T = \underline{e} H^T$$

Il s'ensuit que le vecteur de syndrome est caractéristique des erreurs commises sur le canal indépendamment du mot codé transmis. Il peut donc servir à évaluer un estimé $\hat{\underline{e}}$ du vecteur d'erreur qu'il suffit alors de retrancher du vecteur reçu pour obtenir l'estimé final du vecteur transmis. Cette estimation peut être

réalisée de façon optimale en recherchant, par exemple, la séquence d'erreur la plus probable compatible avec le syndrome correspondant au vecteur reçu. La solution à ce problème est connue et conduit à un algorithme du type Viterbi dont la complexité croit exponentiellement avec la longueur de contrainte du code. D'autre part ce genre d'optimisation ne tient que sous l'hypothèse d'un canal sans mémoire, ce qui n'est certes pas le cas dans ce travail. Une solution plus intéressante pour notre application consiste à utiliser les valeurs des composantes de syndrome le long d'une fenêtre s'étendant sur une longueur de contrainte de façon à décoder les symboles d'information résultant à la sortie de l'encodeur. L'opération est répétée pour les symboles subséquents en faisant glisser à chaque fois la fenêtre d'un bloc. Une règle très simple permettant de réaliser cette opération efficacement est la règle de décision majoritaire appliquée à un sous ensemble de composantes de syndrome (ou à une combinaison linéaire de ces composantes) "orthogonales" vis-à-vis du symbole à décoder. Une telle méthode sera explicitée plus en détail à la section suivante. Les équations de syndrome d'intérêt sont alors soit les équations directes sur une longueur de contrainte soit les équations de syndrome corrigées à partir des décisions précédentes supposées sans erreur. De telles valeurs de syndrome corrigées par réinjection des décisions passées seront indexées par une étoile pour les distinguer des équations directes. Il est bien évident que dans ce cas, on doit aussi s'assurer que le système ne conduit pas à une génération infinie d'erreurs subséquentes à partir d'une simple erreur réinjectée.

Soit H^1 la matrice obtenue à partir de H en ne retenant que les premières $K\times(n-k)$ rangées restreintes aux premières $K\times n$ colonnes. D'autre part, soit H^2 la matrice formée par les $K\times(n-k)$ rangées de H situées entre les rangs $K\times(n-k)$ et $(2K-1)\times(n-k)$ et limitées aux $(2K-1)\times n$ premières colonnes. Si $\underline{S}_t{}^*$ et $\underline{S}_t$ sont les syndromes tronqués avec et sans réinjection dans la fenêtre s'étendant entre les instants $t-m$ et t (i.e., $\underline{S}_t=(\underline{s}_{t-m},\ldots,\underline{s}_t)^T$ et $\underline{S}_t{}^*=(\underline{s}_t{}^*,\ldots,\underline{s}_t{}^*)^T$), ils sont liés au vecteur colonne de symboles d'erreurs $\underline{E}_t$ dans la fenêtre $[t-2m-1,t]$ (i.e., $\underline{E}=(\underline{e}_{t-2m-1},\ldots,\underline{e}_t)^T$) par les équations:

$$\begin{aligned}\underline{S}_t&=H^2\underline{E}\\ \underline{S}_t{}^*&=[\underline{0}\mid H^1]\underline{E}\end{aligned}\tag{4.6}$$

Compte tenu de l'expression de H en fonction de B introduite ci-dessus, il est aisé de vérifier que H^1 et H^2 sont de la forme:

$$H^1=\begin{bmatrix} B_m & B_{m-1} & \cdots & \cdots & B_0 & \underline{0} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{0} & B_m & B_{m-1} & \cdots & B_1 & B_0 & \underline{0} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \underline{0} & B_m & B_{m-1} & \cdots & \cdots & B_0 \end{bmatrix}$$

$$H^2=\begin{bmatrix} B_0 & \underline{0} & \cdots & \cdots \\ B_1 & B_0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \text{"} & \cdots & \cdots \\ B_m & B_{m-1} & \cdots & B_0 \end{bmatrix}$$

A ce point, nous spécialisons la théorie générale considérée ci-dessus en la restreignant à la classe des codes de taux de la forme $R=\dfrac{k}{(k+1)}$ $k=1,2,\ldots$

Dans ce cas, le code fait correspondre au bloc d'information de k symboles $\underline{i}_t$ transmis à l'instant t un bloc de $k+1$ symboles binaires $(\underline{i}_t, p_t)$ où le symbole de parité p_t est calculé par l'expression:

$$p_t = \sum_{l=0}^{m} \underline{i}_{t-l} P_l \tag{4.7}$$

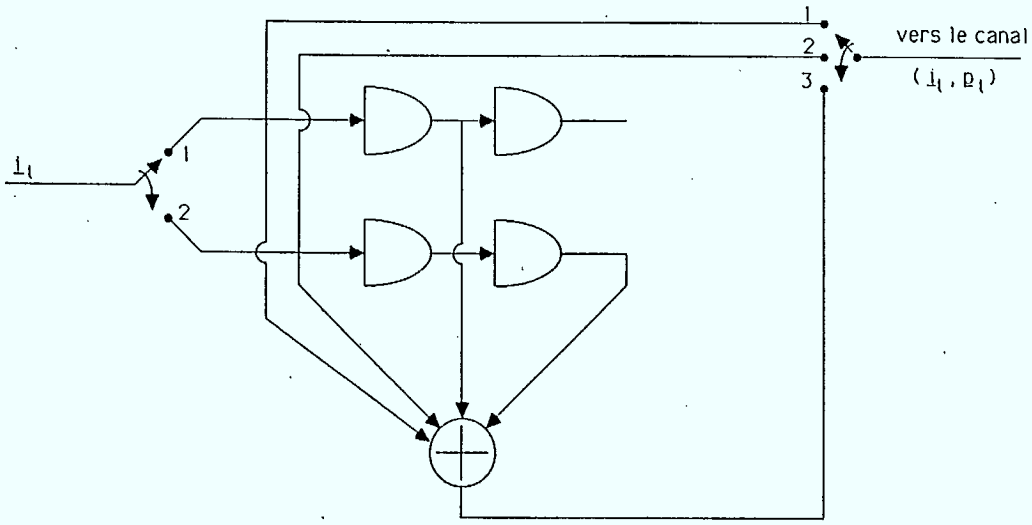
dans laquelle m est la mémoire du code et les P_l représentent des vecteurs colonne de k éléments binaires. Si p_l^i représente la i -ème composante de P_l, on peut former les k $(m+1)$-uples binaires $\underline{g}^i = (p_0^i, p_1^i, \ldots, p_m^i)$ qui spécifient uniquement le code et que l'on appellera les "générateurs" du code.

Avec cette notation et si $\underline{e}_t$ représente le vecteur d'erreurs sur les symboles d'information à l'instant t et ϵ_t l'erreur sur la parité, le syndrome s_t à l'instant t (On notera que pour cette classe de codes le syndrome est un scalaire) relatif à la séquence reçue sur le canal $\underline{r}_t = (\underline{i}_t + \underline{e}_t, p_t + \epsilon_t)$ se calcule comme:

$$\begin{aligned} s_t &= p_t + \epsilon_t + \sum_{l=0}^{m} \underline{i}_{t-l} P_l + \sum_{l=0}^{m} \underline{e}_t P_l \\ &= \epsilon_t + \sum_{l=0}^{m} \underline{e}_{t-l} P_l . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Exemple:

Pour le code de taux $R = \frac{2}{3}$, longueur de contrainte $K = 3$, caractérisé par les générateurs $\underline{g}^1 = (110)$, $\underline{g}^2 (101)$ on détermine l'encodeur commandable et le calculateur de syndrome tels que représentés sur la Figure 4.2



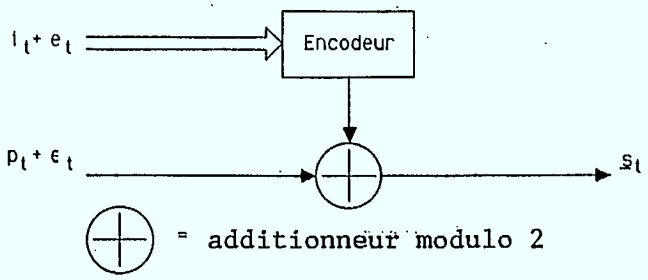


Figure 4.2 Encodeur et calculateur de syndrome pour le code de taux $R = 2/3$, longueur de contrainte 3 générée par $\underline{g}^1 = [110]$ et $\underline{g}^2 = [101]$.

4.2 Décodage à décision majoritaire:

Du fait qu'il n'existe pas de théorie générale relative à l'implantation de décodeurs à décision majoritaire, les principes généraux de fonctionnement d'un décodeur de ce type s'expliquent plus facilement par voie d'exemples.

Considérons à cet effet le plus simple des encodeurs convolutionnels de taux $R=\frac{1}{2}$, longueur de contrainte $K=2$ et de générateur $\underline{g}^1=(11)$. Les équations de syndrome correspondantes dans la fênetre $[t-1,t]$ sont d'après (4.8):

$$\begin{aligned} s_{t-1} &= e_{t-2} + e_{t-1} + \epsilon_{t-1} \\ s_t &= e_{t-1} + e_t + \epsilon_t \end{aligned}$$

Ces deux équations ont la propriéte d'être "orthogonales" sur le symbole e_{t-1} dans le sens que ce symbole apparaît simultanément dans les deux équations alors que tous les autres symboles impliqués par ces équations n'apparaissent qu'une fois dans l'une ou l'autre mais pas les deux. Il s'ensuit que si $e_{t-1}=1$ et les autres symboles $(e_{t-2},e_t,\epsilon_{t-1},\epsilon_t)$ sont tous "0", les valeurs de s_t et s_{t-1} sont simultanément "1". Par contre, si $e_{t-1}=0$ et au plus un parmi les autres symboles est 1, alors s_t ou s_{t-1} vaut 1 mais pas les deux. Il s'ensuit que la règle de décision majoritaire relative à l'estimé $\hat{e}_{t-1}$ de e_{t-1} suivante:

$$\hat{e}_{t-1}=1 \text{ lorsque } (s_t=1) \text{ et } (s_{t-1}=1),$$
$$\hat{e}_{t-1}=0 \text{ autrement,}$$

conduit à la correction de toute erreur simple parmi les symboles

$e_{t-2}, e_{t-1}, e_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_t$. L'utilisation d'une telle combinaison code-décodeur sur un canal binaire symétrique de taux d'erreur p conduit à un taux d'erreur moyen de sortie dont la valeur asymptotique est approximativement:

$$TEM \approx 10p^2.$$

La structure du décodeur correspondant est représentée à la Figure 4.3.a. A ce point on remarque que du fait qu'une décision est prise à l'instant t sur l'estimé $\hat{e}_{t-1}$ de l'erreur relative au symbole d'information à cet instant et que cette décision fait intervenir l'erreur e_{t-2}, il est donc possible d'utiliser la décision précédente $\hat{e}_{t-2}$ et de la retrancher de l'équation donnant s_{t-1} de façon à former le syndrome étoilé s_{t-1}^* dont la valeur est:

$$s_{t-1}^* = (e_{t-2} - \hat{e}_{t-2}) + e_{t-1} + \epsilon_{t-1}.$$

On constate que s_{t-1}^* et s_t constituent toujours un ensemble d'équations orthogonales sur e_{t-1} et donc la même règle de décision majoritaire développée ci-dessus et utilisant s_{t-1}^* substitué à la place de s_t conduit à une procédure qui, sous l'hypothèse que les décisions précédentes soient sans erreur (i.e., $e_{t-1} = \hat{e}_{t-1}$) permet de corriger toutes les erreurs simples parmi les 4 symboles e_{t-1}, e_t, ϵ_{t-1}, ϵ_t. Il s'ensuit que la performance d'un tel décodeur sur un canal binaire symétrique peut atteindre:

$$TEM \approx 6p^2.$$

Le schéma complet du décodeur correspondant (décodeur à réaction ou réfléchi) est représenté à la Figure 4.3.b. Bien entendu, la question qui se pose dans le cas du décodeur réfléchi est d'évaluer l'impact, vis-à-vis des décision futures, des

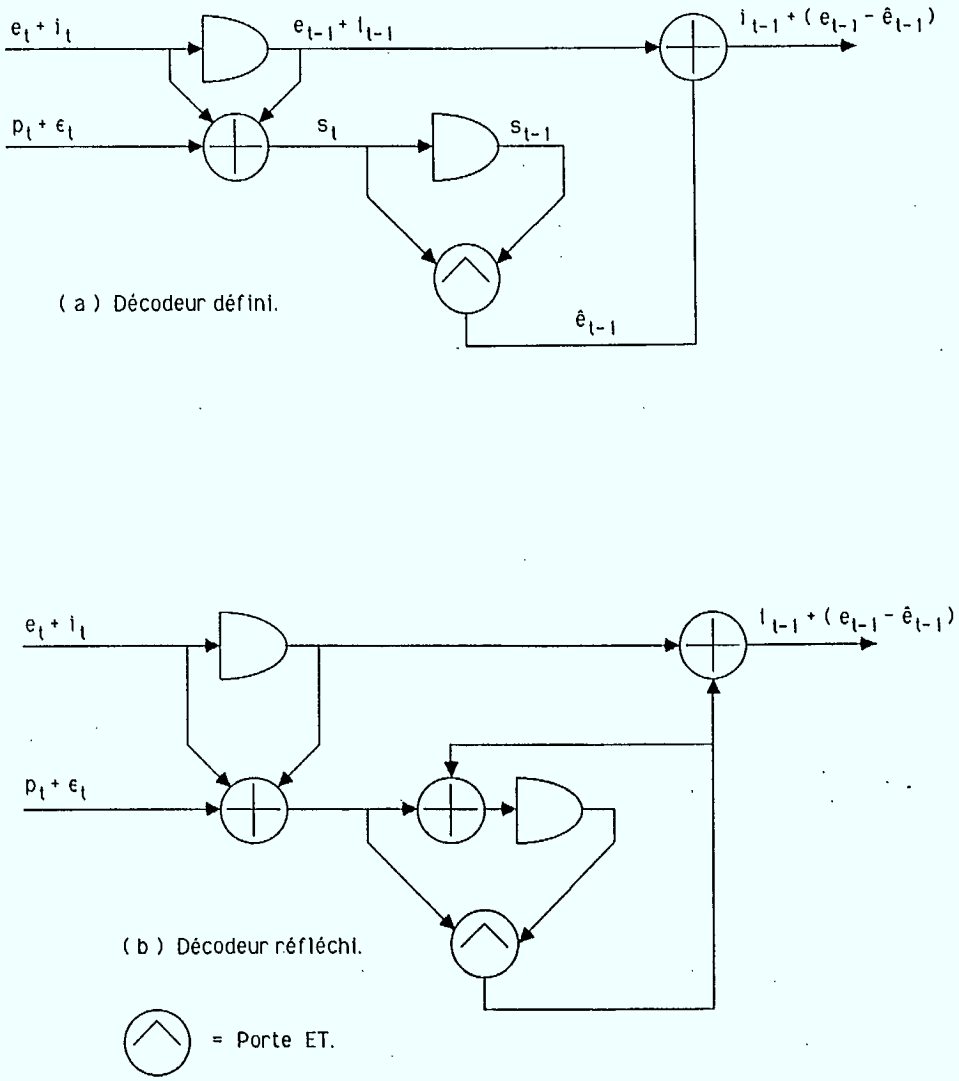


Figure 4.3 Décodeurs défini et réfléchi pour le code convolutionnel de taux 1/2, longueur de contrainte K = 2 et générateur $\underline{g}^1 = [11]$.

erreurs réinjectées dans les valeurs de syndrome. En première approximation on peut s'attendre comme dans tout phénomène de rétro-action à une possibilité d'instabilité conduisant, en l'absence d'erreurs subséquentes sur le canal, à la génération d'une infinité d'erreurs décodées. Une telle propagation catastrophique d'erreur est possible pour certains encodeurs. D'autre part, même en cas de stabilité, l'envergure de l'effet de propagation des erreurs est un problème dont l'étude analytique est très difficile, voir même impossible. Cependant , la plupart des encodeurs d'intérêt sont stables. En particulier l'exemple considéré ci-dessus. En fait, dans ce cas très simple, il est possible de mener à bien l'analyse complète et il a été démontré par Morrissey [2], en utilisant une analyse stochastique markovienne que la valeur exacte du taux d'erreur est égale asymptotiquement à

$$TEM \approx 7p^2.$$

Le principe d'orthogonalité se généralise aisément à la correction d'erreurs multiples ainsi qu'aux codes dont le taux de transmission est $>\frac{1}{2}$. A cet effet, on introduit la définition générale suivante due à Massey [3]:

Définition:

Un ensemble de $2t$ relations qui sont des combinaisons linéaires (sur le corps à 2 éléments GF(2)) d'équations de vérification de parité est dit "orthogonal" sur un symbole d'information particulier dont l'erreur est e^* à la condition que e^* apparaisse dans chacune des $2t$ relations et que aucun des autres symboles qui sont vérifiés par l'ensemble de ces relations

n'apparaisse plus d'une fois.

Compte tenu de cette définition, il est aisé de vérifier [3] que la règle de décision majoritaire énoncée ci-dessous et donnant $\hat{e}^*$ l'estimé de l'erreur e^*:

4.2.1 Règle de décision majoritaire:

Décider $\hat{e}^*=1$ (i.e., une erreur a eu lieu) si au moins $t+1$ des équations orthogonales sur e^* ont la valeur '1'.

Autrement $\hat{e}^*=0$.

fournit un estimé correct de l'erreur e^* à la condition qu'au plus t erreurs se soient produites parmi l'ensemble des symboles qui sont vérifiés par les équations orthogonales.

Les équations de vérification de parité orthogonales peuvent être construites, dans le cas des codes convolutionnels, à partir des équations de syndromes du type (4.6) avec ou sans ré-injection des décisions passées. Dans le cas où un sous ensemble d'équations du système (4.6) est orthogonal, on dit que le code correspondant est auto-orthogonal. Plus généralement, dans le cas où l'on doit former des combinaisions linéaires des équations du système (4.6) pour obtenir un système orthogonal on dit que le code correspondant est orthogonalisable. Dans les deux cas, on parle de codes convolutionnels décodables par décision majoritaire. Des codes auto-orthogonaux de taux $R=\frac{1}{2}$ ont été construits par

Robinson-Bernstein [4], Massey et Macy en utilisant le concept d'ensembles à différences distinctes. D'autre part Wu [5] a publié des listes extensives de codes convolutionnels décodables par la technique de décision majoritaire et de taux de codage élevé.

Pour illustrer, nous considérons les deux exemples suivants:

A) Soit le code de taux $\frac{2}{3}$, longueur de contrainte $K=3$ généré par $\underline{g}^1=(110)$ et $\underline{g}^2=(101)$. En utilisant le système d'équations (4.6) relatif à ce code, on obtient:

$$\underline{S}_t = \begin{bmatrix} 010100111000000 \\ 000010100111000 \\ 000000010100111 \end{bmatrix} \underline{E}_t$$

i.e., les deux ensembles d'équations (s_t, s_{t-1}) d'une part et (s_t, s_{t-2}) d'autre part sont respectivement orthogonaux sur le premier symbole d'information à l'instant $t-1$ et le deuxième symbole d'information à l'instant $t-2$. Si ϵ_t représente l'erreur à l'instant t sur le symbole de parité, les équations orthogonales peuvent donc s'écrire:

$$s_t = e_t^1 + e_t^2 + e_{t-1}^1 + e_{t-2}^2 + \epsilon_t$$
$$s_{t-1} = e_{t-1}^1 + e_{t-1}^2 + e_{t-2}^1 + e_{t-3+\epsilon t-1}^2 ,$$

$$s_t = e_t^1 + e_t^2 + e_{t-1}^1 + e_{t-2}^2 + \epsilon_t$$
$$s_{t-2} = e_{t-2}^1 + e_{t-2}^2 + e_{t-3}^1 + e_{t-4}^2 + \epsilon_{t-2}.$$

Utilisant la ré-injection des décisions passées, les équations deviennent:

$$s_t^* = e_t^1 + e_t^2 + e_{t-1}^1 + \epsilon_t$$

$$s_{t-1}^* = e_{t-1}^1 + e_{t-1}^2 + \epsilon_{t-1},$$

$$s_t^* = e_t^1 + e_t^2 + e_{t-2}^2 + \epsilon_t$$

$$s_{t-2}^* = e_{t-2}^2 + \epsilon_{t-2}.$$

Le décodeur à décision majoritaire correspondant est représenté sur la Figure 4.4. Le commutateur S permet, en position 2, d'initialiser le mode réfléchi du décodeur.

B) soit le code de taux $R = \frac{1}{2}$, longueur de contrainte $K = 6$, généré par $\underline{g}^1 = (100111)$. On obtient, pour ce code, les équations de syndromes:

$$\underline{S}_t = \begin{bmatrix} 1010100000110000000000 \\ 0010101000001100000000 \\ 0000101010000011000000 \\ 0000001010100000110000 \\ 0000000010101000001100 \\ 0000000000101010000011 \end{bmatrix} \underline{E}_t$$

Il est aisé de vérifier que ce code est orthogonalisable par rapport à l'ensemble des quatre équations $(s_t + s_{t-4},\ s_{t-1},\ s_{t-2},\ s_{t-5})$ ce qui conduit au décodeur à décision majoritaire à correction d'erreurs doubles tel que représenté à la Figure 4.5. Encore une fois, le commutateur S en position 2 permet d'initialiser le fonctionnement en décodeur réfléchi.

4.3 Codes convolutionnels à protection Δ-diffuse:

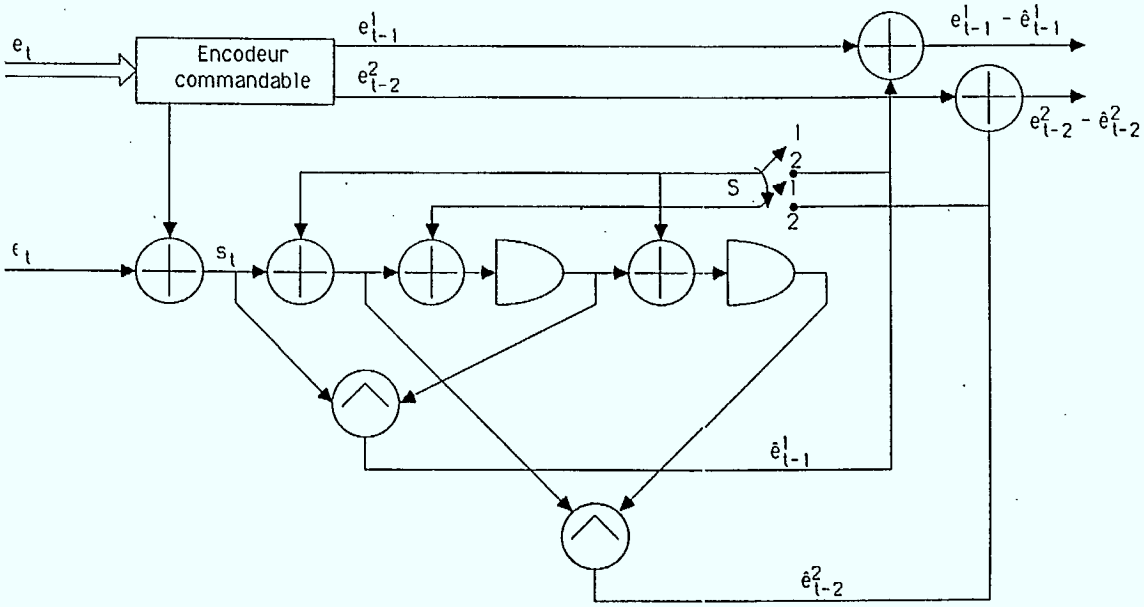


Figure 4.4 Décodeur à seuil pour le code convolutionnel de taux R = 2/3, longueur de contrainte K = 3 généré par $\underline{g}^1$ = [110] et $\underline{g}^2$= [101].

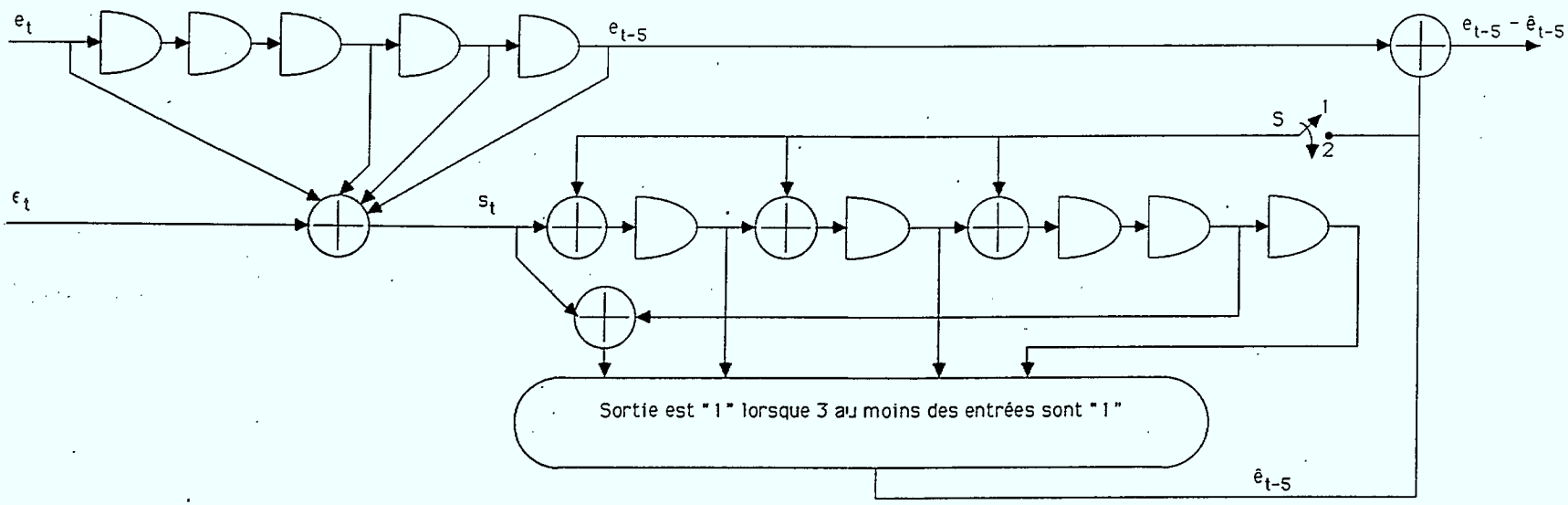


Figure 4.5 Décodeur à seuil à double correction d'erreurs pour le code de taux R = 1/2, longueur de contrainte K = 6 généré par $\underline{g}^1$ = [100111].

Lorsque l'on considère la protection contre les erreurs en paquets, on utilise généralement la technique d'entrelacement appliquée à un ensemble de codeurs-décodeurs que l'on sait adéquats pour la correction d'erreurs indépendantes. Il s'ensuit qu'une telle technique d'entrelacement garantit la correction de salves d'erreurs d'une certaine longueur vis-à-vis d'un intervalle de garde suffisamment long; les valeurs de ces paramètres dépendent essentiellement du degré d'entrelacement utilisé et du pouvoir de correction du code. A cet effet il est utile à ce point d'énoncer le résultat fondamental suivant du à Gallager [7]:

4.3.1 Borne de Gallager:

Tout système de codage qui opère avec un taux de codage R et est capable de corriger toutes les salves d'erreurs de longueur maximum L symboles comprises entre des intervalles de garde de longueur $\geq G$ doit satisfaire à l'inégalité:

$$\frac{G}{L} \geq \frac{1+R}{1-R}.$$

Il existe aussi un résultat un peu plus faible se rapportant à la correction de **presque toutes** les salves d'erreurs de longueur au plus L vis-à-vis d'un intervalle de garde d'au moins G :

4.3.2 Borne de Gallager-Massey:

Tout système de codage de taux R permettant de corriger presque toutes les salves d'erreurs de longueur L ou moins séparées par des intervalles de garde d'au moins G symboles sans erreur doit satisfaire à l'inégalité:

$$\frac{G}{L} \geq \frac{R}{1-R}.$$

En général, la technique d'entrelacement ne permet pas d'atteindre les bornes précédentes. Cependant, il s'avère que, dans le cas de canaux où les erreurs ont tendance à se regrouper par paquets, certaines techniques de codage directes sont beaucoup plus effectives que la technique classique d'entrelacement. Par exemple, dans le cas des codes convolutionnels, une telle technique est basée sur le décodage à décision majoritaire des codes Δ-diffus dont l'idée première revient à Kolhenberg [6].

Du fait qu'il n'existe pas de théorie générale pour ce type de codeur-décodeur, nous considérons deux cas typiques qui ont d'ailleurs été utilisés sur les données expérimentales.

4.3.3 Code de Kolhenberg-Forney-Massey à protection Δ-diffuse [6]:

Ce code de taux $R=\frac{1}{2}$ et de paramètre Δ est défini par l'unique générateur:

$$\underline{g}^1=(10^{\Delta-1}10^{\Delta-1}10^{\Delta}1),$$

où, comme précédemment, nous utilisons la notation 0^x pour préciser une suite de x zéros consécutifs.

Le circuit d'encodage correspondant est représenté à la Figure 4.6.a et requiert un registre à décalage de longueur $3\Delta+2$.

Le circuit de décodage à décision majoritaire qui apparaît sur la Figure 4.6.b est basé sur les équations de syndromes:

$$s_t=e_t+e_{t-\Delta}+e_{t-2\Delta}+e_{t-3\Delta-1}+\epsilon_t\,,$$

où e_t et ϵ_t sont les erreurs introduites au temps t par le canal sur le symbole d'information et le symbole de parité. On voit que le symbole $e_{t-3\Delta-1}$ apparaît explicitement dans les équations donnant s_t, $s_{t-\Delta-1}$, $s_{t-2\Delta-1}$, $s_{t-3\Delta-1}$ suggérant la possibilité d'un décodeur à décision majoritaire à correction d'erreurs doubles. Pour ce faire on doit utiliser les quatre équations suivantes (où les syndromes étoilés correspondent aux valeurs corrigées à partir des décisions précédentes):

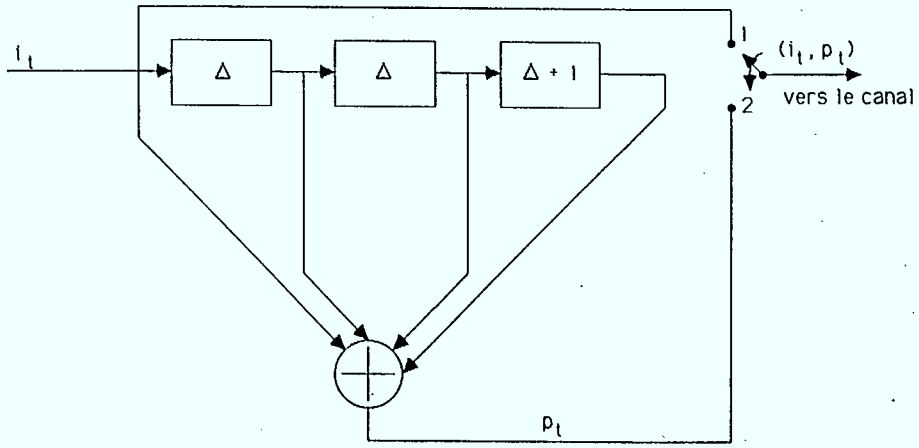
$$s_t=e_t+e_{t-\Delta}+e_{t-2\Delta}+e_{t-3\Delta-1}+\epsilon_t$$

$$s^*_{t-1}+s^*_{t-\Delta-1}=e_{t-1}+e_{t-3\Delta-1}+\epsilon_{t-1}+\epsilon_{t-1}$$

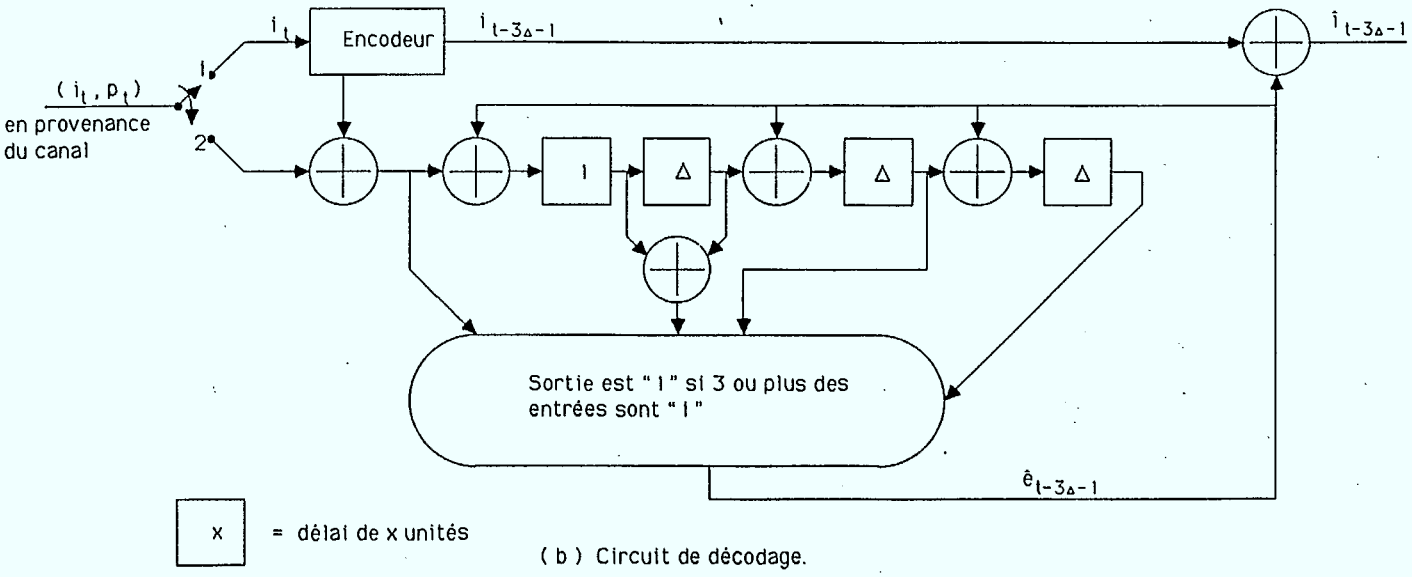
$$s^*_{t-2\Delta-1}=e_{t-2\Delta-1}+e_{t-3\Delta-1}+\epsilon_{t-2\Delta-1}$$

$$s^*_{t-3\Delta-1}=e_{t-3\Delta-1}+\epsilon_{t-3\Delta-1}$$

L'utilisation de la règle de décision majoritaire relative à l'estimé $\hat{e}_{t-3\Delta-1}$ pour $e_{t-3\Delta-1}$:



(a) Circuit d'encodage.



(b) Circuit de décodage.

Figure 4.6 Circuits d'encodage et de décodage à décision majoritaire du code convolutionnel de Kohlenberg - Forney diffus.

$\hat{e}_{t-3\Delta-1}=1$ si 3 ou plus des valeurs s_t , $s_{t-1}^{*}+s_{t-\Delta-1}^{*}$, $s_{t-2\Delta-1}^{*}$, $s_{t-3\Delta-1}^{*}$ sont 1.

autrement $\hat{e}_{t-3\Delta-1}=0$.

résulte donc dans la correction de toutes les erreurs de poids inférieur ou égal à 2 parmi l'ensemble des 11 symboles distincts vérifiés par les équations ci-dessus. D'autre part, on constate, du fait de la diffusion Δ, que toute salve d'erreur de longueur au plus 2Δ symboles de canal précédée par une garde d'au moins $2.(3\Delta+2)-2=6\Delta+2$ symboles de canal se déplace dans la fenêtre du décodeur ne peut intercepter au plus que deux symboles de parité sensibles résultant ainsi en un décodage correct. Il s'ensuit que ce code possède un pouvoir de correction vis-à-vis des salves d'erreurs de longueur L et d'intervalle de garde $\geq G$ satisfaisant à la relation

$$\frac{G}{L}=\frac{6\Delta+2}{2\Delta}\approx 3,$$

ce qui, d'après la borne de Gallager, est optimum pour un code de taux $\frac{1}{2}$. D'autres codes de taux $R=\frac{1}{2}$ Δ-diffus ont été déterminés par Ferguson [9]. Cependant leur pouvoir de correction asymptotique des salves d'erreurs est 4 au lieu de 3.

4.3.4 Code Δ-diffus de Iwadare-Massey de taux R = 2/3 [8]:

Ce code de taux $R=\frac{2}{3}$ et de paramètre Δ possède une longueur de con-

trainte de $5\Delta+4$ et peut se générer à partir des deux générateurs suivants.

$$\underline{g}^1=(0^{4\Delta+2}10^{\Delta}1)$$
$$\underline{g}^2=(0^{2\Delta+2}10^{\Delta-1}10^{2\Delta+1})$$

(Encore une fois, nous utilisons la notation 0^x pour représenter une suite de x symboles zéro consécutifs)

Ce code possède les équations de vérification de parité suivantes "orthogonales" sur les symboles d'information à l'instant $t-5\Delta-3$ et $t-3\Delta-2$:

$$s_t^* = e_{t-5\Delta-3}^1 + e_{t-4\Delta-2}^1 + e_{t-3\Delta-2}^2 + e_{t-2\Delta-2}^2 + \epsilon_t$$
$$s_{t-\Delta-1}^* = e_{t-5\Delta-3}^1 + e_{t-4\Delta-3}^2 + e_{t-3\Delta-3}^2 + \epsilon_{t-\Delta-1}$$

$$s_t^* = e_{t-3\Delta-2}^2 + e_{t-2\Delta-2}^2 + \epsilon_t$$
$$s_{t-\Delta}^* = e_{t-3\Delta-2}^2 + \epsilon_{t-\Delta}$$

Note:

Les équations ci-dessus tiennent compte de la réinjection des décisions passées en supposant ces décisions correctes. Il importe de noter que la correction sur le symbole d'information No.1 doit être réalisée la première.

Le schéma complet du décodeur à décision majoritaire correspondant est représenté sur la Figure 4.7.

Il est aisé de vérifier que toute salve d'erreur de longueur au plus $L=3\Delta$ traverse le décodeur sans créer d'erreur décodée à la condition que cette salve soit précédée et suivie d'une garde sans erreur de longueur au moins $G=[5\Delta+3]3+2$:

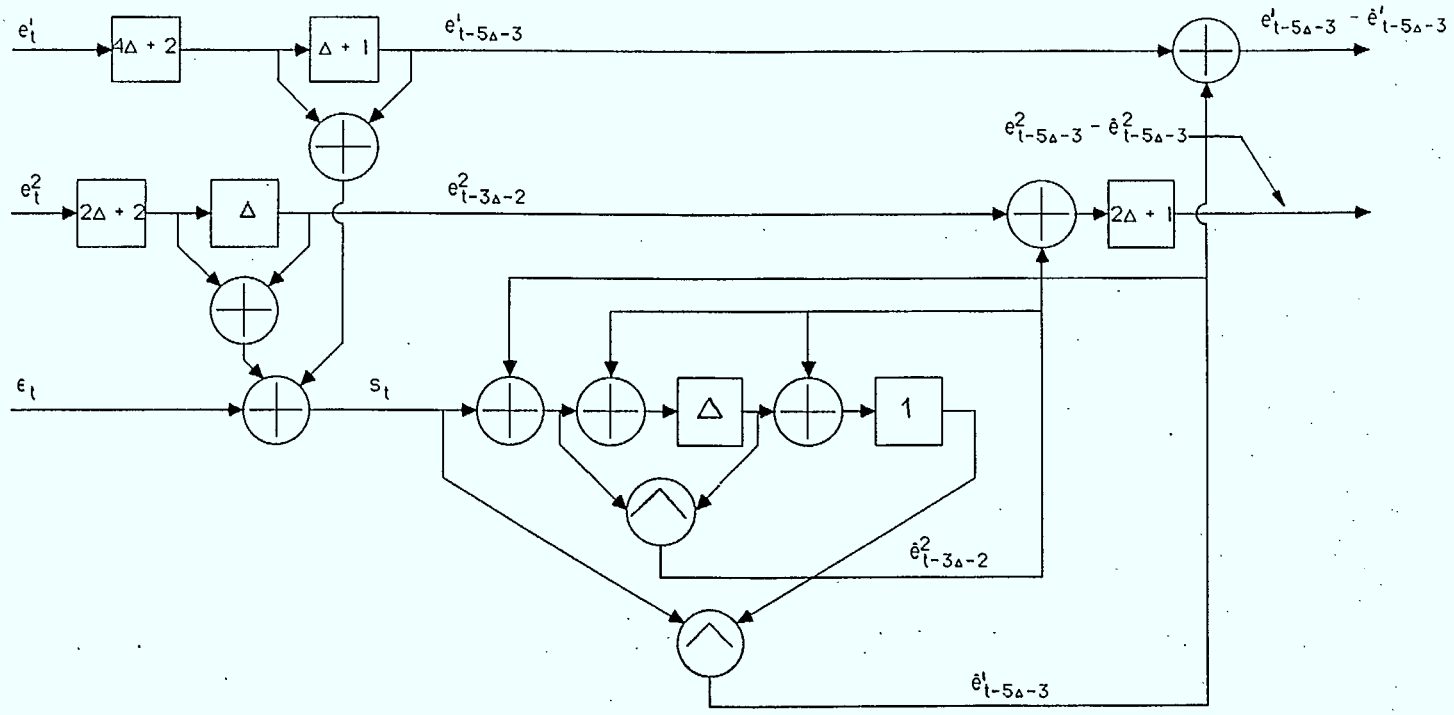


Figure 4.7 Décodeur à décision majoritaire pour le code à protection Δ- diffus de Iwadare - Massey de taux R = 2/3.

Le pouvoir de correction des salves d'erreur dans ce cas satisfait pour Δ suffisamment grand:

$$\frac{G}{L} \approx 5 = \frac{1+R}{1-R}$$

ce qui est l'optimum. Les codes ci-dessus se généralisent d'ailleurs très facilement pour toute valeur de taux de codage de la forme $R = \frac{k}{(k+1)}$ [8].

4.3.5 Performance des codes précédents sur les données expérimentales

Un logiciel de simulation des deux décodeurs à seuil discutés ci-dessus a été implanté sur un système VAX. Ce programme a été utilisé pour décoder les données fournies par le CRC et correspondant aux paramètres suivants:

Series 03, 04 et 05, $f_D = 10\text{Hz}$ et $f_D = 100\text{Hz}$

Les résultats exprimant le taux d'erreur moyen en fonction du rapport signal à bruits sont rassemblés sur les 6 figures qui suivent.

Chaque figure comporte trois courbes référencées comme il suit:

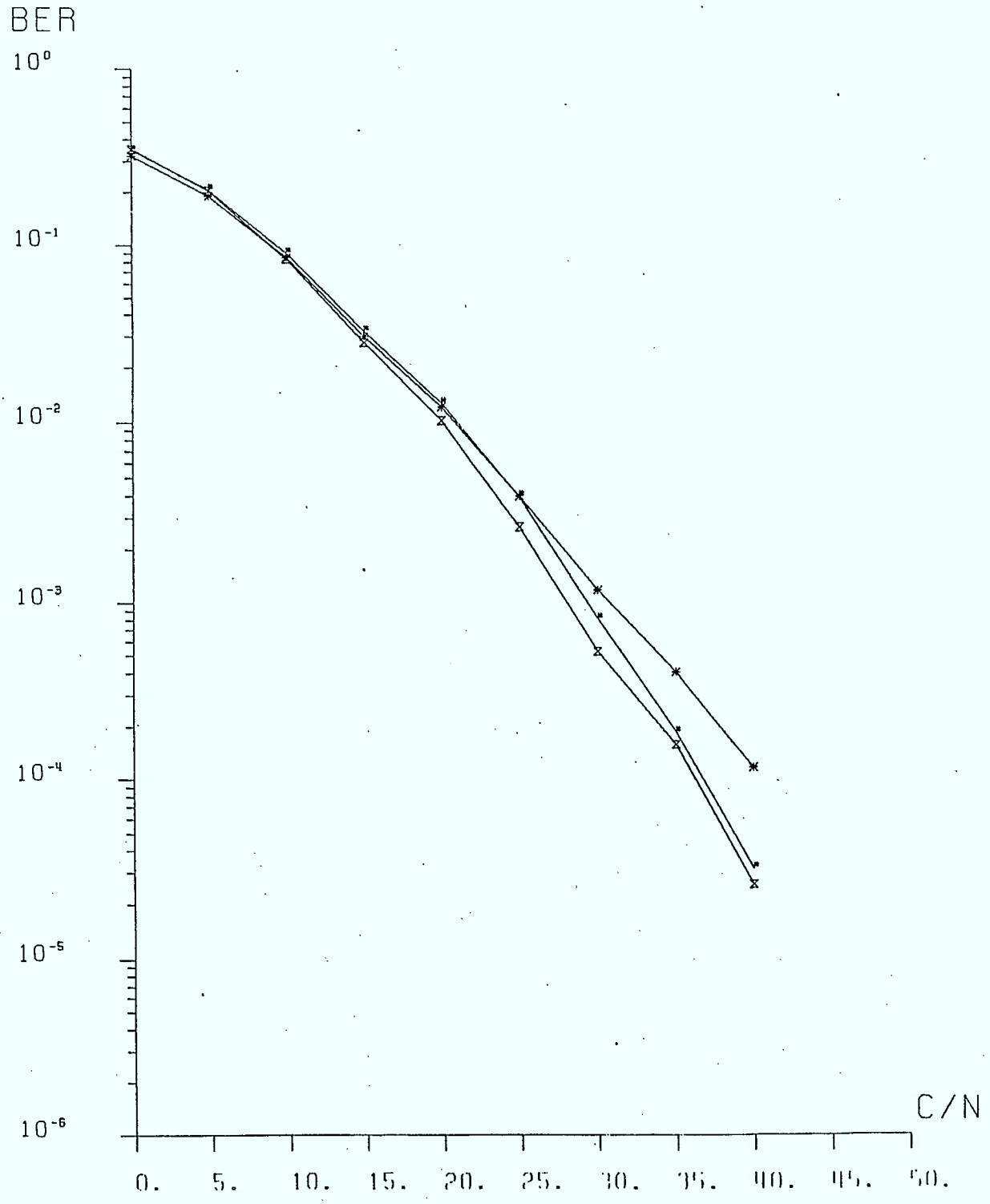
* données non codées.

\# données codées (taux $\frac{2}{3}$)

z données codées (taux $\frac{1}{2}$)

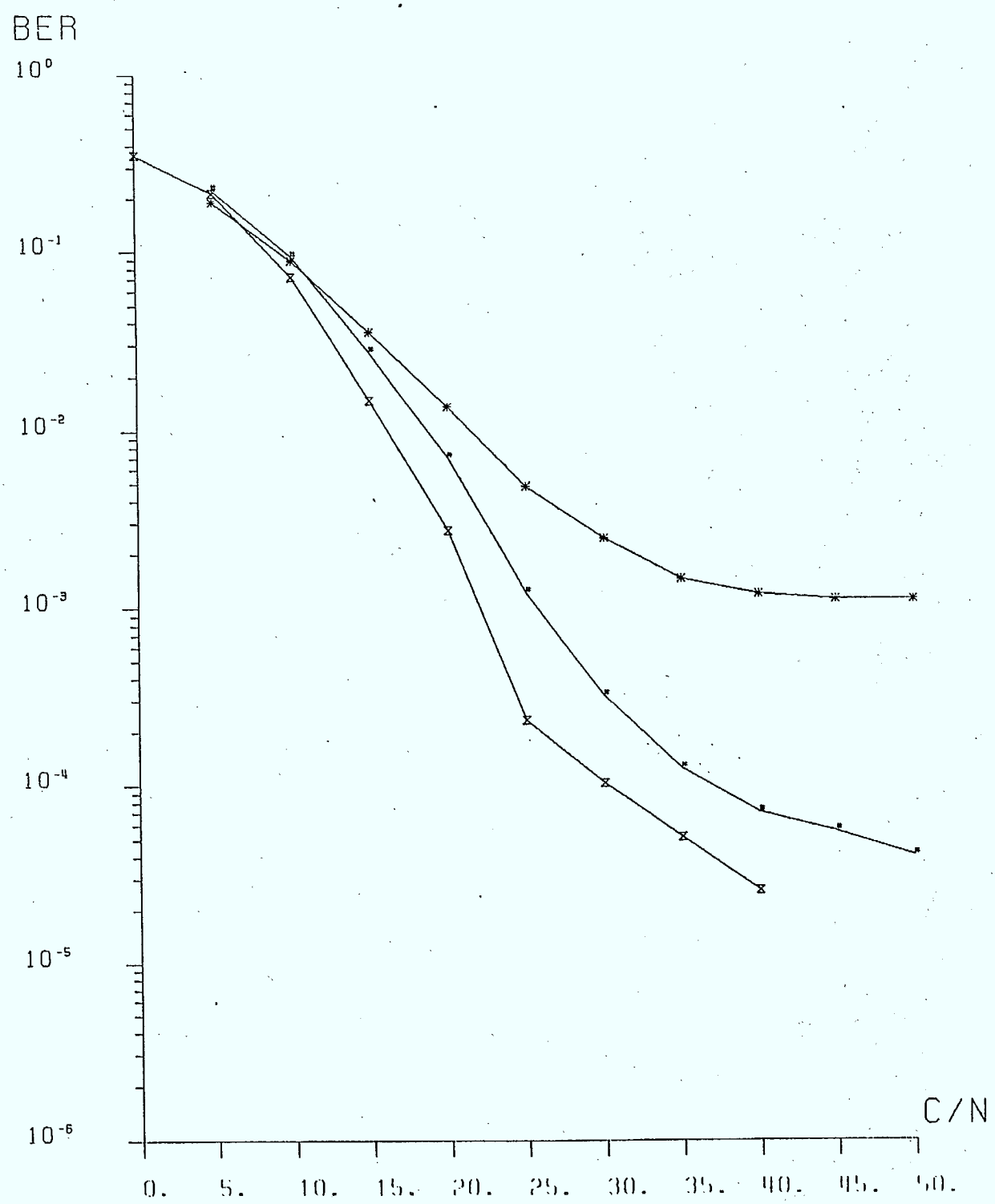
SERIE 03

FREQUENCE DØPPLER = 10 HZ



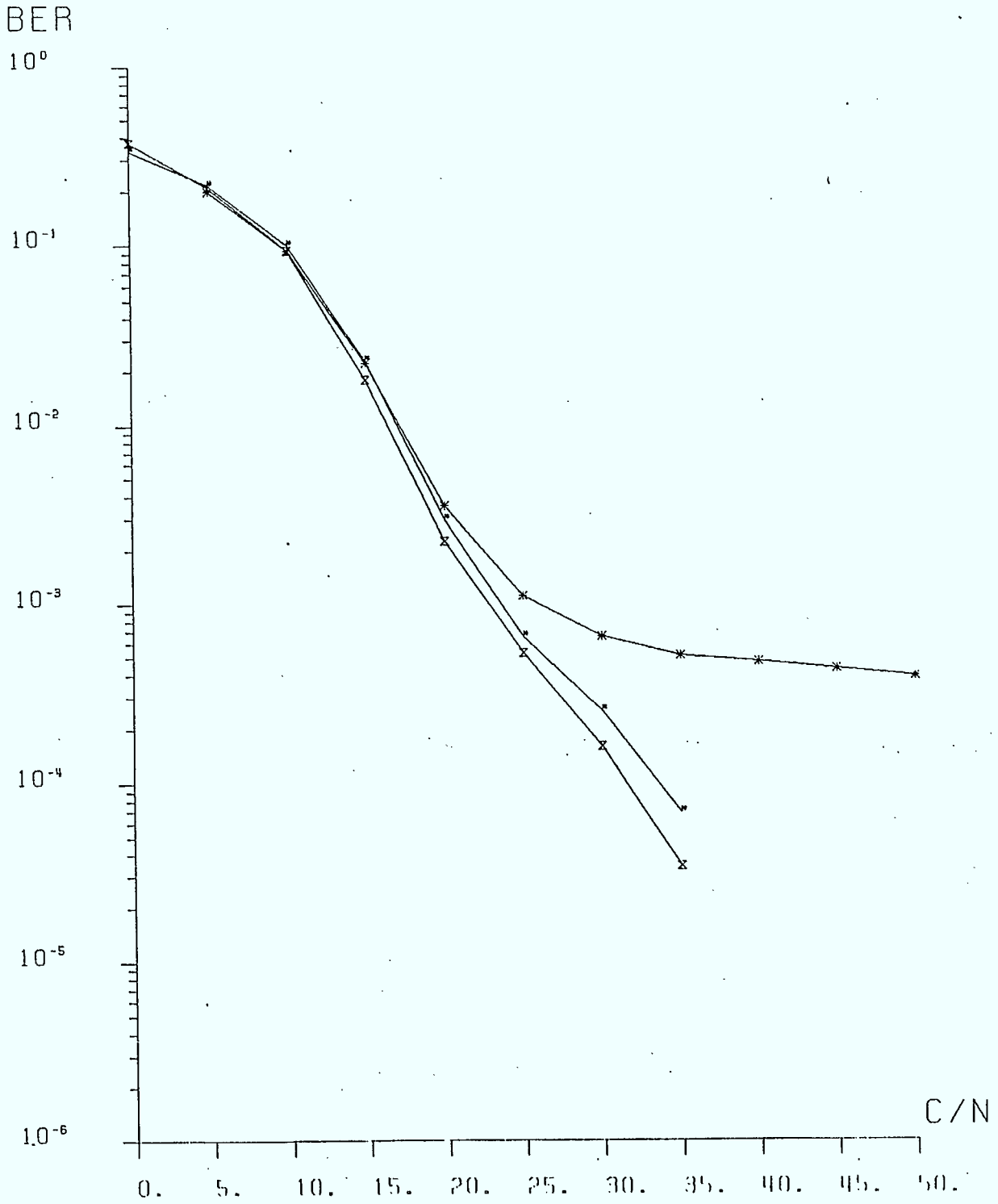
SERIE 03

FREQUENCE DØPPLER = 100 HZ

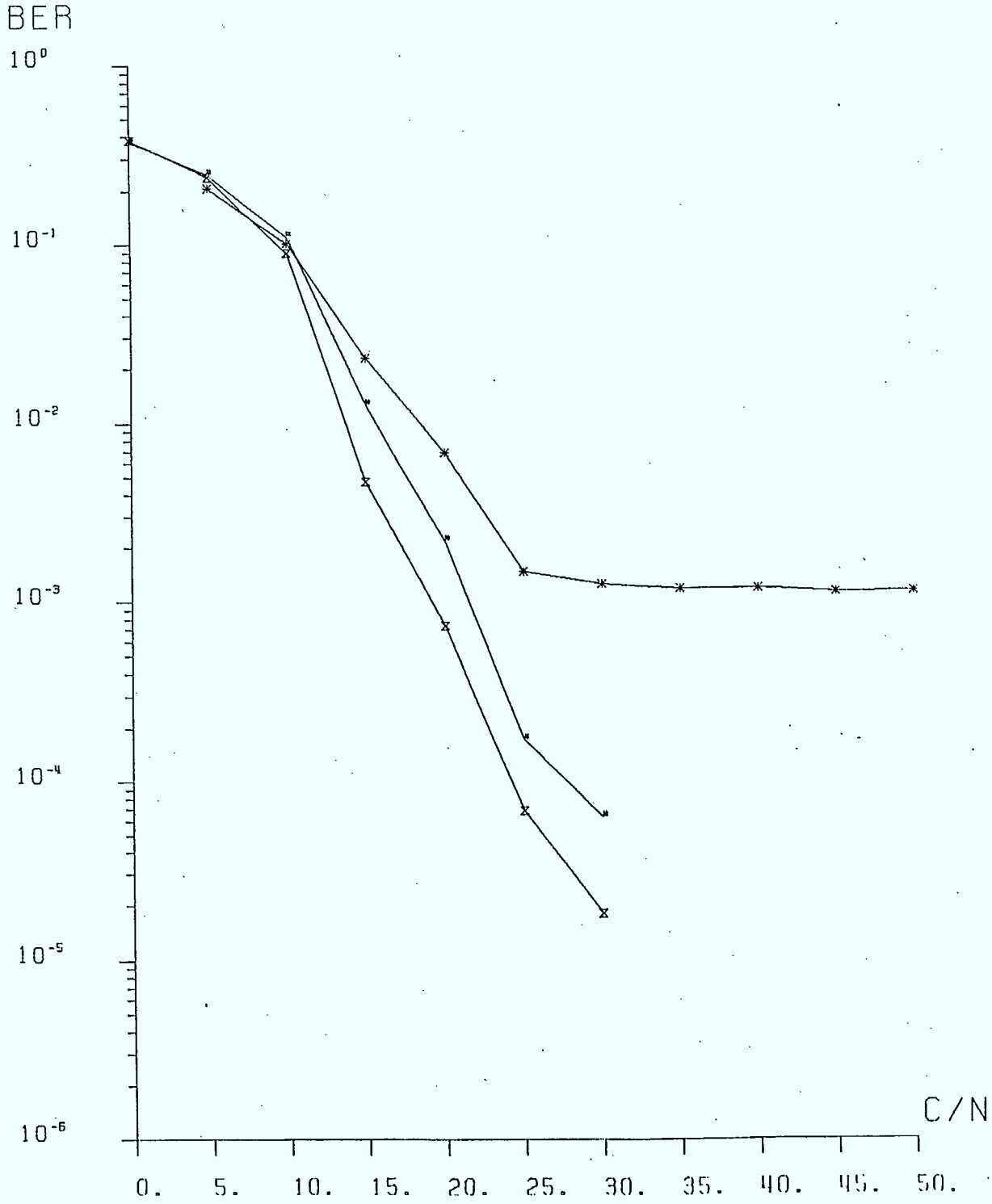


SERIE 04

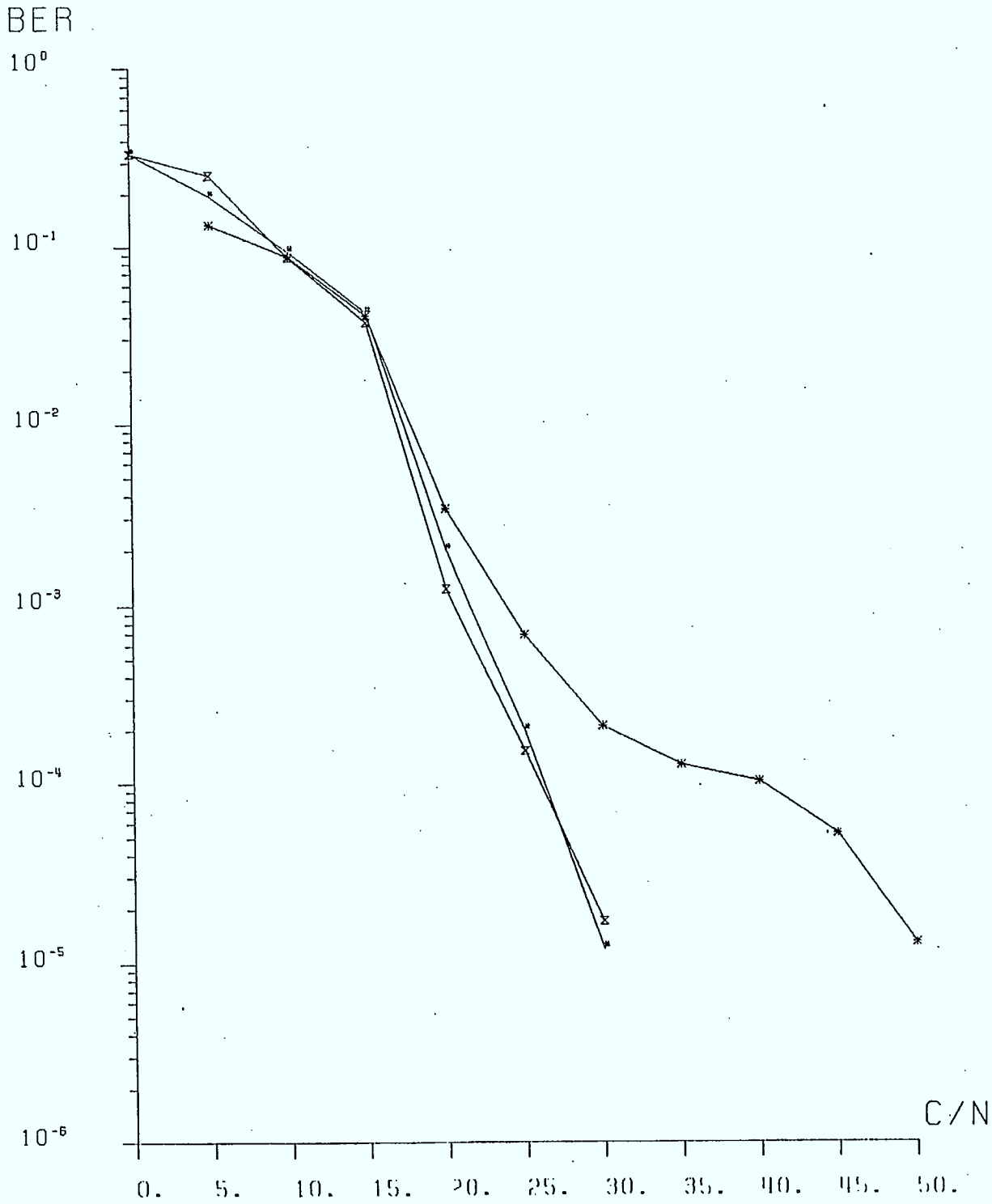
FREQUENCE DØPPLER = 10 HZ



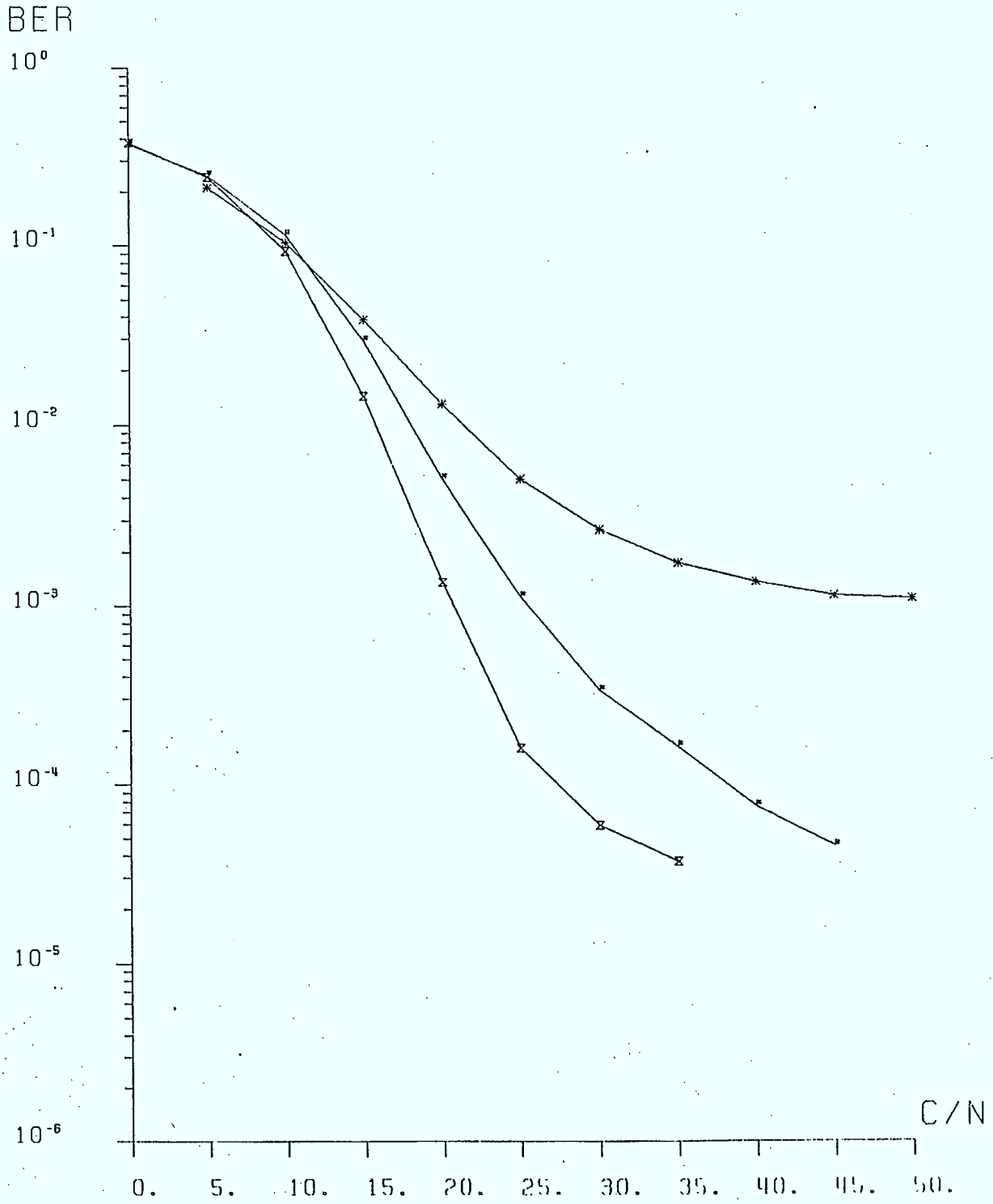
SERIE 04
FREQUENCE DØPPLER = 100 HZ



SERIE 05
FREQUENCE = 10 HZ



SERIE 05
FREQUENCE DØPPLER = 100 HZ



Note:

Etant donnée la faible dimension (mesurée par le nombre de symboles enregistrés) des échantillons testés, la signification statistique des résultats obtenus pour des taux d'erreur $\leq$ à 10^{-4} ne peut être garantie. On se réfèrera à l'appendice D où un calcul de la dimension d'échantillons nécessaire pour un BER donné est effectué.

REFERENCES

[1] P. Elias, "Coding for Noisy Channels", IRE Convention Record, Part IV, pp 37-44, 1955.

[2] T.N. Morrissey, Jr., "Analysis of Decoders for Convolutional Codes by Stochastic Sequential Machines Methods", IEEE Trans. Information Theory, Vol. IT-16, No.4, July 1970, pp. 460-469.

[3] J.L. Massey, Threshold Decoding, MIT Press, 1964.

[4] J.P Robinson, A.J Bernstein, "A class of Binary Recurrent Codes with Limited Error Propogation", IEEE Trans. Information Theory, Vol. IT-13, pp. 106-113, Jan. 1967.

[5] W.W. Wu, "New Convolutional Codes - Part I,II,III", IEEE Trans. Communications, Vol. COM-24, 1976.

[6] A. Kolhenberg, G.D. Forney, Jr., "Convolutional Coding for Channels with Memory", IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. IT-14, Sept. 1968, pp. 618-626.

[7] G.D Forney, Jr., "Burst Correcting Codes for the Classic Bursty Channel", IEEE Trans. Communication Tech., Vol. COM-19, Oct. 1971, pp. 772-781.

[8] Y. Iwadare, "On Type B1 Burst-Error-Correcting Convolutional Codes", IEEE Trans. Information Theory, Vol. IT-14, July. 1968, pp. 577-583.

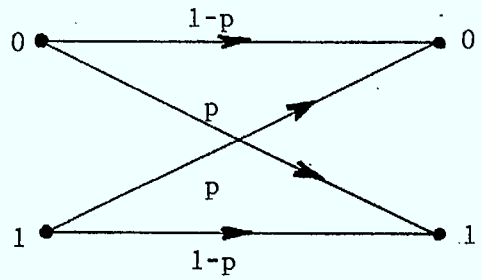
[9] M. J. Ferguson, "Diffuse Threshold Decodable Rate $\frac{1}{2}$ Convolutional Codes", IEEE Trans. Info. Theory, Vol. IT-17, March 1971, pp. 171-180

APPENDICE D

Taille minimum d'échantillon pour un BER donné

Formulation du problème:

On désire caractériser un canal binaire symétrique (canal réel ou canal de codage) en simulant la transmission d'une suite de 0. A la destination, on compte le nombre de 1 reçus, et le rapport du nombre de 1 au total de bits envoyés représente le BER du canal, l'équivalent de la probabilité de transition p .



Equivalent mathématique

On désire estimer la proportion P de nombres d'un ensemble à N éléments qui possèdent une propriété A . Pour ce faire, on prend un échantillon de taille n , et on estime P par p , qui est la proportion parmi les n choisis qui

possèdent la propriété A .

Référence:

Applied Statistical Techniques by Stoodley, K.D.C., Lewis, T. and Stanton, C.L.S., John Wiley & Sons, 1980

Analyse:

Soient:

N	la taille de la population;
P	la proportion ayant la propriété A ;
Q	$1-P$;
n	la taille de l'échantillon;
p	la proportion obtenue sur l'échantillon;
Δp	l'écart admissible;
α	$100(1-\alpha)$ = pourcentage de confiance;
f	$\frac{n}{N}$;
$N(\mu;\sigma^2)$	distribution normale de moyenne μ et écart quadratique σ;
$Z_{1-\alpha}$	valeur réelle satisfaisant $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})dt = \alpha$.

Les hypothèses requises sont les suivantes:

(1) $n \leq 0.1N$

(2) $nP \geq k$

(3) $nQ \geq k$

Une estimation usuelle de k est 30.

Sous ces hypothèses, on peut montrer que:

$$p \approx N(P; \frac{pq}{n-1}(1-f)) \tag{D.1}$$

où $q = 1-p$

On en déduit un intervalle de confiance à $100(1-\alpha)$ pourcent de P:

$$p \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n-1}(1-f)} \tag{D.2}$$

Dans notre cas, le problème se pose de la façon suivante: étant donné l'intervalle de confiance que l'on veut accepter à $100(1-\alpha)$ pourcent, quelle est la valeur minimale de n?

A partir de la relation (D.2), on a:

$$\Delta p = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n-1}(1-f)} \tag{D.3}$$

En faisant l'hypothèse que la taille de l'échantillon n est telle que l'on puisse faire l'approximation d'une normale,

$$z = \frac{p-P}{\sqrt{\frac{PQ}{n-1}(1-f)}} \approx N(0;1) \tag{D.4}$$

Cette hypothèse devra être vérifiée après calculs. On obtient donc:

$$n_{\min} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \left(\frac{\Delta p}{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 \times \frac{1}{PQ}} \qquad \text{(D.5)}$$

Si on a une population infinie, $N \to \infty$, et

$$n_{\min} = \frac{P(1-P)Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{(\Delta p)^2} \qquad \text{(D.6)}$$

Soit a le pourcentage d'erreur admissible sur P, c'est-à-dire,

$$a = \frac{\Delta p}{P}$$

(D.6) peut se ré-écrire

$$n_{\min} = \frac{P(1-P)Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{a^2 P^2}$$

soit

$$n_{\min} = \frac{(1-P)Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{a^2 P} \qquad \text{(D.7)}$$

Dans le cas où $P \ll 1$ ($p \leq 10^{-2}$)

$$\underset{p \ll 1}{n_{\min}} \approx \frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{a^2 P} \qquad \text{(D.8)}$$

Application numérique

$a = 10\%$

$\alpha = 10\% \rightarrow 90\%$ de confiance

$Z_{0.95} = 1.65$

$$n_{\min} = \frac{270}{BER}$$

BER	n minimum
10^{-1}	2700
10^{-2}	$27\ 10^3$
10^{-3}	$27\ 10^4$
10^{-4}	$2.7\ 10^6$
10^{-5}	$27\ 10^6$
10^{-6}	$27\ 10^7$

Application au travail CRC

La taille des fichiers fournis varie de 65 000 à 2 000 000 bits. **On peut donc "faire confiance" aux taux d'erreurs jusqu'à 10^{-4} seulement.**

CHAPITRE 5

CONCLUSIONS ET SUGGESTIONS FUTURES

Dans ce chapitre, nous résumons le travail présenté dans ce rapport et suggérons des extensions futures susceptibles d'apporter des améliorations simultanément dans la compréhension et la solution du problème.

5.1 Sommaire et conclusions

Le chapitre 1 nous a servi essentiellement d'introduction aux données du problème et à la méthodologie de solution. Après une description sommaire des origines du problème, nous y avons présenté une description sommaire des résultats essentiels de cette étude.

Les résultats de l'étude statistique des enregistrements des séquences d'erreurs sont présentés au chapitre 2. Il y est clairement démontré que les canaux binaires correspondant présentent des caractéristiques d'erreurs très corrélées (erreurs par salves).

Ces caractéristiques sont alors confirmées au chapitre 3 où nous présentons une méthode d'analyse et de synthèse applicable à la modélisation de ce type de canaux par des modèles markoviens qui généralisent celui plus classique de Gilbert. Finalement les résultats relatifs à l'essai de codes convolutionnels à

décodage majoritaire de taux $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ (codes de Kohlenberg-Forney et Iwadare-Massey) font l'object de l'exposition du chapitre 4. Il apparaît que ces types de codes, d'implantation simple, constituent une alternative intéressante dans l'arsenal du concepteur de systèmes numériques fiables opérant sur des canaux de radio mobile. Cependant, du fait de la non-validité des résultats de simulation obtenus sur les échantillons expérimentaux de longueur relativement faible, il apparaît difficile de tirer des conclusions positives à partir des résultats obtenus dans le cadre de la présente étude. En particulier, du fait de la possibilité de générer par ordinateur des séquences d'erreurs significatives du comportement de ce type de canaux de transmission, il nous semble souhaitable à ce point de l'étude de suggérer une continuation des travaux relatifs à la modélisation.

5.2 Suggestions futures

Compte tenu des conclusions tirées au paragraphe précédent, il nous apparaît souhaitable de suggérer d'approfondir les points suivants:

1) Obtenir des échantillons de données expérimentales plus longs et permettant, de cette façon, de concrétiser la valeur statistique des modèles markoviens développés au chapitre 3.

2) Compte tenu des modèles mathématiques markoviens facilement implantables sur ordinateur, obtenir des statistiques plus significatives de la perfor-

mance des codes à correction d'erreurs en général sur ce type de canaux, sans passer par le biais d'enregistrements expérimentaux coûteux et de manipulation souvent difficile. Il apparaît que différentes alternatives non considérées à date et basées sur l'utilisation de technique de détection d'erreurs avec répétition où de corrections par concaténation de codes pourraient être évaluées par cette méthode alors qu'une simulation par voies de données expérimentales de tels systèmes serait trop coûteuse.

Ce rapport présente l'opinion des auteurs. La diffusion de ce rapport ne constitue pas une ratification par le Ministère des Communications des résultats et conclusions qu'il contient. Copies du rapport peuvent être obtenues en dehors du Ministère seulement par arrangement spéciaux