

RAPPORT FINAL

MODÉLISATION DE TRAFIC ET ALLOCATION
DE CANAUX RADIO-MOBILES TERRESTRES

préparé pour:

MINISTÈRE DES COMMUNICATIONS
Immeuble Journal Nord
300, rue Slater
Ottawa (Ontario) K1A 0C8

Mars 1984

Projet CDT P819



CDT

Centre de
Développement
Technologique

P
91
C655
C63
1984



ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
DE MONTRÉAL

RAPPORT FINAL

MODÉLISATION DE TRAFIC ET ALLOCATION
DE CANAUX RADIO-MOBILES TERRESTRES

préparé pour:

MINISTÈRE DES COMMUNICATIONS:
Immeuble Journal Nord
300, rue Slater
Ottawa (Ontario) K1A 0C8

Mars 1984

Projet CDT P819

Industry Canada
Library Queen

JUL 20 1988

Industrie Canada
Bibliothèque Queen

~~COMMUNICATIONS CANADA
JUN 26 1984
LIBRARY - BIBLIOTHEQUE~~

RAPPORT FINAL

②
MODÉLISATION DE TRAFIC ET ALLOCATION
DE CANAUX RADIO-MOBILES TERRESTRES ②

préparé pour:

MINISTÈRE DES COMMUNICATIONS ②
Immeuble Journal Nord
300, rue Slater
Ottawa (Ontario) K1A 0C8

rapport final /

par:

①
/ Paul J. Cohen, ing.
Hai Hoc Hoang, ing.
Département de génie électrique
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

soumis par:

LE CENTRE DE DÉVELOPPEMENT TECHNOLOGIQUE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
Campus de l'Université de Montréal
Case postale 6079, Succursale A
Montréal (Québec) H3C 3A7

Mars 1984

Paul J. Cohen *Hai H. Hoang*
Paul J. Cohen et Hai H. Hoang
Co-responsables du projet

TABLE DES MATIÈRES

	<u>Page</u>
1. <u>INTRODUCTION</u>	1
1.1 Historique du projet	2
1.2 Contenu du rapport	3
2. <u>ANALYSE DE DONNÉES</u>	4
2.1 Méthodes d'analyse	4
2.1.1 Test de Chi carré (χ^2)	5
2.1.2 Test de Kolmogorov-Smirnov	6
2.1.3 Bande de confiance	7
2.1.4 Progiciel IMSL	9
2.2 Analyses et Résultats	9
2.2.1 Généralités	9
2.2.2 Lois de probabilité utilisées	10
2.2.3 Méthodologie d'analyse	14
2.2.4 Résultats et interprétations	17
3. <u>MODÈLE DE PARTAGE DE CANAL</u>	33
3.1 Identification de processus d'arrivée	33
3.2 Méthode d'approximation	38
3.3 Stratégies de partage et résultats	43
3.4 Simulations et résultats	46
4. <u>CONCLUSION</u>	53
5. <u>APPENDICES</u>	54
5.1 Superposition de processus stochastiques	54
5.2 Programme de simulation GPSS	64
6. <u>RÉFÉRENCES</u>	73

1. INTRODUCTION

Ce document constitue le rapport final d'une étude exécutée par le Centre de Développement Technologique de l'École Polytechnique de Montréal, pour le Ministère des Communications, sous l'égide du contrat portant le no 12ST.36100-3-0015. Cette étude se rattache à l'établissement d'un centre d'activités dans le domaine des communications mobiles terrestres. En plus de former des spécialistes francophones dans ce domaine, cette étude a aussi pour but d'aider à solutionner les problèmes de congestion des voies de communications mobiles terrestres, et à aider à élaborer de nouvelles méthodes d'attribution de fréquences et des nouvelles stratégies d'utilisation de ces voies.

Les objectifs assignés à ce Centre sont de natures pédagogique et technique, à savoir:

1. La réunion d'une équipe formée de professeurs et d'étudiants oeuvrant dans le domaine des communications mobiles terrestres. Un aspect important consiste à initier des étudiants de 1^{er} et 2^e cycles à des techniques de pointe dans ce domaine.
2. La définition et la mise en oeuvre de méthodes pour:
 - (a) développer des techniques de cueillette des données sur l'utilisation du spectre mobile;
 - (b) analyser ces données et classer les utilisateurs du spectre alloué aux communications mobiles terrestres;
 - (c) développer un modèle de trafic pour les communications mobiles;
 - (d) analyser l'impact sur l'attribution des canaux pour les communications mobiles;

- (e) faire éventuellement des recommandations pour une politique future d'allocation des canaux du spectre radio-mobile terrestre.

1.1 Historique du projet

Dans ses phases d'exécution précédentes (entre 1978 et 1981), ce projet a permis de recueillir et d'analyser une quantité importante de données de trafic concernant les systèmes radio-téléphoniques mobiles ainsi que les systèmes mobiles terrestres à répartiteur. Les résultats obtenus ont fait l'objet de rapports antérieurs déposés auprès du Ministère des Communications du Canada.

Tels que mentionnés dans la proposition de recherches, les objectifs de la présente phase du projet consistaient à

1. catégoriser le comportement des usagers en ce qui concerne:
 - (a) leurs caractéristiques de trafic (longueur de message, pourcentage d'occupation, etc...),
 - (b) leurs exigences en terme de qualité de services,
 - (c) la nature prioritaire de leurs besoins;

2. établir des stratégies de regroupement d'usagers distincts sur un même canal et examiner les conséquences de tel regroupement sur la qualité de service et l'efficacité d'utilisation du canal. Il s'agissait donc
 - (a) de modéliser le comportement de trafic des usagers,
 - (b) de simuler des stratégies de partage,
 - (c) d'évaluer ces stratégies.

1.2 Contenu du rapport

Essentiellement, ce rapport comporte deux sections majeures: la section 2 concerne la modélisation du comportement de trafic des usagers et la section 3 porte sur le modèle de partage de canal. L'objectif de la section 2 est de déterminer les lois de probabilité régissant les distributions de la longueur de message et de la période inoccupée de canal mono-usager. Ce sont les paramètres fondamentaux servant à l'élaboration du modèle de partage de canal. Dans la section 3 les problèmes inhérents à l'élaboration du modèle de partage de canal sont abordés. Le modèle utilisé est celui d'une file d'attente $GI|G|1$. Tout d'abord, il faut chercher à estimer le processus d'arrivée des messages qui n'est pas directement observable à l'aide des ensembles de données disponibles. Ensuite, il faut calculer le processus d'arrivée global qui résulte du regroupement de deux ou plusieurs usagers distincts sur un même canal. Enfin, le modèle $GI|G|1$ est très difficile à résoudre; il faut donc choisir une méthode d'approximation simple à utiliser. La méthode d'approximation choisie est extrêmement simple et basée sur les deux premiers moments des distributions du temps inter-arrivée et de la longueur de message. Les stratégies de partage de canal sont élaborées, compte tenant du comportement des usagers, et évaluée à l'aide du modèle. La simulation est également utilisée pour corroborer des résultats obtenus avec la méthode d'approximation.

2. ANALYSE DE DONNÉES

Pour appliquer la théorie des files d'attente au problème de partage d'un canal de communications radio-mobiles par deux ou plusieurs usagers, il est nécessaire de déterminer les lois de distribution de probabilité de l'intervalle inter-arrivée (séparant les débuts de deux messages consécutifs) et de la longueur de message. Les longueurs des messages sont directement observées tandis que les intervalles inter-arrivées doivent être estimés à partir des silences inter-messages. Le but de cette section est d'identifier les lois de distribution de probabilité du silence inter-message et de la longueur de message pour chaque usager.

2.1 Méthodes d'analyse

Les techniques statistiques, permettant de vérifier si les observations mesurées d'une certaine durée suivent une distribution de probabilité théorique spécifiée, sont maintenant examinées. Toutes ces techniques sont basées sur la théorie statistique des tests d'hypothèse dont les éléments de base se présentent comme suit.

Soit Y une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition $F(y) = \text{Prob}[Y < y]$ et la fonction de densité $f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$ sont inconnues. Un échantillon de taille N , i.e. un ensemble de N observations $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$, est pris au hasard. On veut à partir de ces observations déterminer si la variable Y est distribuée selon la loi de probabilité dont la fonction de répartition est $F^*(y)$. Par exemple $F^*(y) = 1 - e^{-\lambda y}$, $y > 0$ pour la loi exponentielle de paramètre λ . Ceci revient à dire qu'on veut faire un test d'hypothèse avec

- l'hypothèse nulle $H_0 : F(y) = F^*(y)$, tout y
- l'hypothèse alternative $H_1 : F(y) \neq F^*(y)$, au moins un y .



Comme dans tous les tests d'hypothèse une statistique T est calculée à partir des observations y_1, y_2, \dots, y_N . On obtient alors une valeur observée d'une variable aléatoire dont la distribution de probabilité doit être déterminée à partir de $F^*(y)$. Une fois connue, la fonction de répartition $G(t)$ de cette statistique T permet de déterminer une région critique de la forme $R_C = \{t > t_c\}$ ou $R_C = \{t < t'_c \text{ ou } t < t''_c\}$ telle que $G(t_c) = (1-\alpha)$ ou $G(t''_c) - G(t'_c) = (1-\alpha)$. Le paramètre $(1-\alpha)$ est le seuil de confiance du test (souvent on prend $(1-\alpha) = .95$ ou $.99$), tandis que α représente le risque de rejeter H_0 même si elle est vraie (erreur du type I). D'autre part le deuxième type de risque (erreur du type II) est représenté par la probabilité que T tombe en dehors de la région critique du test (i.e., H_0 ne peut pas être rejetée) quand l'hypothèse H_0 s'avère être fausse.

Dans le but d'identifier la loi de probabilité de la variable aléatoire Y à partir de l'échantillon $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ les tests de Chi carré (χ^2), de Kolmogorov, et la technique de bande de confiance s'avèrent particulièrement appropriés.

2.1.1 Test de Chi carré (χ^2)

Les N observations y_1, y_2, \dots, y_N sont regroupées en M classes distinctes C_1, C_2, \dots, C_M . Soient O_j le nombre d'observations dans la classe C_j pour tout $j = 1, 2, \dots, M$. La statistique T est calculée de la façon suivante:

$$p_j^* = \text{Prob}[Y \in C_j] = \int_{C_j} f^*(y) dy$$

$$E_j = p_j^* N$$

$$T = \sum_{j=1}^M \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} = \sum_{j=1}^M F_j = \sum_{j=1}^M \frac{O_j^2}{E_j} - N$$



Pour les échantillons de grande taille, la statistique T suit asymptotiquement la loi de χ^2_{M-1} avec $(M-1)$ degrés de liberté. Les tables et les approximations de la fonction de répartition de la loi χ^2_{M-1} permettent de déterminer la valeur critique $t_c(\alpha)$ correspondant au seuil de confiance $(1-\alpha)$, et l'hypothèse H_0 est rejetée si la valeur calculée de T dépasse $t_c(\alpha)$.

Normalement, les classes et la taille de l'échantillon doivent être choisies de manière à avoir $E_j \geq 5$, $j = 1, 2, \dots, M$. En outre, si k paramètres inconnus de $F^*(y)$ ont été estimés à partir des observations, alors cette estimation réduit de k degrés de liberté la loi de χ^2 utilisée comme approximation de la fonction de répartition de T .

2.1.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

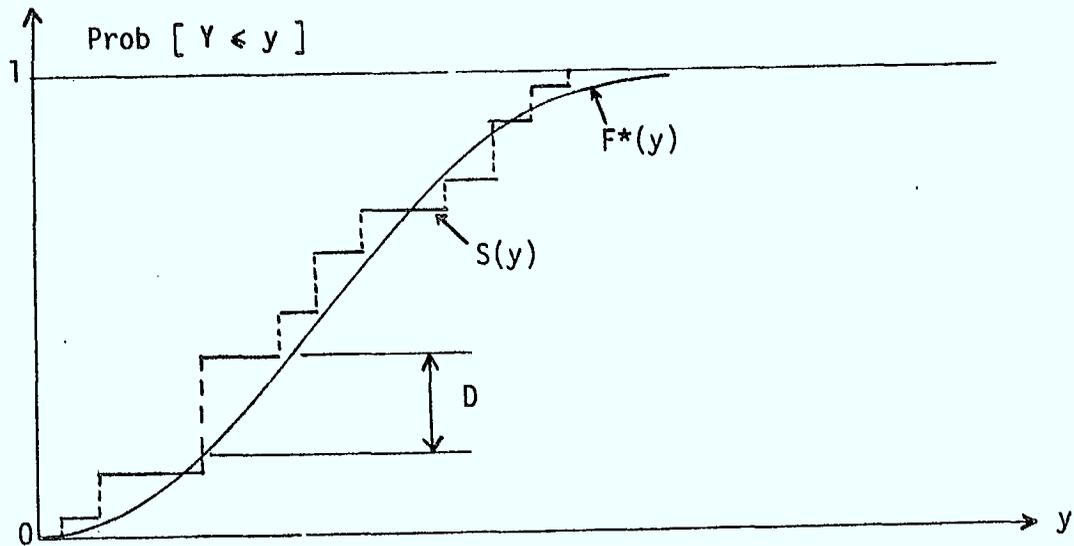
Soit $S(y)$ la fonction de répartition expérimentale (empirique) déterminée à partir des observations y_1, y_2, \dots, y_N de la façon suivante:

$$S(y) = \frac{\text{Nombre d'observations } y_i < y}{\text{Nombre total d'observations } (N)}$$

Le test de Kolmogorov-Smirnov est basé sur l'écart maximum mesuré verticalement entre la distribution empirique $S(y)$ et la distribution théorique $F^*(y)$ spécifiée dans l'hypothèse H_0 .

La statistique utilisée est déterminée par:

$$D = \sup_y \left| F^*(y) - S(y) \right|$$



Pour les échantillons de taille $N < 20$, il existe des tables donnant la valeur critique d_c correspondant au seuil de confiance de .80, .90, .95, ou .98 ou .99. Des formules d'approximation permettent d'obtenir la valeur critique approximative correspondant au même seuil de confiance, quand l'échantillon est de grande taille ($N > 80$).

En outre, quand il est nécessaire d'estimer des paramètres de $F^*(y)$ à partir des observations, les valeurs critiques réelles diffèrent des valeurs tabulées ou obtenues avec des formules d'approximation. Malheureusement, cette différence n'a pas pu en général être quantifiée.

2.1.3 Bande de confiance

C'est une généralisation du concept d'intervalle de confiance bien connu en estimation statistique du type paramétrique. La bande de confiance pour la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y est obtenue à partir de l'échantillon aléatoire y_1, y_2, \dots, y_N de la façon suivante:

- (a) construire la fonction de répartition empirique $S(y)$;

- (b) choisir un seuil de confiance $(1-\alpha)$ convenable; par exemple: .95 ou .99, et déterminer la quantile $w_{1-\alpha}$, correspondante au seuil de confiance $(1-\alpha)$, de la statistique D à partir des tables ou des formules d'approximation;
- (c) construire les fonctions donnant les limites de la bande de confiance:

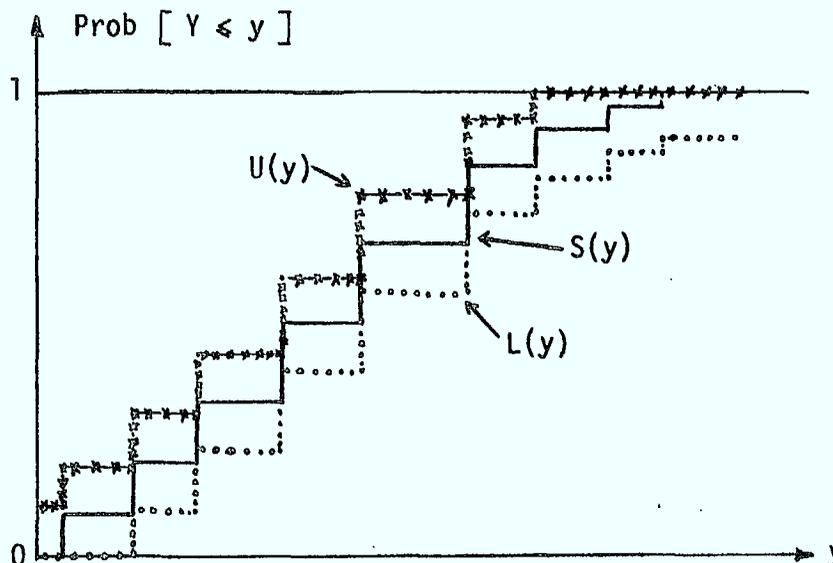
$$U(y) = \text{maximum} [S(y) + w_{1-\alpha}, 1.0]$$

$$L(y) = \text{maximum} [S(y) - w_{1-\alpha}, 0.0];$$

- (d) $U(y)$, $L(y)$ définissent la bande de confiance de $F(y)$ au seuil $(1-\alpha)$

$$\text{Prob}\{L(y) \leq F(y) \leq U(y), \text{ tout } y\} > (1-\alpha).$$

L'utilité de la bande de confiance est immédiate. Un échantillon aléatoire est prélevé, la fonction de répartition $S(y)$, ainsi que les fonctions limites $L(y)$ et $U(y)$ correspondantes au seuil de confiance $(1-\alpha)$ sont tracées. Si l'hypothèse H_0 est vraie, la fonction de répartition théorique $F^*(y)$ spécifiée dans H_0 doit se trouver à l'intérieur de la bande de confiance.



2.1.4 Le progiciel de l'International Mathematical Statistics Library

Les sous-routines du programme produit IMSL sont utilisées pour réaliser les tests de χ^2 et de Kolmogorov-Smirnov. Ce progiciel permet de calculer la valeur de la statistique χ^2 ou $Z = \sqrt{ND}$, et donne la probabilité Q que la statistique soit au moins égale à la valeur calculée à partir de l'échantillon. Ce qui revient à dire que l'hypothèse H_0 ne peut être rejetée qu'au seuil de confiance $(1-Q)$. Si la valeur de Q fournie par le progiciel était supérieure à 0.05 par exemple, l'hypothèse H_0 ne serait pas rejetée car il ne serait pas raisonnable de rejeter une hypothèse avec un seuil inférieure à 95% de confiance.

2.2 Analyses et Résultats

2.1.1 Généralités

Au moyen de certaines simplifications il est possible d'obtenir un modèle de file d'attente décrivant l'utilisation d'un canal pour le Service mobile terrestre. Le modèle le plus simple s'obtient en considérant les messages provenant de tous les usagers (stations fixes et mobiles) comme étant statistiquement identiques, en supposant que l'arrivée des messages constitue un processus de Poisson et que la longueur d'un message suit la loi exponentielle. Pour appliquer certains résultats concernant la file d'attente $M|M|1$, il faut supposer également que tout usager attend patiemment jusqu'à ce que le canal soit libre avant de commencer une conversation. Dans ces conditions, la durée d'une période d'inoccupation du canal suit la loi exponentielle avec un paramètre λ égal au taux d'arrivée des messages. Il est donc justifiable d'effectuer des tests d'hypothèse pour vérifier si la

Longueur d'un message ou d'une période d'inoccupation suit la loi exponentielle. De plus, pour fins de développement et de validation des modèles décrivant l'utilisation d'un canal, il est en général nécessaire d'identifier les caractéristiques statistiques, essentiellement la distribution de la longueur d'un message ou d'une période d'inoccupation. Dans le but d'appliquer les résultats analytiques de la théorie des files d'attente, il est d'intérêt indéniable de vérifier si la longueur d'un message ou d'une période d'inoccupation suit une des lois de probabilité classiques telles la loi d'Erlang, la loi hyperexponentielle, la loi de Cox. Un spécialiste en théorie des communications peut également suggérer la loi de Rayleigh, qui lui est particulièrement familière.

2.2.2 Lois de probabilité utilisées

Les lois de probabilité suivantes ont été utilisées pour effectuer les tests décrits à la section 2.1 afin d'identifier la loi décrivant la longueur d'une conversation ou d'un temps mort sur un canal déterminé.

(1) la loi exponentielle

- la fonction de densité $f(y) = \mu e^{-\mu y}$, $y > 0$
- la moyenne $\bar{y} = \frac{1}{\mu}$
- la variance $\sigma_y^2 = \frac{1}{\mu^2}$
- le coefficient de variation $C_y = \frac{\bar{y}}{\sigma_y} = 1$

(2) la loi d'Erlang-r d'ordre $r = 1, 2, 3, \dots$

- la fonction de densité $f(y) = \frac{r\mu(r\mu y)^{r-1} e^{-r\mu y}}{(r-1)!}$, $y > 0$
- la moyenne $\bar{y} = \frac{1}{\mu}$
- la variance $\sigma_y^2 = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\mu^2}\right)$
- le coefficient de variation $C_y = \frac{1}{\sqrt{r}}$

(3) la loi de Raileigh

- la fonction de densité $f(y) = \frac{y}{b} e^{-y^2/2b}$, $y > 0$
- la moyenne $\bar{y} = \sqrt{b\pi/2}$
- la variance $\sigma_y^2 = (2-\pi/2)b$
- le coefficient de variation $C_y = \sqrt{\pi/(4-\pi)}$

(4) la loi hyperexponentielle-R d'ordre $R = 2, 3, \dots$

- la fonction de densité $f(y) = \sum_{i=1}^R \alpha_i \mu_i e^{-\mu_i y}$, $y > 0$
où $\sum_{i=1}^R \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, R$
- la moyenne $\bar{y} = \sum_{i=1}^R \frac{\alpha_i}{\mu_i}$
- la variance $\sigma_y^2 = 2 \sum_{i=1}^R \frac{\alpha_i}{\mu_i^2} - \left(\sum_{i=1}^R \frac{\alpha_i}{\mu_i}\right)^2$
- le coefficient de variation $C_y = \left[\left(2 \sum_{i=1}^R \frac{\alpha_i}{\mu_i^2}\right) / \left(\sum_{i=1}^R \frac{\alpha_i}{\mu_i}\right)^2 - 1 \right]^{1/2}$

(5) la loi de Cox

La loi de Cox constitue en fait une famille de distributions qui se sont obtenues en généralisant les lois d'Erlang et hyperexponentielle. Sachant que la transformée de Laplace correspondant à la loi d'Erlang d'ordre r est:

$$F_{E_r}^*(s) = \left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^r$$

et que celle de la loi hyperexponentielle d'ordre R est:

$$F_{H_R}^*(s) = \sum_{i=1}^R \alpha_i \frac{\mu_i}{s + \mu_i}$$

la loi de Cox d'ordre k est définie par la transformée de Laplace de la forme suivante:

$$F_{C_k}^*(s) = \alpha_1 + \sum_{i=1}^k \beta_1 \beta_2 \dots \beta_i \alpha_{i+1} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{s + \mu_j}$$

où $\beta_i = 1 - \alpha_i$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, pour $i = 1, 2, \dots, k$,

et $\alpha_{k+1} = 1$.

Pour les raisons pratiques, seules les trois distributions de Cox particulières suivantes sont retenues:

(a) Distribution (C1)

o la fonction de densité

$$f(y) = a \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} [e^{-\mu_2 y} - e^{-\mu_1 y}] + (1-a)\mu_1 e^{-\mu_1 y}, y > 0, \mu_1 > \mu_2$$

- la moyenne $\bar{y} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2}$
- la variance $\sigma_y^2 = 2a\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2}\right)^2$
- le coefficient de variation $C_y = \frac{y}{\sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{2a}} > 1$

(b) Distribution (C2)

- la fonction de densité

$$f(y) = a \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} [e^{-\mu_1 y} - e^{-\mu_2 y}] + (1-a)\mu_1 e^{-\mu_1 y}, y > 0, \mu_1 < \mu_2$$
- la moyenne $\bar{y} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2}$
- la variance $\sigma_y^2 = \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2}\right)^2 / (1-a/2)$
- le coefficient de variation C_y est tel que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq C_y = \sqrt{1 - \frac{a}{2}} < 1$$

(c) Distribution (C3)

- la fonction de densité

$$f(y) = b e^{-\mu y} + (1-b) \frac{\mu^k y^{k-1} e^{-\mu y}}{(k-1)!}, y > 0$$

où

$$b = \frac{2k C_y^2 + (k-2) - \sqrt{k^2 + 4 - 4k C_y^2}}{2(k-1) (C_y^2 + 1)}$$

- la moyenne $\bar{y} = \frac{b + k(1-b)}{\mu}$
- la variance $\sigma_y^2 = C_y^2 \bar{y}^2$
- le coefficient de variation C_y est tel que

$$\sqrt{1/k} \leq C_y < \sqrt{1/(k-1)}$$

2.2.3 Méthodologie d'analyse

Il s'agit ici de décrire la démarche entreprise pour arriver aux résultats présentés dans la section 2.2.4. Une approche expérimentale guidée par des résultats de la théorie des files d'attente et par des considérations pratiques de modélisation a été adoptée. Premièrement, il faut probablement résister à la tentation d'appliquer le modèle $M|M|1$ au problème de partage d'un canal de communications radio-mobiles sans avoir vérifié au préalable que le trafic est Poissonnien et que la longueur de message est distribuée selon la loi exponentielle. Le modèle $M|M|1$ est souvent utilisé, à tort ou à raison, à cause de sa simplicité et du fait qu'il est présenté dans tous les manuels d'introduction à la théorie des files d'attente. Deuxièmement, dans les modèles un peu plus évolués de files d'attente, on trouve les lois de probabilité d'Erlang et hyperexponentielle. C'est pourquoi la première étape a consisté à appliquer les tests décrits à la section 2.1 aux données obtenues au cours de la phase précédente du projet et décrites dans le Rapport Final (Projet CDT P765) déposé auprès du Ministère des Communications du Canada le 31 mars 1983. Ces tests ont été effectués avec les lois exponentielle, hyperexponentielle, d'Erlang et de Rayleigh. Les résultats obtenus sont encourageants et semblent indiquer que la loi hyperexponentielle souvent représente mieux les données que la loi exponentielle (si on se base sur la valeur numérique de la probabilité Q mentionnée dans la section 2.1.4). Parfois, la loi d'Erlang intervient, tandis que la loi de Rayleigh est ici sans utilité. Cependant, il y a encore un bon nombre d'ensembles de données pour lesquelles il n'est pas possible de trouver une représentation adéquate au moyen des lois exponentielle, hyperexponentielle, d'Erlang et de Rayleigh. Par conséquent, les lois de Cox ont été également considérées à cause de nombreux résultats intéressants de la théorie des files

d'attente basés sur ce type de distribution à phases et récemment disponibles, voir Neuts [6] par exemple. De plus, un examen en profondeur des résultats de tests révèle un phénomène intéressant. Il semble très difficile de trouver une représentation adéquate de la distribution de la durée des périodes inoccupées, quand le pourcentage d'activité des messages est considérable (environ 50% et plus). Cela est dû probablement au très grand nombre de silences inter-messages très courts. Certains de ces très courts silences inter-messages sont de tout évidence dus au temps de réaction/réponse de l'opérateur d'une unité mobile. C'est pourquoi une procédure de correction a été mise en oeuvre. Elle consiste à rejeter au hasard de très courts silences inter-messages (≤ 2 secondes) dans une proportion égale au pourcentage d'activité des messages. Elle est justifiée par le fait que le pourcentage d'activité des messages représente la probabilité que le canal est occupé (où un très court intervalle, presque ponctuel, ne fait pas partie d'une période inoccupée du canal).

Troisièmement, il est nécessaire de déterminer les paramètres d'une loi choisie en fonction des données observées:

(1) la loi exponentielle (E):

l'unique paramètre μ est fixé égal à l'inverse de la moyenne observée.

(2) la loi d'Erlang:

seules les lois d'ordre de 2(E_r2) et 3(E_r3) sont utilisées pour lesquelles le paramètre μ est fixé égal à l'inverse de la moyenne échantillonnale.

(3) la loi de Rayleigh (R):

le paramètre b est calculé à partir de la moyenne échantillonnale \bar{y} par la formule:

$$b = 2\bar{y}^2/\pi$$

(4) la loi hyperexponentielle:

seule la loi hyperexponentielle d'ordre 2(H2) est utilisée. Il faut donc déterminer les 4 paramètres α_1 , α_2 , μ_1 et μ_2 . Pour cela on fait appel aux moments échantillonnaux non centrés d'ordre 1, 2 et 3; soient m_1 , m_2 et m_3 . Dans une représentation parfaite (a perfect fit) on aurait les égalités suivantes:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2} = m_1$$

$$2\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2}\right) = m_2$$

$$6\left(\frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3}\right) = m_3$$

Étant donné m_1 , m_2 et m_3 on cherche α_1 , α_2 , μ_1 et μ_2 comme une solution du système d'équations non linéaires ci-dessus, si une telle solution existe. Dans le cas contraire, on cherche α_1 , α_2 , μ_1 et μ_2 qui minimise la somme des carrés des écarts entre les deux membres de chacune de ces équations.



(5) la loi de Cox

Soit C_y^2 , \bar{y} les valeurs échantillonnales du coefficient de variation et de la moyenne.

Si $C_y^2 > 1$, alors utiliser (C1)

$$\text{avec } \mu_1 = \frac{2}{\bar{y}}, \mu_2 = \frac{1}{C_y^2 \bar{y}} \text{ et } a = \frac{1}{2C_y^2}$$

Si $\frac{1}{2} < C_y^2 < 1$, alors utiliser (C2)

$$\text{avec } \mu_1 = \frac{1}{C_y^2 \bar{y}}, \mu_2 = \frac{2}{\bar{y}} \text{ et } a = 2(1-C_y^2)$$

Si $\frac{1}{k} < C_y^2 < \frac{1}{(k-1)}$, alors utiliser (C3) d'ordre k

$$\text{avec } b = \frac{2k C_y^2 + (k-2) - \sqrt{k^2+4-4kC_y^2}}{2(k-1)(C_y^2+1)} \text{ et } \mu = \frac{b + k(1-b)}{\bar{y}}$$

2.2.4 Résultats et interprétations

Les résultats de l'application des tests décrits dans la section 2.1 aux données mentionnées dans la section 2.2.3, en utilisant les lois théoriques (E), (Er2), (Er3), (R), (H2), (C1), (C2) et (C3), sont présentés dans les tables 1 et 2. La table 1 concerne la longueur de message, tandis que la table 2 correspond à la durée de période inoccupée après la correction discutée dans la section 2.2.3. Chaque ligne de table correspond à un ensemble de données décrit dans le Rapport Final de mars 1983. L'échantillon P64, par exemple, désigne l'ensemble de données décrit à la page 64 du volume 2 de ce rapport de mars 1983. Pour chaque échantillon, on donne la meilleure et la deuxième représentation parmi les cinq lois considérées. Le critère de



classification est la valeur de la probabilité Q (décrite dans la section 2.1.4) relative au test de Kolmogorov-Smirnov (voir section 2.1.2). Selon cette classification on peut résumer les résultats comme suit:

- (a) Pour la meilleure représentation de la durée de période inoccupée, les lois (C1) et (H2) sont sur pied d'égalité et dominent complètement les autres lois considérées.
- (b) Pour la meilleure représentation de la longueur de message, les lois (C1) et (C2) sont sur pied d'égalité et dominent assez clairement les autres lois considérées.

TABLE 1: LONGUEURS DE MESSAGES

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P6	36	.191	.10	C1	$a = .38$ $\mu_1 = .12$ $\mu_2 = .04$.055	H	$\alpha_1 = .86$ $\alpha_2 = .14$ $\mu_1 = .07$ $\mu_2 = .03$
P8	47	.162	.043	H	$\alpha_1 = .42$ $\alpha_2 = .58$ $\mu_1 = .06$ $\mu_2 = .09$.042	E	$\mu = .079$
P10	30	.135	.37	E	$\mu = .066$.36	H	$\alpha_1 = .42$ $\alpha_2 = .50$ $\mu_1 = .07$ $\mu_2 = .064$
P12	79	.231	.32	H	$\alpha_1 = .88$ $\alpha_2 = .12$ $\mu_1 = .09$ $\mu_2 = .036$.31	C1	$a = .37$ $\mu_1 = .15$ $\mu_2 = .06$
P14	36	.208	.77	C2	$a = .40$ $\mu_1 = .06$ $\mu_2 = .10$.64	E	$\mu = .051$
P16	52	.387	.45	C1	$a = .39$ $\mu_1 = .09$ $\mu_2 = .04$.26	H	$\alpha_1 = .06$ $\alpha_2 = .94$ $\mu_1 = .019$ $\mu_2 = .049$
P18	21	.154	.21	C1	$a = .28$ $\mu_1 = .13$ $\mu_2 = .03$.15	H	$\alpha_1 = .69$ $\alpha_2 = .31$ $\mu_1 = .105$ $\mu_2 = .033$
P20	50	.228	.35	C2	$a = .32$ $\mu_1 = .07$ $\mu_2 = .11$.28	H	$\alpha_1 = .5$ $\alpha_2 = .5$ $\mu_1 = .059$ $\mu_2 = .053$
P22	56	.201	.60	C2	$a = .76$ $\mu_1 = .13$ $\mu_2 = .16$.50	ER2	
P24								
P26	21	.124	.33	C1	$a = .38$ $\mu_1 = .11$ $\mu_2 = .04$.25	H	$\alpha_1 = .2$ $\alpha_2 = .8$ $\mu_1 = .031$ $\mu_2 = .065$

19

TABLE 1 (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ 0	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ 0	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P28	32	.249	.96	C1	$\mu_1 = .08$ $a = .45$ $\mu_2 = .03$.95	H	$\alpha_1 = .93$ $\mu_1 = .043$ $\alpha_2 = .07$ $\mu_2 = .018$
P30	133	.228	.027	ER2	$\mu = .164$.02	C2	$a = .16$ $\mu_1 = .18$ $\mu_2 = .33$
P32	181	.333	.015	E	$\mu = .149$.014	H	$\alpha_1 = .2$ $\mu_1 = .149$ $\alpha_2 = .8$ $\mu_2 = .149$
P34	138	.384	.14	C2	$\mu_1 = .12$ $a = .34$ $\mu_2 = .19$.04	E	$\mu = .096$
P36	130	.524	.16	ER2	$\mu = .067$.09	H	$\alpha_1 = .49$ $\mu_1 = .066$ $\alpha_2 = .51$ $\mu_2 = .058$
P38	43	.286	.39	C1	$\mu_1 = .09$ $a = .40$ $\mu_2 = .03$.27	H	$\alpha_1 = .02$ $\mu_1 = .014$ $\alpha_2 = .08$ $\mu_2 = .045$
P40	66	.384	.39	C1	$\mu_1 = .10$ $a = .38$ $\mu_2 = .04$.19	H	$\alpha_1 = .06$ $\mu_1 = .021$ $\alpha_2 = .94$ $\mu_2 = .057$
P42	102	.409	.76	C2	$\mu_1 = .08$ $a = .32$ $\mu_2 = .14$.41	E	$\mu = .068$
P44	121	.591	.035	C2	$\mu_1 = .09$ $a = .76$ $\mu_2 = .11$.018	E	$\mu = .057$
P46	41	.267	.66	C1	$\mu_1 = .08$ $a = .49$ $\mu_2 = .04$.62	E	$\mu = .041$
P48	56	.361	.27	H	$\alpha_1 = .79$ $\mu_1 = .053$ $\alpha_2 = .21$ $\mu_2 = .023$.16	C1	$a = .36$ $\mu_1 = .08$ $\mu_2 = .03$

TABLE 1 (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P50	38	.152	.20	C1	$a = .34$ $\mu_1 = .14$ $\mu_2 = .05$.17	H	$\alpha_1 = .54$ $\alpha_2 = .46$ $\mu_1 = .051$ $\mu_2 = .143$
P52	44	.407	.93	H	$\alpha_1 = .15$ $\alpha_2 = .85$ $\mu_1 = .01$ $\mu_2 = .047$.88	C1	$a = .20$ $\mu_1 = .06$ $\mu_2 = .01$
P54	23	.210	.92	ER2	$\mu = .035$.86	ER3	$\mu = .035$
P56	59	.277	.04	H	$\alpha_1 = .98$ $\alpha_2 = .02$ $\mu_1 = .066$ $\mu_2 = .027$.025	E	$\mu = .061$
P58	47	.285	.76	E	$\mu = .047$.70	H	$\alpha_1 = .3$ $\alpha_2 = .7$ $\mu_1 = .048$ $\mu_2 = .048$
P60	39	.475	.91	C2	$a = .62$ $\mu_1 = .03$ $\mu_2 = .05$.68	H	$\alpha_1 = .4$ $\alpha_2 = .6$ $\mu_1 = .023$ $\mu_2 = .023$
P62	39	.282	.99	C2	$a = .68$ $\mu_1 = .06$ $\mu_2 = .08$.90	E	$\mu = .038$
P64	80	.342	.79	C2	$a = .82$ $\mu_1 = .10$ $\mu_2 = .12$.36	ER2	$\mu = .061$
P66	49	.222	.32	C1	$a = .42$ $\mu_1 = .09$ $\mu_2 = .04$.20	H	$\alpha_1 = 0.0$ $\alpha_2 = 1.0$ $\mu_1 = .007$ $\mu_2 = .048$
P68	127	.242						
P70	22	.05	.56	E	$\mu = .123$.52	C2	$a = .76$ $\mu_1 = .20$ $\mu_2 = .25$

TABLE 1 (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P72	29	.128	.61	C1	$a = .23$ $\mu_1 = .14$ $\mu_2 = .03$.49	H	$\alpha_1 = .58$ $\alpha_2 = .42$ $\mu_1 = .201$ $\mu_2 = .038$
P74	106	.200	.74	C2	$a = .86$ $\mu_1 = .26$ $\mu_2 = .29$.34	ER2	$\mu = .147$
P76	132	.377	.025	C2	$a = .94$ $\mu_1 = .18$ $\mu_2 = .19$.014	E	$\mu = .093$
P78	9	.046	.26	H	$\alpha_1 = .36$ $\alpha_2 = .64$ $\mu_1 = .039$ $\mu_2 = .141$.23	E	$\mu = .072$
P80	76	.174	.60	C2	$a = .64$ $\mu_1 = .18$ $\mu_2 = .24$.31	ER2	$\mu = .122$
P82	56	.156	.10	ER2	$\mu = .105$.014	ER3	$\mu = .105$
P84	611	.588						
P86	440	.804	.67	C2	$a = 1.0$ $\mu_1 = .15$ $\mu_2 = .15$.64	ER2	$\mu = .073$
P88	95	.211						
P90	209	.426	.12	C2	$a = .96$ $\mu_1 = .13$ $\mu_2 = .13$.06	ER2	$\mu = .066$
P92	304	.494						

TABLE 1 (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ 0	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ 0	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P94	212	.581	.38	C2	$a = .32$ $\mu_1 = .06$ $\mu_2 = .10$.13	E	$\mu = .05$
P96	104	.268	.30	C1	$a = .39$ $\mu_1 = .11$ $\mu_2 = .04$.08	H	$\alpha_1 = .02$ $\alpha_2 = .98$ $\mu_1 = .015$ $\mu_2 = .056$
P98	127	.119						
P100	100	.089	.13	C2	$a = .24$ $\mu_1 = .09$ $\mu_2 = .16$.04	E	$\mu = .078$
P102	68	.108	.98	C1	$a = .40$ $\mu_1 = .18$ $\mu_2 = .07$.96	H	$\alpha_1 = .03$ $\alpha_2 = .97$ $\mu_1 = .029$ $\mu_2 = .093$
P104	556	.659	.05	ER2	$\mu = .117$			
P106	267	.596	.40	C2	$a = .66$ $\mu_1 = .18$ $\mu_2 = .25$.08	ER2	$\mu = .124$
P108	142	.446	.51	C2	$a = .86$ $\mu_1 = .08$ $\mu_2 = .09$.18	ER2	$\mu = .043$
P110	54	.342	.57	C2	$a = .54$ $\mu_1 = .06$ $\mu_2 = .09$.36	H	$\alpha_1 = .54$ $\alpha_2 = .46$ $\mu_1 = .037$ $\mu_2 = .054$
P112	90	.561						
P114	327	.379						

TABLE I (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P116	362	.785	.11	E	$\mu = .065$.07	C1	$a = .49$ $\mu_1 = .13$ $\mu_2 = .06$
P118	199	.846	.20	C1	$a = .46$ $\mu_1 = .13$ $\mu_2 = .06$.12	H	$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 0$ $\mu_1 = .065$ $\mu_2 = .009$
P120	119	.519	.025	C1	$a = .39$ $\mu_1 = .13$ $\mu_2 = .05$.01	H	$\alpha_1 = .16$ $\alpha_2 = .84$ $\mu_1 = .035$ $\mu_2 = .076$
P122	51	.619	.94	C1	$a = .21$ $\mu_1 = .04$ $\mu_2 = .01$.76	H	$\alpha_1 = .66$ $\alpha_2 = .34$ $\mu_1 = .054$ $\mu_2 = .01$
P124	62	.326	.21	H	$\alpha_1 = .99$ $\alpha_2 = .01$ $\mu_1 = .052$ $\mu_2 = .015$.21	E	$\mu = .052$
P126	33	.455	.95	H	$\alpha_1 = .5$ $\alpha_2 = .5$ $\mu_1 = .022$ $\mu_2 = .022$.94	E	$\mu = .022$
P128	6	.051	.92	ER3	$\mu = .105$.91	R	$\mu = .105$
P130	55	.211	.48	C2	$a = .92$ $\mu_1 = .14$ $\mu_2 = .15$.33	ER2	$\mu = .073$
P132	45	.276	.93	ER2	$\mu = .091$.93	C2	$a = 1.0$ $\mu_1 = .18$ $\mu_2 = .18$
P134	280	.624	.92	C2	$a = .92$ $\mu_1 = .23$ $\mu_2 = .24$.43	ER2	$\mu = .122$
P136	240	.415	.22	ER2	$\mu = .156$.04	C2	$a = .52$ $\mu_1 = .21$ $\mu_2 = .31$

TABLE 1 (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ÉCHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P138	428	.827	.07	ER2	$\mu = .141$.006	ER3	$\mu = .141$
P140	40	.197	.66	E	$\mu = .067$.52	C2	$a = .40$ $\mu_1 = .08$ $\mu_2 = .13$
P142	69	.282	.82	C3	$\mu = .19$ $b = .20$.66	ER2	$\mu = .073$
P144	64	.231	.96	C2	$a = .60$ $\mu_1 = .11$ $\mu_2 = .16$.33	E	$\mu = .078$
P146	120	.326	.05	C2	$a = .32$ $\mu_1 = .12$ $\mu_2 = .20$			
P148	59	.362	.72	E	$\mu = .047$.71	C1	$a = .49$ $\mu_1 = .09$ $\mu_2 = .05$
P150	43	.213	.88	C1	$a = .41$ $\mu_1 = .11$ $\mu_2 = .05$.74	H	$\alpha_1 = .98$ $\alpha_2 = .02$ $\mu_1 = .058$ $\mu_2 = .017$
P152	108	.54	.08	C1	$a = .45$ $\mu_1 = .11$ $\mu_2 = .05$.04	H	$\alpha_1 = .3$ $\alpha_2 = .7$ $\mu_1 = .056$ $\mu_2 = .056$
P154	50	.296	.18	E	$\mu = .051$.14	C2	$a = .60$ $\mu_1 = .07$ $\mu_2 = .10$

TABLE 2: PERIODES INOCCUPEES (silences inter-messages corrigés)

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P6	34	.191	.36	C1	$\mu_1 = .026$ $a = .35$ $\mu_2 = .009$.24	H	$\alpha_1 = .34$ $\mu_1 = .008$ $\alpha_2 = .66$ $\mu_2 = .019$
P8	45	.162	.07	C1	$\mu_1 = .029$ $a = .17$ $\mu_2 = .005$			
P10	28	.135	.74	H	$\alpha_1 = .71$ $\mu_1 = .007$ $\alpha_2 = .29$ $\mu_2 = .12$.10	C1	$\mu_1 = .019$ $a = .28$ $\mu_2 = .005$
P12	77	.231	.47	C1	$\mu_1 = .045$ $a = .18$ $\mu_2 = .008$.21	H	$\alpha_1 = .83$ $\mu_1 = .038$ $\alpha_2 = .17$ $\mu_2 = .007$
P14	35	.208	.42	H	$\alpha_1 = .63$ $\mu_1 = .059$ $\alpha_2 = .37$ $\mu_2 = .006$.14	C1	$\mu_1 = .026$ $a = .16$ $\mu_2 = .004$
P16	43	.387	.26	H	$\alpha_1 = .41$ $\mu_1 = .011$ $\alpha_2 = .59$ $\mu_2 = .081$.05	C1	$\mu_1 = .047$ $a = .2$ $\mu_2 = .009$
P18	20	.154	.015	C1	$\mu_1 = .022$ $a = .16$ $\mu_2 = .004$			
P20	46	.228	.73	H	$\alpha_1 = .28$ $\mu_1 = .006$ $\alpha_2 = .72$ $\mu_2 = .045$.41	C1	$\mu_1 = .031$ $a = .15$ $\mu_2 = .005$
P22	52	.201	.26	C1	$\mu_1 = .037$ $a = .4$ $\mu_2 = .016$.17	E	$\mu = .019$
P24	70	.321	.74	C1	$\mu_1 = .059$ $a = .2$ $\mu_2 = .011$			
P26	19	.124	.92	C1	$\mu_1 = .014$ $a = .32$ $\mu_2 = .004$.86	H	$\alpha_1 = .66$ $\mu_1 = .01$ $\alpha_2 = .34$ $\mu_2 = .004$

TABLE 2 (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ÉCHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P28	29	.249	.42	H	$\alpha_1 = .26$ $\mu_1 = .007$ $\alpha_2 = .74$ $\mu_2 = .053$.21	C1	$a = .2$ $\mu_1 = .023$ $\mu_2 = .005$
P30	128	.228	.17	C1	$a = .38$ $\mu_1 = .093$ $\mu_2 = .036$.08	H	$\alpha_1 = .17$ $\alpha_2 = .83$ $\mu_1 = .025$ $\mu_2 = .056$
P32	162	.333	.004	C1	$a = .19$ $\mu_1 = .133$ $\mu_2 = .025$			
P34	121	.384	.53	H	$\alpha_1 = .78$ $\alpha_2 = .22$ $\mu_1 = .12$ $\mu_2 = .018$.24	C1	$a = .15$ $\mu_1 = .105$ $\mu_2 = .016$
P36	108	.524	.78	C1	$a = .33$ $\mu_1 = .125$ $\mu_2 = .04$.07	E	$\mu = .062$
P38	41	.286	.96	H	$\alpha_1 = .4$ $\alpha_2 = .6$ $\mu_1 = .069$ $\mu_2 = .011$.46	C1	$a = .27$ $\mu_1 = .033$ $\mu_2 = .009$
P40	58	.384	.12	C1	$a = .17$ $\mu_1 = .059$ $\mu_2 = .01$			
P42	90	.409	.13	C1	$a = .16$ $\mu_1 = .083$ $\mu_2 = .014$			
P44	92	.591	.64	H	$\alpha_1 = .63$ $\alpha_2 = .37$ $\mu_1 = .132$ $\mu_2 = .034$.61	C1	$a = .34$ $\mu_1 = .128$ $\mu_2 = .033$
P46	38	.267	.11	H	$\alpha_1 = .55$ $\alpha_2 = .45$ $\mu_1 = .038$ $\mu_2 = .008$.05	C1	$a = .25$ $\mu_1 = .028$ $\mu_2 = .007$
P48	53	.361	.69	H	$\alpha_1 = .7$ $\alpha_2 = .3$ $\mu_1 = .059$ $\mu_2 = .009$.48	C1	$a = .18$ $\mu_1 = .045$ $\mu_2 = .008$

TABLE 2 (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ 0	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ 0	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P50	35	.152	.97	H	$\alpha_1 = .52$ $\mu_1 = .007$ $\alpha_2 = .48$ $\mu_2 = .045$.63	C1	$a = .24$ $\mu_1 = .024$ $\mu_2 = .006$
P52	40	.407	.37	H	$\alpha_1 = .67$ $\mu_1 = .014$ $\alpha_2 = .33$ $\mu_2 = .078$.14	C1	$a = .31$ $\mu_1 = .038$ $\mu_2 = .012$
P54	21	.210	.13	C1	$a = .43$ $\mu_1 = .017$ $\mu_2 = .007$.10	H	$\alpha_1 = .13$ $\mu_1 = .005$ $\alpha_2 = .87$ $\mu_2 = .009$
P56	57	.277	.81	C1	$a = .43$ $\mu_1 = .045$ $\mu_2 = .018$.72	H	$\alpha_1 = .86$ $\mu_1 = .026$ $\alpha_2 = .14$ $\mu_2 = .012$
P58	44	.285	.44	H	$\alpha_1 = .53$ $\mu_1 = .091$ $\alpha_2 = .47$ $\mu_2 = .009$.04	C1	$a = .2$ $\mu_1 = .035$ $\mu_2 = .007$
P60	36	.475	.47	H	$\alpha_1 = .32$ $\mu_1 = .12$ $\alpha_2 = .68$ $\mu_2 = .014$.11	C1	$a = .3$ $\mu_1 = .038$ $\mu_2 = .011$
P62	36	.282	.50	H	$\alpha_1 = .26$ $\mu_1 = .004$ $\alpha_2 = .74$ $\mu_2 = .06$.12	C1	$a = .11$ $\mu_1 = .028$ $\mu_2 = .003$
P64	73	.342	.21	C1	$a = .19$ $\mu_1 = .058$ $\mu_2 = .011$.18	H	$\alpha_1 = .77$ $\mu_1 = .056$ $\alpha_2 = .23$ $\mu_2 = .011$
P66	44	.222	.67	H	$\alpha_1 = .20$ $\mu_1 = .006$ $\alpha_2 = .80$ $\mu_2 = .017$.43	C1	$a = .29$ $\mu_1 = .024$ $\mu_2 = .007$
P68	125	.242	.10	C1	$a = .2$ $\mu_1 = .045$ $\mu_2 = .009$			
P70	21	.05	.63	H	$\alpha_1 = .23$ $\mu_1 = .003$ $\alpha_2 = .77$ $\mu_2 = .01$.45	C1	$a = .22$ $\mu_1 = .012$ $\mu_2 = .003$

TABLE 2 (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P72	28	.128	.97	E	$\mu = .01$.91	C1	$\mu_1 = .02$ $\mu_2 = .008$ $a = .41$
P74	99	.200	.71	C1	$\mu_1 = .068$ $\mu_2 = .027$ $a = .4$.69	H	$\alpha_1 = .97$ $\alpha_2 = .03$ $\mu_1 = .042$ $\mu_2 = .013$
P76	120	.377	.89	C1	$\mu_1 = .103$ $\mu_2 = .037$ $a = .36$.80	H	$\alpha_1 = .04$ $\alpha_2 = .96$ $\mu_1 = .017$ $\mu_2 = .057$
P78	8	.046	.99	C2	$\mu_1 = .003$ $\mu_2 = .006$ $a = .11$.98	E	$\mu = .003$
P80	75	.174	.39	C1	$\mu_1 = .05$ $\mu_2 = .014$ $a = .28$.23	H	$\alpha_1 = .31$ $\alpha_2 = .69$ $\mu_1 = .013$ $\mu_2 = .043$
P82	55	.156	.69	C1	$\mu_1 = .038$ $\mu_2 = .015$ $a = .4$.68	H	$\alpha_1 = .23$ $\alpha_2 = .77$ $\mu_1 = .011$ $\mu_2 = .025$
P84	480	.588						
P86	167	.804	.04	H	$\alpha_1 = .7$ $\alpha_2 = .3$ $\mu_1 = .265$ $\mu_2 = .058$.039	C1	$\mu_1 = .26$ $\mu_2 = .057$ $a = .22$
P88	89	.211	.45	C1	$\mu_1 = .032$ $\mu_2 = .015$ $a = .45$.30	H	$\alpha_1 = .98$ $\alpha_2 = .02$ $\mu_1 = .017$ $\mu_2 = .006$
P90	189	.426	.22	C1	$\mu_1 = .089$ $\mu_2 = .031$ $a = .35$.05	H	$\alpha_1 = .84$ $\alpha_2 = .16$ $\mu_1 = .056$ $\mu_2 = .022$
P92	240	.494	.26	H	$\alpha_1 = .6$ $\alpha_2 = .4$ $\mu_1 = .147$ $\mu_2 = .036$.20	C1	$\mu_1 = .133$ $\mu_2 = .034$ $a = .26$

TABLE 2 (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ Q	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P94	180	.581	.24	H	$\alpha_1 = .6$ $\mu_1 = .145$ $\alpha_2 = .4$ $\mu_2 = .032$.08	C1	$a = .24$ $\mu_1 = .119$ $\mu_2 = .029$
P96	96	.268	.96	C1	$a = .35$ $\mu_1 = .036$ $\mu_2 = .013$.92	H	$\alpha_1 = .86$ $\alpha_2 = .14$ $\mu_1 = .022$ $\mu_2 = .008$
P98	123	.119	.029	H	$\alpha_1 = .43$ $\alpha_2 = .57$ $\mu_1 = .005$ $\mu_2 = .05$			
P100	99	.089	.26	C1	$a = .31$ $\mu_1 = .015$ $\mu_2 = .005$			
P102	64	.108	.13	H	$\alpha_1 = .71$ $\alpha_2 = .29$ $\mu_1 = .1$ $\mu_2 = .003$			
P104	345	.659	.01	H	$\alpha_1 = .6$ $\alpha_2 = .4$ $\mu_1 = .385$ $\mu_2 = .078$			
P106	184	.596	.14	C1	$a = .339$ $\mu_1 = .267$ $\mu_2 = .091$.036	H	$\alpha_1 = .22$ $\alpha_2 = .78$ $\mu_1 = .07$ $\mu_2 = .179$
P108	123	.446	.31	C1	$a = .35$ $\mu_1 = .06$ $\mu_2 = .021$.27	H	$\alpha_1 = .04$ $\alpha_2 = .96$ $\mu_1 = .009$ $\mu_2 = .033$
P110	51	.342	.55	C1	$a = .28$ $\mu_1 = .044$ $\mu_2 = .012$.42	H	$\alpha_1 = .68$ $\alpha_2 = .32$ $\mu_1 = .036$ $\mu_2 = .012$
P112	82	.561	.44	H	$\alpha_1 = .75$ $\alpha_2 = .25$ $\mu_1 = .104$ $\mu_2 = .022$.38	C1	$a = .2$ $\mu_1 = .108$ $\mu_2 = .022$
P114	296	.379	.007	H	$\alpha_1 = .26$ $\alpha_2 = .74$ $\mu_1 = .011$ $\mu_2 = .062$			

TABLE 2 (suite)

USAGER	TAILLE DE L'ECHANTILLON	TAUX D'OCCUPATION DU CANAL	MEILLEURE REPRÉSENTATION			DEUXIÈME REPRÉSENTATION		
			PROBABILITÉ 0	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES	PROBABILITÉ 0	TYPE DE DISTRIBUTION	PARAMÈTRES
P116	217	.785	.05	E	$\mu = .154$.03	H	$\alpha_1 = .88$ $\mu_1 = .2$ $\alpha_2 = .12$ $\mu_2 = .059$
P118	101	.846	.16	E	$\mu = .208$.1	H	$\alpha_1 = .04$ $\mu_1 = .061$ $\alpha_2 = .96$ $\mu_2 = .233$
P120	100	.519	.47	C1	$\mu_1 = .116$ $a = .23$ $\mu_2 = .027$.11	H	$\alpha_1 = .86$ $\mu_1 = .085$ $\alpha_2 = .14$ $\mu_2 = .02$
P122	47	.619	.29	C1	$\mu_1 = .067$ $a = .38$ $\mu_2 = .025$.21	H	$\alpha_1 = .47$ $\mu_1 = .024$ $\alpha_2 = .53$ $\mu_2 = .053$
P124	60	.326	.73	H	$\alpha_1 = .11$ $\alpha_2 = .89$ $\mu_1 = .004$ $\mu_2 = .055$.55	C1	$a = .08$ $\mu_1 = .049$ $\mu_2 = .004$
P126	31	.455	.21	C1	$\mu_1 = .034$ $a = .39$ $\mu_2 = .013$.14	H	$\alpha_1 = .32$ $\mu_1 = .011$ $\alpha_2 = .68$ $\mu_2 = .023$
P128	5	.051	.94	C1	$\mu_1 = .009$ $a = .44$ $\mu_2 = .004$.94	E	$\mu = .005$
P130	54	.211	.08	H	$\alpha_1 = .48$ $\alpha_2 = .52$ $\mu_1 = .011$ $\mu_2 = .052$.03	C1	$a = .265$ $\mu_1 = .038$ $\mu_2 = .01$
P132	43	.276	.12	H	$\alpha_1 = .52$ $\alpha_2 = .48$ $\mu_1 = .021$ $\mu_2 = .094$.06	C1	$a = .28$ $\mu_1 = .067$ $\mu_2 = .018$
P134	247	.624						
P136	199	.415	.7	C1	$\mu_1 = .185$ $a = .33$ $\mu_2 = .062$.33	H	$\alpha_1 = .22$ $\mu_1 = .049$ $\alpha_2 = .78$ $\mu_2 = .127$

3. MODÈLE DE PARTAGE DE CANAL

Pour arriver à des stratégies d'allocation efficaces des canaux permettant une utilisation rationnelle du spectre de radio-mobilité terrestre, il est nécessaire de développer des modèles afin de mesurer ou d'évaluer la qualité de service telle que vue et expérimentée par les utilisateurs. Cette qualité de service peut être mesurée par la moyenne du temps d'attente ou par la 95^e (ou 90^e) centile du temps d'attente. C'est pourquoi la théorie des files d'attente peut être appliquée au problème de partage d'un canal de communications radio-mobilité par deux ou plusieurs usagers, chacun avec sa propre flotte de mobiles et son propre répartiteur. Dans le cas le plus général, il s'agit du modèle de file d'attente $GI|G|1$ dont le processus d'arrivée global est obtenu par la superposition des processus d'arrivée de tous les usagers, pris individuellement, et la distribution combinée de la longueur de message est un mélange probabiliste des distributions correspondant à tous les usagers pris un à un. La distribution de la longueur de message pour chacun des usagers est directement observée à l'aide des ensembles de données disponibles. Il faut chercher à estimer le processus d'arrivée pour chacun des utilisateurs à partir des ensembles de données disponibles (décrits dans le Rapport final de mars 1983).

3.1 Identification de processus d'arrivée

Après avoir effectué les corrections discutées dans la section 2.2.3, une distribution de la longueur de silence inter-message obtenue avec un ensemble de données correspond effectivement à une distribution de la longueur de période inoccupée du canal. Dans le cas de la file d'attente $M|G|1$ la distribution de la longueur de période inoccupée est identique à celle de l'intervalle inter-arrivée - voir



Cox et Smith [3, p. 58]. Elle peut donc être utilisée pour identifier un processus d'arrivée Poissonien. Cependant, les résultats de la section 2.2.4 révèlent qu'en général le processus d'arrivée n'est pas un processus de Poisson, c'est-à-dire la période inoccupée du canal n'est pas en général distribuée selon la loi exponentielle - voir [3, p. 58]. D'autre part, dans le modèle général de file d'attente $GI|G|1$, il est extrêmement difficile de trouver explicitement la relation entre la distribution de l'intervalle inter-arrivée des messages et celle de la période inoccupée du canal, sans parler de déduire la première à partir de la seconde. Heureusement, si l'on approche le modèle $GI|G|1$ par le modèle $PH|PH|1$ où PH est une distribution à phases, en particulier une distribution de Cox telle que la distribution (C1), (C2) ou (C3) présentée dans la section 2.2.2, on obtient un résultat très intéressant et directement applicable à l'identification de processus d'arrivée. Pour énoncer ce résultat il est nécessaire d'introduire certaines caractéristiques de la distribution à phases.

Considérons un processus de Markov sur les états $\{1, \dots, m+1\}$ avec générateur infinitésimal

$$Q = \begin{bmatrix} T & T^0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

où la matrice T de grandeur $m \times m$ est régulière et satisfait aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} T_{ij} &< 0 && \text{pour } 1 \leq i \leq m \\ T_{ij} &\geq 0 && \text{pour } i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, m \\ T_e &= 0 && \text{pour } e = (1, 1, \dots, 1)^* \end{aligned}$$



Le vecteur de probabilité initial est désigné par (α, α_{m+1}) avec $\alpha + \alpha_{m+1} = 1$. Nous supposons que les états $1, 2, \dots, m$ sont tous transitoires et que l'absorption dans l'état $(m+1)$, à partir de n'importe quel état initial, est certain. Alors, la distribution de probabilité du temps d'absorption dans l'état $m+1$, correspondant au vecteur de probabilité initial (α, α_{m+1}) , est donnée par:

$$F(x) = 1 - \alpha \exp(Tx)e, \quad \text{pour } x \geq 0$$

(voir [6, p. 45]).

- Définition: Une distribution de probabilité $F(\cdot)$ définie sur $[0, \infty)$ est une distribution à phases (PH) si, et seulement si, elle est la distribution de probabilité du temps d'absorption d'un processus de Markov à états finis du type défini par (1). La couple (α, T) est appelée une représentation de $F(\cdot)$.

Toutes les distributions utilisées, décrites dans la section 2.2.2 (sauf celle de Rayleigh) sont des distributions à phases. Pour les cas particuliers qui nous concernent, à savoir (E), (Er2), (Er3), (H2), (C1), (C2) et (C3), ils peuvent être représentés de la façon suivante:



$$T = [-\mu]$$

$$\alpha = (1)$$



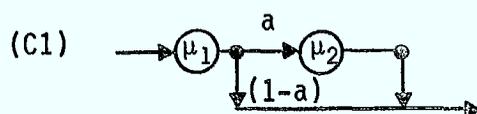
$$T = \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\alpha = (1, 0)$$



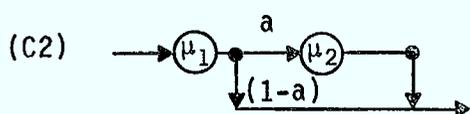
$$T = \begin{bmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ 0 & -\mu & \mu \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\alpha = (1, 0, 0)$$



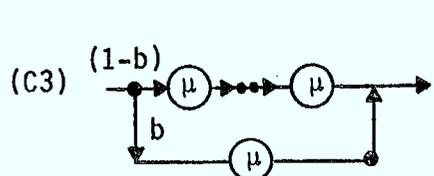
$$T = \begin{bmatrix} -\mu_2 & \mu_2 \\ 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = (a, 1-a)$$



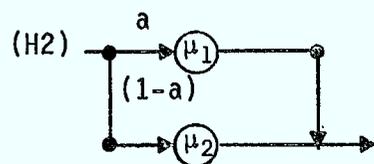
$$T = \begin{bmatrix} -\mu_2 & \mu_2 \\ 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = (a, 1-a)$$



$$T = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu & \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \mu & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\alpha = (b, 1-b, 0, \dots, 0)$$



$$T = \begin{bmatrix} -\mu_2 & \mu_2 \\ 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = (a, 1-a)$$

Considérons la file d'attente $PH_a | PH_s | 1$ dont la distribution du temps inter-arrivée PH_a est à phases avec représentation (α, T) et la distribution du temps de service PH_s est à phases avec représentation (β, S) . Le résultat dont nous avons besoin pour identifier le processus d'arrivée des messages de l'utilisateur d'un canal peut s'énoncer comme suit:

-- Théorème

Étant donné qu'à l'instant t la file d'attente stationnaire $PH_a | PH_s | 1$ devient vide, alors la distribution conditionnelle de la période inoccupée du serveur est une distribution à phases avec représentation (γ, T) .

(Voir [6, p. 128]).

Par conséquent, si nous approchons $GI|G|1$ par $PH|PH|1$, il est alors parfaitement légitime d'estimer la distribution PH_a du temps inter-arrivée des messages de l'utilisateur d'un canal en cherchant tout d'abord la matrice T du générateur infinitésimal Q de la distribution de la période inoccupée du canal. Il reste à calculer le vecteur de probabilité initial (α, α_{m+1}) . Puisque α_{m+1} représente le saut à l'origine de la distribution, pour les cas qui nous intéressent, à savoir (E), (Er2), (Er3), (C1), (C2), (C3) et (H2) nous avons $\alpha_{m+1} = 0$. De plus, pour les distributions (E), (Er2) et (Er3), le vecteur α est fixé a priori. Dans les cas de (C1), (C2), (C3) et (H2) il reste encore un paramètre à calculer. Pour cela, nous procédons comme suit. Sachant que le moment non centré d'ordre i de la distribution PH_a avec représentation (α, T) est donné par:

$$m_i = (-1)^i i! (\alpha T^{-i} e) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

nous pouvons choisir autant d'équations que nécessaire pour déterminer les composantes du vecteur α . Pour fins d'illustration considérons quelques exemples.

• EXEMPLE 1: Distribution (C1)

Pour estimer le paramètre a définissant le vecteur $\alpha = (a, 1-a)$ nous utilisons le premier moment non centré:

$$m_1 = \frac{a}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1}$$

qui est en fait la moyenne du temps inter-arrivée des messages de l'utilisateur d'un canal. Mais, cette dernière est estimable à partir du pourcentage d'occupation de message (p_m) et la longueur moyenne de message (l_m), si la file d'attente est stationnaire et si la période d'observation est assez longue. Par conséquent, nous avons:

$$\frac{100 l_m}{p_m} = \frac{a}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1}$$

ou

$$a = \mu_2 \left(\frac{100 l_m}{p_m} - \frac{1}{\mu_1} \right)$$

• EXEMPLE 2: Distribution (H2)

Posons $l_1 = 1/\mu_1$ et $l_2 = 1/\mu_2$. Supposons, sans perte de généralité (permuter les indices, si nécessaire), que $l_1 > l_2$. Par le même type de raisonnement que celui de l'exemple 1, nous obtenons:

$$a = \left(\frac{100 l_m}{p_m} - l_2 \right) / (l_1 - l_2)$$

3.2 Méthode d'approximation

Il est bien connu que le modèle de file d'attente GI|G|1 constitue un problème mathématique extrêmement difficile à résoudre. Après plus de trente ans de recherche intensive, des chercheurs chevronnés de réputation internationale n'ont pas encore réussi à trouver une méthode de solution autre que par des calculs numériques très longs et très délicats, qui ne conviennent pas très bien à des applications pratiques. C'est pourquoi plusieurs auteurs ont proposé de diverses méthodes d'approximation [1, 4, 5]. La méthode probablement la plus simple est celle proposée par Krämer et Lagenbach-Belz [5]. Elle est basée sur les deux premiers moments des distributions du temps inter-arrivée et de la longueur de message et se résume en deux formules suivantes:

(1) la moyenne du temps d'attente est donnée par:

$$T_w = \frac{AL}{2(1-A)} (C_A^2 + C_L^2) \exp\left[-\frac{2(1-A)(1-C_A^2)^2}{3A(C_A^2 + C_L^2)}\right], \text{ si } C_A^2 < 1$$

$$T_w = \frac{AL}{2(1-A)} (C_A^2 + C_L^2) \exp\left[-\frac{(1-A)(C_A^2 - 1)}{C_A^2 + 4C_L^2}\right], \text{ si } C_A^2 > 1$$

(2) la probabilité d'attente est donnée par:

$$P_w = A + (C_A^2 - 1)A(1-A) \frac{1 + C_A^2 + AC_L^2}{1 + A(C_L^2 - 1) + A^2(4C_A^2 + C_L^2)}, \text{ si } C_A^2 < 1$$

$$P_w = A + (C_A^2 - 1)A(1-A) \frac{4A}{(C_A^2 + A^2(4C_A^2 + C_L^2))}, \text{ si } C_A^2 > 1$$

où

- A = r.L = le trafic offert
- r = le taux d'arrivée des messages
- L = la longueur moyenne des messages
- C_A = le coefficient de variation du temps inter-arrivée des messages
- C_L = le coefficient de variation de la longueur des messages.

Dans le but d'appliquer cette méthode d'approximation au modèle de partage de canal, il faut calculer les paramètres r, L, C_A et C_L du trafic global du canal qui résulte du regroupement d'utilisateurs distincts sur un même canal.

Pour calculer les paramètres L et C_L nous supposons que la longueur de message d'un usager est statistiquement indépendante de celle d'un autre usager. Il faut alors faire une somme pondérée des

lois de probabilité de la manière selon laquelle une distribution hyperexponentielle est définie. La pondération utilisée est déterminée par le taux d'arrivée de message de chacun des usagers. Soit $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ le poids associé à l'utilisateur $1, 2, \dots, n$ avec la moyenne et l'écart type de la longueur de message l_1, l_2, \dots, l_n et $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$; alors:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 1$$

$$L = \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \dots + \gamma_n l_n$$

$$\sigma = \sqrt{\gamma_1 (l_1^2 + \sigma_1^2) + \gamma_2 (l_2^2 + \sigma_2^2) + \dots + \gamma_n (l_n^2 + \sigma_n^2) - L^2}$$

$$C_L = \sigma / C_L$$

Cependant, le calcul du paramètre C_A fait appel à la technique de superposition des processus stochastiques indépendants. Dans ce contexte, les instants d'arrivée des messages d'un usager forment un processus ponctuel. En supposant que ces processus ponctuels sont indépendants les uns des autres, il est possible de calculer la fonction de distribution du temps inter-arrivée du processus combiné à partir de celles des processus composants selon la théorie présentée dans [2].

Toutefois, il s'agit là des calculs très complexes, sinon irréalisables, en général. C'est pourquoi nous nous limitons encore aux processus ponctuels composants dont la distribution du temps inter-arrivée est une distribution à phases. De plus, pour ne pas alourdir davantage la présentation de la méthodologie proposée, nous ne considérons que deux processus composants provenant de deux usagers distincts. Le développement mathématique correspondant fait l'objet d'un appendice (section 5). Nous donnons ici un exemple illustrant la méthodologie proposée et l'application des formules obtenues dans la section 5.1.

• EXEMPLE

Il s'agit d'évaluer la qualité de service obtenue, en termes du temps d'attente moyen, quand les deux usagers P74 et P80 doivent partager un même canal.

- (a) Le trafic de l'utilisateur 1 est décrit par une distribution du temps inter-arrivée du type (C1) avec $a_1 = .534$, $\lambda_1 = .068$ et $\lambda_2 = .027$, et une distribution de la longueur de message du type (C2) avec $b_1 = .86$, $\mu_1 = .26$ et $\mu_2 = .29$.
- (b) Le trafic de l'utilisateur 2 est décrit par une distribution du temps inter-arrivée du type (C1) avec $a_2 = .389$, $\lambda_1 = .050$ et $\lambda_2 = 0.14$, et une distribution de la longueur de message du type (C2) avec $b_2 = .64$, $\mu_1 = .18$ et $\mu_2 = .24$.

Les moyennes des temps inter-arrivées sont:

$$m_1 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{a_1}{\lambda_2} = 34.5$$

$$m_2 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} = 47.8$$

$$m_1 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} = 20$$

Les poids associés aux deux usagers sont:

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{m_1} \right) / \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = .58$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{1}{m_2} \right) / \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = .42$$



Les moyennes et écarts types des messages sont:

$$l_1 = 6.82 \quad l_2 = 8.22$$

$$\sigma_1 = 5.2 \quad \sigma_2 = 6.8$$

d'où $L = \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 = 7.4$

$$\sigma(L) = \sqrt{\gamma_1 (\sigma_1^2 + l_1^2) + \gamma_2 (\sigma_2^2 + l_2^2) - L^2} = 5.9$$

$$C_L = \sigma(L)/L = .80$$

$$\alpha_1 = 1 - a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = .11$$

$$\alpha_2 = \frac{a\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = .89$$

$$\beta_1 = 1 - b - \frac{b\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = .46$$

$$\beta_2 = \frac{b\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = .54$$

$$E(t^2) = \frac{m}{m_1 m_2} \left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{\lambda_1 \lambda_1} \times \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_1} + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\lambda_1 \lambda_2} \times \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 \beta_1}{\lambda_2 \lambda_1} \times \frac{2}{\lambda_2 + \lambda_1} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\lambda_2 \lambda_2} \times \frac{2}{\lambda_2 + \lambda_2} \right] = 869$$

$$\sigma = \sqrt{E(t^2) - m^2} = 21.6$$

$$C_A = 1.08$$

$$A = rL = L/m = 7.4/20 = .37$$

$$T_w = 3.8$$

$$P_w = 0.40$$

3.3 Stratégies de partage et résultats

La méthode d'approximation proposée dans la section 3.2 constitue un outil permettant d'évaluer la qualité de service obtenue en termes du temps d'attente moyen, quand deux ou plusieurs usagers doivent partager un même canal. Si les exigences en terme de qualité de service sont explicitement spécifiées, il est alors possible de vérifier si un tel usager peut être assigné à un même canal qu'un tel autre usager. Une nouvelle question se pose maintenant: Quels types d'usagers doivent-ils être regroupés ensemble dans le but de partager un canal, si ce partage s'avère nécessaire? Pour cela nous considérons la classification des usagers par les longueurs moyennes des messages. Nous choisissons des cas types de messages courts (6-8 secondes), de messages moyens (13-16 secondes) et de messages longs (18-23 secondes). Les usagers choisis sont les suivants:

(a) Cas des messages courts

Usager	Longueur moyenne de message
P74	7 secondes
P80	8 secondes
P136	6 secondes

(b) Cas des messages moyens

Usager	Longueur moyenne de message
P12	13 secondes
P64	16 secondes
P100	13 secondes

(c) Cas des messages longs

Usager	Longueur moyenne de message
P96	19 secondes
P108	23 secondes
P152	18 secondes

Puisque les calculs de superposition des processus stochastiques ponctuels deviennent trop lourds à manipuler, quand plus de deux usagers partagent un même canal; nous ne considérons que le partage d'un canal par deux usagers. Dans le but de respecter la qualité de service exprimée par un temps moyen d'attente inférieur à trois fois la longueur de message, nous cherchons à limiter le taux d'occupation de message d'un canal à environ 0.75-0.80. Ce sont les contraintes auxquelles toute stratégie de partage étudiée doit satisfaire à priori. Les stratégies choisies sont les suivantes:

- (1) regrouper les deux usagers ayant des messages de longueurs semblables;
- (2) regrouper les deux usagers ayant des messages de longueurs considérablement différentes.

En fait, les usagers ont été choisis de façon à ce qu'un regroupement de deux usagers puisse satisfaire aux contraintes mentionnées ci-dessus et que les caractéristiques de trafic soient suffisamment diversifiées. Les résultats de l'évaluation des stratégies de partage sont présentés dans la table 3.

Chaque ligne de la table 3 décrit l'utilisation partagée d'un canal par deux usagers. Pour chacun des deux usagers, les informations suivantes sont fournies:

- l'identification de l'utilisateur;
- le type de la distribution du temps inter-arrivée, à savoir (C1), (C2), (C3), (H2), (Er2), (Er3) ou (E);
- la moyenne du temps inter-arrivée;
- le coefficient de variation du temps inter-arrivée;
- le type de distribution du temps de service (ou de la longueur de message);
- la moyenne de la longueur de message;
- le coefficient de variation de la longueur de message.

En ce qui concerne les caractéristiques d'utilisation du canal et la qualité de service, les résultats suivants sont obtenus à l'aide de la méthode d'approximation décrite dans la section 3.2:

- le taux d'occupation du canal (A);
- la probabilité d'attente (P_w);
- le temps moyen d'attente (T_w);
- le rapport T_w/L pour l'ensemble de tous les messages;
- le rapport T_w/l_1 pour les messages de l'utilisateur 1;
- le rapport T_w/l_2 pour les messages de l'utilisateur 2.

L'observation de la table 3 montre clairement l'importance du choix adéquat d'une mesure de la qualité de service. En effet si l'on désire mesurer la qualité de service en termes du rapport R du temps moyen d'attente sur la longueur moyenne de messages, il est nécessaire de qualifier la notion de "longueur moyenne de messages". Une possibilité consiste à utiliser la moyenne globale L des messages des deux usagers, le rapport $R = T_w/L$ mesure alors l'état d'utilisation du canal dans son ensemble, sans refléter l'appréciation individuelle de chaque usager. Une autre possibilité consiste à utiliser l'une ou l'autre des longueurs de messages de chaque usager (l_1 ou l_2). Le fait de considérer la plus petite des deux longueurs de messages conduira alors à un rapport R reflétant la situation la plus pessimiste.

3.4 Simulations et résultats

Dans le but de corroborer les résultats obtenus par la méthode d'approximation, un modèle de simulation a été également élaboré et implanté en GPSS. Le canal considéré est de type duplex et l'accès au canal est aléatoire. Un opérateur, qui veut envoyer un message ou entreprendre une communication, attend jusqu'à ce que le canal soit libre avant de l'accaparer. Si à un moment donné plusieurs utilisateurs essayent de saisir le canal libre, celui qui l'obtiendra est déterminé par un tirage au sort. Autrement dit, la discipline d'attente est aléatoire. Le modèle de simulation fait appel aussi à des distributions du temps inter-arrivée et de la longueur de message, qui sont des résultats obtenus dans les sections 2.2.4 et 3.1. Le programme GPSS, qui implante le modèle de simulation élaboré, se présente dans un appendice (section 5.2). On y trouve également des résultats d'un essai de simulation. Il s'agit du même cas pratique de l'exemple présenté à la fin de la section 3.2. Pour faciliter des comparaisons nécessaires, les résultats obtenus par la méthode d'approximation et par la simulation sur ordinateur sont résumés dans la table 4.



On observe dans la grande majorité des cas une très bonne concordance des résultats des deux approches, l'erreur maximale étant de 30% dans un seul des cas. Il faut noter que dans la simulation, la discipline de service est aléatoire tandis que la méthode d'approximation suppose une discipline de type "premier arrivé premier servi". On peut également noter que contrairement à la méthode d'approximation, la simulation permet d'avoir la distribution des temps d'attente. Cela permet donc de déterminer une autre mesure de qualité de service du type: "95% des temps d'attente sont inférieurs à X secondes".

TABLE 3(a): REGROUPEMENTS DE DEUX USAGERS AYANT DES MESSAGES COURTS

USAGER 1							USAGER 2							RÉSULTATS D'APPROXIMATION					
ARRIVÉES				SERVICE			ARRIVÉES				SERVICE			A	P _w	T _w	$\frac{T_w}{L}$	$\frac{T_w}{I_1}$	$\frac{T_w}{I_2}$
Type	m ₁ ^a	$\frac{\sigma_1^a}{m_1^a}$	Type	m ₁ ^s	$\frac{\sigma_1^s}{m_1^s}$	Type	m ₂ ^a	$\frac{\sigma_2^a}{m_2^a}$	Type	m ₂ ^s	$\frac{\sigma_2^s}{m_2^s}$								
P74	C1	34.5	1.04	C2	6.82	.76	P80	C1	47.8	1.26	C2	8.22	.82	.37	.40	3.81	.52	.56	.46
P74	C1	34.5	1.04	C2	6.82	.76	P136	C1	15.5	1.03	ER2	6.42	.86	.61	.62	8.89	1.36	1.31	1.39
P80	C1	47.8	1.26	C2	8.22	.82	P136	C1	15.5	1.03	ER2	6.42	.86	.59	.60	8.8	1.3	1.1	1.4

TABLE 3(b): REGROUPEMENT DE DEUX USAGERS AYANT DES MESSAGES DE LONGUEURS MOYENNES

U S A G E R 1							U S A G E R 2						RÉSULTATS D'APPROXIMATION						
ARRIVÉES				SERVICE			ARRIVÉES				SERVICE								
Type	m_1^a	$\frac{\sigma_1^a}{m_1^a}$		Type	m_1^s	$\frac{\sigma_1^s}{m_1^s}$	Type	m_2^a	$\frac{\sigma_2^a}{m_2^a}$		Type	m_2^s	$\frac{\sigma_2^s}{m_2^s}$	A	P_w	T_w	$\frac{T_w}{L}$	$\frac{T_w}{l_1}$	$\frac{T_w}{l_2}$
P12	C1	57.5	1.56	H	13	1.17	P64	C1	48.1	1.46	C2	16.4	.77	.57	.67	25.0	1.7	1.9	1.5
P12	C1	57.5	1.56	H	13	1.17	P100	C1	139.9	1.20	C2	12.8	.94	.32	.40	8.4	.65	.65	.66
P64	C1	48.1	1.46	C2	16.4	.77	P100	C1	139.9	1.20	C2	12.8	.94	.43	.53	12.7	.82	.80	1.0

TABLE 3(c): REGROUPEMENT DE DEUX USAGERS AYANT DES MESSAGES LONGS

U S A G E R 1							U S A G E R 2							RÉSULTATS D' APPROXIMATION					
ARRIVÉES				SERVICE			ARRIVÉES				SERVICE			A	P _w	T _w	$\frac{T_w}{L}$	$\frac{T_w}{l_1}$	$\frac{T_w}{l_2}$
Type	m ₁ ^a	$\frac{\sigma_1^a}{m_1^a}$		Type	m ₁ ^s	$\frac{\sigma_1^s}{m_1^s}$	Type	m ₂ ^a	$\frac{\sigma_2^a}{m_2^a}$		Type	m ₂ ^s	$\frac{\sigma_2^s}{m_2^s}$						
P96	C1	69.4	1.06	C1	18.95	1.13	P108	C1	52.4	.94	C2	23.3	.75	.72	.71	48.5	2.3	2.6	2.1
P96	C1	69.4	1.06	C1	18.95	1.13	P152	C1	33.2	1.41	C1	18.1	1.05	.82	.86	108.5	5.9	5.7	6.0

TABLE 3(d): REGROUPEMENTS D'UN USAGER À MESSAGES COURTS AVEC UN USAGER À MESSAGES LONGS

USAGER 1							USAGER 2							RÉSULTATS D'APPROXIMATION					
ARRIVÉES				SERVICE			ARRIVÉES				SERVICE			A	P _w	T _w	$\frac{T_w}{L}$	$\frac{T_w}{T_1}$	$\frac{T_w}{T_2}$
Type	m_1^a	$\frac{\sigma_1^a}{m_1^a}$		Type	m_1^S	$\frac{\sigma_1^S}{m_1^S}$	Type	m_2^a	$\frac{\sigma_2^a}{m_2^a}$	Type	m_2^S	$\frac{\sigma_2^S}{m_2^S}$							
P74	C1	34.5	1.04	C2	6.82	.76	P152	C1	33.2	1.41	C1	18.1	1.05	.74	.78	49.7	4.0	7.3	2.8
P74	C1	34.5	1.04	C2	6.82	.76	P96	C1	69.4	1.06	C1	18.95	1.13	.47	.48	13.4	1.2	2.0	.70
P74	C1	34.5	1.04	C2	6.82	.76	P94	C1	34.2	1.01	C2	19.9	.91	.78	.78	53.6	4.0	7.9	2.7
P74	C1	34.5	1.04	C2	6.82	.76	P108	C1	52.4	.94	C2	23.3	.75	.64	.64	25.5	1.9	3.7	1.1
P80	C1	47.8	1.26	C2	8.22	.82	P94	C1	34.2	1.01	C2	19.9	.91	.75	.77	50.5	3.4	6.1	2.5
P80	C1	47.8	1.26	C2	8.22	.82	P108	C1	52.4	.94	C2	23.3	.75	.62	.64	25.3	1.6	3.1	1.1
P136	C1	15.5	1.03	ER2	6.42	.86	P96	C1	69.4	1.06	C1	18.95	1.13	.69	.70	26.7	3.1	4.2	1.4

151

TABLE 4: COMPARAISON DES RÉSULTATS D'APPROXIMATION ET DE SIMULATION

	RÉSULTATS D'APPROXIMATION						RÉSULTATS DE SIMULATION					
	A	P _w	T _w	$\frac{T_w}{L}$	$\frac{T_w}{l_1}$	$\frac{T_w}{l_2}$	A	P _w	T _w	$\frac{T_w}{L}$	$\frac{T_w}{l_1}$	$\frac{T_w}{l_2}$
74 + 80	.37	.40	3.8	.52	.56	.46	.38	.41	4.2	.57	.54	.59
74 + 136	.61	.62	8.9	1.4	1.3	1.4	.63	.63	8.5	1.3	1.2	1.3
80 + 136	.59	.60	8.8	1.3	1.1	1.4	.60	.62	8.8	1.3	1.1	1.4
96 + 108	.72	.71	48.5	2.3	2.6	2.1	.70	.68	41.8	1.9	2.1	1.9
96 + 152	.82	.86	108.5	5.9	5.7	6.0	.82	.84	77.5	4.2	4.0	4.4
74 + 152	.74	.78	49.7	4.0	7.3	2.8	.74	.77	42.9	3.4	5.7	2.6
74 + 96	.47	.48	13.4	1.2	2.0	.70	.47	.49	11.4	1.1	1.6	.65
74 + 94	.78	.78	53.6	4.0	7.9	2.7	.78	.78	42.5	3.2	6.3	2.1
74 + 108	.64	.64	25.5	1.9	3.7	1.1	.64	.65	21.5	1.5	3.4	.83
80 + 94	.75	.77	50.5	3.4	6.1	2.5	.75	.77	40.8	2.7	5.4	1.9
80 + 108	.62	.64	25.3	1.6	3.1	1.1	.62	.61	19.3	1.2	2.3	1.0
136 + 96	.69	.70	26.7	3.1	4.2	1.4	.68	.68	21.6	2.5	3.4	1.1
12 + 64	.57	.67	25.0	1.7	1.9	1.5	.60	.67	29.7	2.0	2.2	1.9
12 + 100	.32	.40	8.4	.65	.65	.66	.33	.41	10.5	.81	.88	.64
64 + 100	.43	.53	12.7	.82	.80	1.0	.46	.56	17.0	1.1	1.1	1.1



4. CONCLUSION

Les objectifs généraux du projet, consistant à poursuivre le développement d'un centre d'activités en communications mobiles terrestres, ont été maintenus au cours de cette phase. Du point de vue technique, l'objectif essentiel de cette phase consistait en une élaboration d'un modèle, permettant l'évaluation de stratégies de partage d'un canal par deux ou plusieurs usagers, à partir des données obtenues au cours de la phase précédente (en 1982-83). Le modèle élaboré est celui d'une file d'attente générale $GI|G|1$. Des résultats portant sur des files d'attente $PH|PH|1$ ont permis de trouver une procédure pour identifier le processus d'arrivée des messages d'un usager à partir des données disponibles. Une méthode d'approximation très simple a été appliquée pour évaluer la qualité de service, en termes de temps moyen d'attente, d'une stratégie de partage d'un canal par deux usagers. Un modèle de simulation a été également développé pour corroborer à la méthode d'approximation. Les résultats obtenus indiquent une forte concordance entre les résultats des deux approches. La méthode d'approximation, grâce à sa simplicité de mise en oeuvre, constitue une solution envisageable dans la pratique.



5. APPENDICES

5.1 Superposition de processus stochastiques

Considérons le problème de superposition de deux processus stochastiques indépendants. Soit, pour les intervalles inter-arrivées du premier processus, les caractéristiques suivantes:

- $F(\cdot)$: la fonction de distribution
- $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$
- $f(\cdot)$: la fonction de densité de probabilité
- μ_F : la moyenne

et pour ceux du second processus:

- $G(\cdot)$: la fonction de distribution
- $\bar{G}(\cdot) = 1 - G(\cdot)$
- $g(\cdot)$: la fonction de densité de probabilité
- μ_G : la moyenne.

Nous nous intéressons au processus combiné qui est obtenu par la superposition des deux processus originels. Pour déterminer la fonction de densité de probabilité pour les intervalles entre deux événements successifs du processus combiné, nous raisonnons de la manière illustrée dans Cox et Miller [2, p. 362].

Considérons un instant arbitraire t . La fonction de densité de la durée de retour résiduelle du 1^{er} processus composant est $F(t)/\mu_F$. Celle du 2^e processus composant est $\bar{G}(t)/\mu_G$.

La durée de retour résiduelle du processus combiné est la plus petite des durées de retour résiduelles des processus composants et a comme fonction de répartition:

$$H^*(t) = 1 - \int_t^{\infty} \frac{F(x)dx}{\mu_F} \int_t^{\infty} \frac{G(x)dx}{\mu_G}$$

et densité de probabilité:

$$h^*(t) = \frac{F(t)}{\mu_F} \int_t^{\infty} \frac{G(x)dx}{\mu_G} + \frac{G(t)}{\mu_G} \int_t^{\infty} \frac{F(x)dx}{\mu_F}$$

Si $h(t)$ est la fonction de densité de probabilité des intervalles du processus combiné, alors la fonction de densité de probabilité des durées de retour résiduelle sera:

$$\frac{1}{\mu_H} \int_t^{\infty} h(x)dx$$

où μ_H est la moyenne correspondant à $h(\cdot)$. Cette dernière est en fait $h^*(t)$. Par conséquent

$$h(t) = - \frac{d}{dt} \mu_H \left[\frac{F(t)}{\mu_F} \int_t^{\infty} \frac{G(x)dx}{\mu_G} + \frac{G(t)}{\mu_G} \int_t^{\infty} \frac{F(x)dx}{\mu_F} \right]$$

Nous appliquons maintenant ce résultat (cette formule) pour déterminer la fonction de densité de probabilité des intervalles inter-arrivées, quand nous faisons partager un canal radio-mobile par deux usagers (2 ensembles de "station de base et flotte de mobiles"). Nous supposons qu'ils sont statistiquement indépendants. Leurs durées inter-arrivées sont estimées à partir des données disponibles. Étant donné les résultats de la section 2.2.4, nous ne considérons que les distributions (C1), (H2) et (E).



• Cas 1: (C1) avec (C1)

$$(C1) \left[\begin{array}{l} F(t) = \left(1-a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right) (1-e^{-\lambda_1 t}) + \frac{a\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} (1-e^{-\lambda_2 t}), \quad t \geq 0 \\ \bar{F}(t) = \left(1-a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \frac{a\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} e^{-\lambda_2 t}, \quad t \geq 0 \\ f(t) = \left(1-a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{a\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right) \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}, \quad t \geq 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{a}{\lambda_2} = m_1 \end{array} \right.$$

$$(C1) \left[\begin{array}{l} G(t) = \left(1-b - \frac{b\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\right) (1-e^{-\mu_1 t}) + \frac{b\mu_1}{\mu_1-\mu_2} (1-e^{-\mu_2 t}), \quad t \geq 0 \\ \bar{G}(t) = \left(1-b - \frac{b\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\right) e^{-\mu_1 t} + \frac{b\mu_1}{\mu_1-\mu_2} e^{-\mu_2 t}, \quad t \geq 0 \\ g(t) = \left(1-b - \frac{b\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\right) \mu_1 e^{-\mu_1 t} + \frac{b\mu_2}{\mu_1-\mu_2} \mu_1 e^{-\mu_2 t}, \quad t \geq 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{b}{\mu_2} = m_2 \end{array} \right.$$

La fonction de densité de probabilité des intervalles inter-arrivées du processus combiné est donnée par:

$$h(t) = -\frac{d}{dt} m \left[\frac{\bar{F}(t)}{1/\lambda_1 + a/\lambda_2} \int_t^\infty \frac{\bar{G}(x) dx}{1/\mu_1 + b/\mu_2} + \frac{\bar{G}(t)}{1/\mu_1 + b/\mu_2} \int_t^\infty \frac{\bar{F}(x) dx}{1/\lambda_1 + a/\lambda_2} \right]$$

où le taux d'arrivée global est:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{1/\mu_1 + b/\mu_2} + \frac{1}{1/\lambda_1 + a/\lambda_2}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 H(t) = \frac{m}{m_1 m_2} \frac{d}{dt} & \left[\alpha_1 \beta_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_1} \right) e^{-(\lambda_1 + \mu_1)t} + \alpha_1 \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) e^{-(\lambda_1 + \mu_2)t} \right. \\
 & \left. + \alpha_2 \beta_1 \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) e^{-(\lambda_2 + \mu_1)t} + \alpha_2 \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\mu_2} \right) e^{-(\lambda_2 + \mu_2)t} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(t) = \frac{m}{m_1 m_2} & \left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{\lambda_1 \mu_1} (\lambda_1 + \mu_1)^2 e^{-(\lambda_1 + \mu_1)t} + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\lambda_1 \mu_2} (\lambda_1 + \mu_2)^2 e^{-(\lambda_1 + \mu_2)t} \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha_2 \beta_1}{\lambda_2 \mu_1} (\lambda_2 + \mu_1)^2 e^{-(\lambda_2 + \mu_1)t} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\lambda_2 \mu_2} (\lambda_2 + \mu_2)^2 e^{-(\lambda_2 + \mu_2)t} \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \alpha_1 = 1 - a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{a\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\beta_1 = 1 - b - \frac{b\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$\beta_2 = \frac{b\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$m_1 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{a}{\lambda_2}$$

$$m_2 = \frac{1}{\mu_1} + \frac{b}{\mu_2}$$

$$m = \frac{(\lambda_2 + a\lambda_1)(\mu_2 + b\mu_1)}{\mu_1 \mu_2 (\lambda_2 + a\lambda_1) + \lambda_1 \lambda_2 (\mu_2 + b\mu_1)}$$



Alors,

$$E(t^2) = \frac{m}{m_1 m_2} \left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{\lambda_1 \mu_1} \times \frac{2}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\lambda_1 \mu_2} \times \frac{2}{\lambda_1 + \mu_2} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 \beta_1}{\lambda_2 \mu_1} \times \frac{2}{\lambda_2 + \mu_1} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\lambda_2 \mu_2} \times \frac{2}{\lambda_2 + \mu_2} \right]$$

$$\sigma = \sqrt{E(t^2) - m^2}$$

• Cas 2: (C1) avec (H2)

$$\begin{array}{l} \text{(C1)} \left[\begin{array}{l} F(t) = \left(1 - a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) (1 - e^{-\lambda_1 t}) + \frac{a\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}), \quad t > 0 \\ \bar{F}(t) = \left(1 - a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \frac{a\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}, \quad t > 0 \\ f(t) = \left(1 - a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{a\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}, \quad t > 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{a}{\lambda_2} = m_1 \end{array} \right. \\ \text{(H2)} \left[\begin{array}{l} G(t) = \beta_1 (1 - e^{-\mu_1 t}) + \beta_2 (1 - e^{-\mu_2 t}), \quad t > 0, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \bar{G}(t) = \beta_1 e^{-\mu_1 t} + \beta_2 e^{-\mu_2 t}, \quad t > 0 \\ g(t) = \beta_1 \mu_1 e^{-\mu_1 t} + \beta_2 \mu_2 e^{-\mu_2 t}, \quad t > 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2} = m_2 \end{array} \right. \end{array}$$



$$h(t) = -\frac{d}{dt} m \left[\frac{1}{m_1} (\alpha_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t}) \int_t^{\infty} \frac{\beta_1 e^{-\mu_1 x} + \beta_2 e^{-\mu_2 x}}{m_2} dx \right. \\ \left. + \frac{1}{m_2} (\beta_1 e^{-\mu_1 t} + \beta_2 e^{-\mu_2 t}) \int_t^{\infty} \frac{1}{m_1} [\alpha_1 e^{-\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 x}] dx \right]$$

$$h(t) = -\frac{m}{m_1 m_2} \frac{d}{dt} \left[\alpha_1 \beta_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_1} \right) e^{-(\lambda_1 + \mu_1)t} + \alpha_1 \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) e^{-(\lambda_1 + \mu_2)t} \right. \\ \left. + \alpha_2 \beta_1 \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) e^{-(\lambda_2 + \mu_1)t} + \alpha_2 \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\mu_2} \right) e^{-(\lambda_2 + \mu_2)t} \right]$$

$$h(t) = \frac{m}{m_1 m_2} \left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{\lambda_1 \mu_1} (\lambda_1 + \mu_1)^2 e^{-(\lambda_1 + \mu_1)t} + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\lambda_1 \mu_2} (\lambda_1 + \mu_2)^2 e^{-(\lambda_1 + \mu_2)t} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 \beta_1}{\lambda_2 \mu_1} (\lambda_2 + \mu_1)^2 e^{-(\lambda_2 + \mu_1)t} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\lambda_2 \mu_2} (\lambda_2 + \mu_2)^2 e^{-(\lambda_2 + \mu_2)t} \right]$$

$$\text{où } \alpha_1 = 1 - a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{a\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$m_1 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{a}{\lambda_2}$$

$$m_2 = \frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2}$$

$$m = \frac{(\lambda_2 + a\lambda_1)(\beta_1\mu_2 + \beta_2\mu_1)}{\mu_1\mu_2(\lambda_2 + a\lambda_1) + \lambda_1\lambda_2(\beta_1\mu_2 + \beta_2\mu_1)}$$

Alors,

$$E(t^2) = \frac{m}{m_1 m_2} \left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{\lambda_1 \mu_1} \frac{2}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\lambda_1 \mu_2} \frac{2}{\lambda_1 + \mu_2} + \frac{\alpha_2 \beta_1}{\lambda_2 \mu_1} \frac{2}{\lambda_2 + \mu_1} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\lambda_2 \mu_2} \frac{2}{\lambda_2 + \mu_2} \right]$$

$$\sigma = \sqrt{E(t^2) - m^2}$$



• Cas 3: (C1) avec (E)

$$(C1) \quad \left[\begin{array}{l} F(t) = \left(1-a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right) (1-e^{-\lambda_1 t}) + \frac{a\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} (1-e^{-\lambda_2 t}), \quad t > 0 \\ \bar{F}(t) = \left(1-a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \frac{a\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} e^{-\lambda_2 t}, \quad t > 0 \\ f(t) = \left(1-a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{a\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right) \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}, \quad t > 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{a}{\lambda_2} = m_1 \end{array} \right.$$

$$(E) \quad \left[\begin{array}{l} G(t) = 1-e^{-\mu t}, \quad t > 0 \\ \bar{G}(t) = e^{-\mu t}, \quad t > 0 \\ g(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t > 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{1}{\mu} = m_2 \end{array} \right.$$

$$h(t) = \frac{m}{m_1 m_2} \left[\frac{\alpha_1}{\lambda_1 \mu} (\lambda_1 + \mu)^2 e^{-(\lambda_1 + \mu)t} + \frac{\alpha_2}{\lambda_2 \mu} (\lambda_2 + \mu)^2 e^{-(\lambda_2 + \mu)t} \right]$$

où
$$m = \frac{\lambda_2 + a\lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 + \mu(\lambda_2 + a\lambda_1)}$$

$$\alpha_1 = 1-a - \frac{a\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{a\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}$$



Alors,

$$E(t^2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 + \mu(\lambda_2 + \alpha \lambda_1)} \left[\frac{\alpha_1}{\lambda_1} \frac{2}{\lambda_1 + \mu} + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \frac{2}{\lambda_2 + \mu} \right]$$

$$\sigma = \sqrt{E(t^2) - m^2}$$

• Cas 4: (H2) avec (H2)

$$(H2) \left[\begin{array}{l} F(t) = \alpha_1(1 - e^{-\lambda_1 t}) + \alpha_2(1 - e^{-\lambda_2 t}), \quad t > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \bar{F}(t) = \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad t > 0 \\ f(t) = \alpha_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad t > 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \end{array} \right.$$

$$(H2) \left[\begin{array}{l} G(t) = \beta_1(1 - e^{-\mu_1 t}) + \beta_2(1 - e^{-\mu_2 t}), \quad t > 0, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \bar{G}(t) = \beta_1 e^{-\mu_1 t} + \beta_2 e^{-\mu_2 t}, \quad t > 0 \\ g(t) = \beta_1 \mu_1 e^{-\mu_1 t} + \beta_2 \mu_2 e^{-\mu_2 t}, \quad t > 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2} \end{array} \right.$$

$$h(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\beta_1 \mu_2 + \beta_2 \mu_1) + \mu_1 \mu_2 (\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1)} \left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{\lambda_1 \mu_1} (\lambda_1 + \mu_1)^2 e^{-(\lambda_1 + \mu_1)t} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\lambda_1 \mu_2} (\lambda_1 + \mu_2)^2 e^{-(\lambda_1 + \mu_2)t} + \frac{\alpha_2 \beta_1}{\lambda_2 \mu_1} (\lambda_2 + \mu_1)^2 e^{-(\lambda_2 + \mu_1)t} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\lambda_2 \mu_2} (\lambda_2 + \mu_2)^2 e^{-(\lambda_2 + \mu_2)t} \right]$$



Alors,

$$m = \frac{(\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1) (\beta_1 \mu_2 + \beta_2 \mu_1)}{\lambda_1 \lambda_2 (\beta_1 \mu_2 + \beta_2 \mu_1) + \mu_1 \mu_2 (\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1)}$$

$$E(t^2) = \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2)}{\lambda_1 \lambda_2 (\beta_1 \mu_2 + \beta_2 \mu_1) + \mu_1 \mu_2 (\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1)} \left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{\lambda_1 \mu_1} \frac{2}{\lambda_1 + \mu_1} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\lambda_1 \mu_2} \frac{2}{\lambda_1 + \mu_2} + \frac{\alpha_2 \beta_1}{\lambda_2 \mu_1} \frac{2}{\lambda_2 + \mu_1} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\lambda_2 \mu_2} \frac{2}{\lambda_2 + \mu_2} \right]$$

$$\sigma = \sqrt{E(t^2) - m^2}$$

• Cas 5: (H2) avec (E)

(H2)

$$\begin{cases} F(t) = \alpha_1(1 - e^{-\lambda_1 t}) + \alpha_2(1 - e^{-\lambda_2 t}), t > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \bar{F}(t) = \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t}, t > 0 \\ f(t) = \alpha_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, t > 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \end{cases}$$

(E)

$$\begin{cases} G(t) = 1 - e^{-\mu t}, t > 0 \\ \bar{G}(t) = e^{-\mu t}, t > 0 \\ g(t) = \mu e^{-\mu t}, t > 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{1}{\mu} \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 + \mu(\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1)} [\alpha_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \mu)^2 e^{-(\lambda_1 + \mu)t} + \alpha_2 \lambda_1 (\lambda_2 + \mu)^2 e^{-(\lambda_2 + \mu)t}]$$



Alors,

$$m = \frac{\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 + \mu(\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1)}$$

$$E(t^2) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 + \mu(\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1)} \left[\frac{2\alpha_1 \alpha_2}{\lambda_1 + \mu} + \frac{2\alpha_2 \lambda_1}{\lambda_2 + \mu} \right]$$

$$\sigma = \sqrt{E(t^2) - m^2}$$

• Cas 6: (E) avec (E)

$$(E) \left[\begin{array}{l} F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0 \\ \bar{F}(t) = e^{-\lambda t}, t > 0 \\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{1}{\lambda} \end{array} \right.$$

$$(E) \left[\begin{array}{l} G(t) = 1 - e^{-\mu t}, t > 0 \\ \bar{G}(t) = e^{-\mu t}, t > 0 \\ g(t) = \mu e^{-\mu t}, t > 0 \\ \text{la moyenne} = \frac{1}{\mu} \end{array} \right.$$

$$h(t) = (\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu)t}, t > 0$$

Alors,

$$m = \frac{1}{(\lambda + \mu)} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{1}{(\lambda + \mu)}$$



CDT
Centre de
Développement
Technologique
École Polytechnique
de Montréal

- 64 -

5.2 Programme de simulation GPSS

DCK MBER	*LOC	OPERATION SIMULATE	A, B, C, D, E, F, G, H, I	COMMENTS	STATEME NUMBER
		RMULT	3, 5, 31, 127		2
	LOI1A	FUNCTION	RN2, C37		3
			0, 07, 03, .99, 06, 1.98, .09, 3.01, .12, 4.08, .15, 5.19, .18, 6.35, .21, 7.56		4
			24, 8.82, .27, 10.14, .3, 11.52, .33, 12.97, .36, 14.5, .39, 16.1, .42, 17.8		5
			45, 19.5, .48, 21.5, .51, 23.53, .54, 25.7, .57, 28.03, .6, 30.55, .63, 33.27		6
			66, 36.23, .69, 39.49, .72, 43.1, .75, 47.14, .78, 51.71, .81, 56.99, .84, 63.2		7
			87, 70.74, .9, 80.32, .915, 86.28, .93, 93.43, .945, 102.35, .96, 114.2		8
			975, 131.9, .99, 167.68		9
	LOI1S	FUNCTION	RN3, C37		10
			0, 07, 03, .6, 06, 1.02, .09, 1.38, .12, 1.72, .15, 2.03, .18, 2.34, .21, 2.64		11
			24, 2.93, .27, 3.23, .3, 3.52, .33, 3.82, .36, 4.12, .39, 4.43, .42, 4.75		12
			45, 5.07, .48, 5.4, .51, 5.75, .54, 6.11, .57, 6.49, .6, 6.89, .63, 7.31		13
			66, 7.76, .69, 8.24, .72, 8.76, .75, 9.33, .78, 9.97, .81, 10.69, .84, 11.51		14
			87, 12.5, .9, 13.72, .915, 14.47, .93, 15.35, .945, 16.44, .96, 17.86		15
			975, 19.94, .99, 23.98		16
	LOI2A	FUNCTION	RN4, C37		17
			0, 07, 03, 1.04, .06, 2.08, .09, 3.17, .12, 4.32, .15, 5.51, .18, 6.77, .21, 8.09		18
			24, 9.48, .27, 10.96, .3, 12.52, .33, 14.17, .36, 15.93, .39, 17.82, .42, 19.84		19
			45, 22.02, .48, 24.38, .51, 26.74, .54, 29.74, .57, 32.82, .6, 36.23, .63, 40.02		20
			66, 44.29, .69, 49.13, .72, 54.67, .75, 61.09, .78, 68.64, .81, 77.64		21
			84, 88.61, .87, 102.32, .9, 120.14, .915, 131.38, .93, 144.94, .945, 161.95		22
			96, 184.63, .975, 218.56, .97, 287.2		23
	LOI2S	FUNCTION	RN5, C37		24
			0, 07, 03, .45, .06, .36, .09, 1.25, .12, 1.63, .15, 2, .18, 2.36		25
			21, 2.73, .24, 3.07, .27, 3.46, .3, 3.84, .33, 4.21, .36, 4.6		26
			39, 5, .42, 5.4, .45, 5.82, .48, 6.26, .51, 6.71, .54, 7.18		27
			57, 7.68, .6, 8.2, .63, 8.75, .66, 9.35, .69, 9.99, .72, 10.68, .75, 11.44		28
			78, 12.29, .81, 13.35, .84, 14.35, .87, 15.67, .9, 17.31, .915, 18.32		29
			93, 19.51, .945, 20.98, .96, 22.91, .975, 25.74, .99, 31.26		30
	VVV	VARIABLE	RN1&CH\$FILE		31
		GENERATE	10, FN\$LOI1A		32
		ASSIGN	1, AAB		33
		QUEUE	TOTAL		34
		QUEUE	CLAS1		35
		TABULATE	IATB		36
	AAA	LINK	FILE, FIFO, AAB		37
	AAB	SEIZE	CANAL		38
		DEPART	TOTAL		39
		DEPART	CLAS1		40
		ADVANCE	10, FN\$LOI1S		41
		RELEASE	CANAL		42
		ASSIGN	2, V\$VVV		43
		TEST C	P2, 0, AAD		44
	AAC	UNLINK	FILE, AAA, 1		45
		LOOP	2, AAC		46
	AAD	UNLINK	FILE, XXX, 1		47
		TERMINATE			48
	XXX	TRANSFERT	P, 1		49
		GENERATE	10, FN\$LOI2A		50
		ASSIGN	1, BBB		51
		QUEUE	TOTAL		52
		QUEUE	CLAS2		53
		TABULATE	IATB		54
	BBA	LINK	FILE, FIFO, BBB		55
					56

BBB	SEIZE	CANAL	57
	DEPART	TOTAL	58
	DEPART	CLAS2	59
	ADVANCE	10, FN#LOI2S	60
	RELEASE	CANAL	61
	ASSIGN	2, V#VVV	62
	TEST C	P2, C, BBD	63
BBC	UNLINK	FILE, BBA, 1	64
	LOOP	2, BBC	65
BBD	UNLINK	FILE, XXX, 1	66
	TERMINATE		67
IATB	TABLE	IA, 30, 30, 31	68
UUUU	GTABLE	TOTAL, 10, 10, 21	69
RRRR	GTABLE	CLAS1, 10, 10, 21	70
SSSS	GTABLE	CLAS2, 10, 10, 31	71
	GENERATE	250000	72
	TERMINATE	1	73
	START	1	74
	END		75

 #
 # FACILITIES #
 #

FACILITY	NUMBER ENTRIES	AVERAGE TIME/TRAN	-AVERAGE UTILIZATION DURING-		CURRENT STATUS	PERCENT AVAILABILITY	TRANSACTION NUMBER	
			TOTAL TIME	AVAIL. TIME			UNAVAIL. TIME	SEIZING
CANAL	1257	74.055	.384			100.0	1	

 *
 * QUEUES *
 *

QUEUE	MAXIMUM CONTENTS	AVERAGE CONTENTS	TOTAL ENTRIES	ZERO ENTRIES	PERCENT ZEROS	AVERAGE TIME/TRANS	SAVERAGE TIME/TRANS	TABLE NUMBER	CURRENT CONTENTS
TOTAL	6	.216	1257	765	58.9	41.799	101.906	2	
CLAS1	5	.110	752	465	61.8	36.775	96.358	3	
CLAS2	5	.106	545	300	55.0	48.732	108.400	4	

SAVERAGE TIME/TRANS = AVERAGE TIME/TRANS EXCLUDING ZERO ENTRIES

TABLE LUUU
ENTRIES IN TABLE
1297

MEAN ARGUMENT
41.799

STANDARD DEVIATION
89.000

SUM OF ARGUMENTS
54216.000

NON-WEIGHTED

UPPER LIMIT	OBSERVED FREQUENCY	PER CENT OF TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN	DEVIATION FROM MEAN
10	815	62.83	62.8	37.1	0.239	-0.357
20	45	3.46	66.3	33.6	0.478	-0.244
30	51	3.93	70.2	29.7	0.717	-0.132
40	45	3.46	73.7	26.2	0.956	-0.020
50	34	2.62	76.3	23.6	1.196	0.022
60	27	2.08	78.4	21.5	1.435	0.204
70	32	2.46	80.8	19.1	1.674	0.316
80	26	2.00	82.8	17.1	1.913	0.429
90	21	1.61	84.5	15.4	2.153	0.541
100	18	1.38	85.8	14.1	2.392	0.653
110	21	1.61	87.5	12.4	2.631	0.766
120	14	1.07	88.5	11.4	2.870	0.878
130	16	1.23	89.8	10.1	3.110	0.991
140	15	1.15	90.9	9.0	3.349	1.103
150	6	0.46	91.4	8.5	3.588	1.215
160	13	1.00	92.4	7.5	3.827	1.328
170	9	0.69	93.1	6.8	4.067	1.440
180	6	0.46	93.6	6.3	4.306	1.552
190	8	0.61	94.2	5.7	4.545	1.665
200	3	0.23	94.4	5.5	4.784	1.777
210	4	0.30	94.7	5.2	5.023	1.889
220	5	0.38	95.1	4.8	5.263	2.002
230	5	0.38	95.5	4.4	5.502	2.114
240	1	0.07	95.6	4.3	5.741	2.226
250	4	0.30	95.9	4.0	5.980	2.339
OVERFLOW	53	4.08	100.0	0		
AVERAGE VALUE OF OVERFLOW		377.77				

TABLE RRRR
ENTRIES IN TABLE
752

MEAN ARGUMENT
36.775

STANDARD DEVIATION
78.187

SUM OF ARGUMENTS
27655.000

NON-WEIGHTED

UPPER LIMIT	OBSERVED FREQUENCY	PER CENT CF	TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN	DEVIATION FROM MEAN
10	492	65.42		65.4	34.5	.271	-.342
20	23	3.05		68.4	31.5	.543	-.214
30	31	4.12		72.6	27.3	.815	-.086
40	20	2.65		75.2	24.7	1.087	.041
50	19	2.52		77.7	22.2	1.359	.169
60	19	2.52		80.3	19.6	1.631	.297
70	19	2.52		82.8	17.1	1.903	.424
80	14	1.86		84.7	15.2	2.175	.552
90	14	1.86		86.5	13.4	2.447	.680
100	10	1.32		87.8	12.1	2.719	.808
110	5	.66		88.5	11.4	2.991	.936
120	8	1.06		89.6	10.3	3.263	1.064
130	9	1.19		90.8	9.1	3.534	1.192
140	7	.93		91.7	8.2	3.806	1.320
150	4	.53		92.2	7.7	4.078	1.448
160	9	1.19		93.4	6.5	4.350	1.576
170	4	.53		94.0	5.9	4.622	1.703
180	4	.53		94.5	5.4	4.894	1.831
190	1	.13		95.3	4.6	5.166	1.959
200	1	.13		95.4	4.5	5.438	2.087
210	2	.26		95.7	4.2	5.710	2.215
220	4	.53		96.2	3.7	5.982	2.343
230	1	.13		96.4	3.5	6.254	2.471
240	0	.00		96.4	3.3	6.526	2.599
250	2	.26		96.6	3.0	6.798	2.727
OVERFLOW	25	3.32		100.0	.0		
AVERAGE VALUE OF OVERFLOW		361.03					

TABLE SSSS
ENTRIES IN TABLE
595

	MEAN ARGUMENT 48.732	STANDARD DEVIATION 101.750	SUM OF ARGUMENTS 26559.000	NON-WEIGHTED		
UPPER LIMIT	OBSERVED FREQUENCY	PER CENT OF TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN	DEVIATION FROM MEAN
10	323	59.26	59.2	40.7	.205	-.380
20	22	4.03	63.2	36.6	.410	-.262
30	20	3.66	66.9	33.0	.615	-.184
40	25	4.58	71.5	28.4	.820	-.065
50	15	2.75	74.3	25.6	1.026	.012
60	8	1.46	75.7	24.2	1.231	.110
70	13	2.38	78.1	21.8	1.436	.209
80	12	2.20	80.3	19.6	1.641	.307
90	7	1.28	81.6	18.3	1.846	.405
100	8	1.46	83.1	16.8	2.052	.503
110	16	2.93	86.0	13.9	2.257	.602
120	6	1.10	87.1	12.8	2.462	.700
130	7	1.28	88.4	11.5	2.667	.798
140	8	1.46	89.9	10.0	2.872	.896
150	2	.36	90.2	9.7	3.078	.995
160	4	.73	91.0	8.9	3.283	1.093
170	5	.91	91.9	8.0	3.488	1.191
180	2	.36	92.2	7.7	3.693	1.290
190	2	.36	92.6	7.3	3.898	1.388
200	2	.36	93.0	6.9	4.104	1.486
210	2	.36	93.3	6.6	4.309	1.584
220	1	.18	93.5	6.4	4.514	1.683
230	4	.73	94.3	5.6	4.719	1.781
240	1	.18	94.4	5.5	4.924	1.879
250	2	.36	94.8	5.1	5.130	1.978
OVERFLOW*	28	5.13	100.0	.0		
AVERAGE VALUE OF OVERFLOW		392.71				

 * TABLES *

TABLE IATB
 ENTRIES IN TABLE
 1296

MEAN ARGUMENT
 192.750

STANDARD DEVIATION
 205.375

SUM OF ARGUMENTS
 249805.000

NON-WEIGHTED

UPPER LIMIT	DESERVED FREQUENCY	PER CENT OF TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN	DEVIATION FROM MEAN
30	198	15.27	15.2	84.7	.155	-.792
60	169	13.04	28.3	71.6	.311	-.646
90	150	11.57	39.8	60.1	.466	-.500
120	123	9.49	49.3	50.6	.622	-.354
150	85	6.55	55.9	44.0	.778	-.208
180	80	6.17	62.1	37.8	.933	-.062
210	72	5.55	67.6	32.3	1.089	.083
240	57	4.39	72.0	27.9	1.245	.230
270	60	4.62	76.6	23.3	1.400	.376
300	44	3.39	80.0	19.9	1.556	.522
330	27	2.08	82.1	17.8	1.712	.668
360	29	2.23	84.4	15.5	1.867	.814
390	20	1.54	85.9	14.0	2.023	.960
420	21	1.62	87.5	12.4	2.178	1.106
450	25	1.94	89.1	10.8	2.334	1.252
480	14	1.08	90.2	9.7	2.490	1.398
510	16	1.23	91.4	8.5	2.645	1.544
540	12	.92	92.3	7.6	2.801	1.690
570	19	1.46	93.8	6.1	2.957	1.836
600	15	1.15	94.9	5.0	3.112	1.982
630	12	.92	95.9	4.0	3.268	2.129
660	6	.46	96.3	3.6	3.424	2.275
690	10	.77	97.1	2.8	3.579	2.421
720	3	.23	97.3	2.6	3.735	2.567
750	5	.38	97.7	2.2	3.891	2.713
780	2	.15	97.9	2.0	4.046	2.859
810	2	.15	98.0	1.9	4.202	3.005
840	4	.30	98.3	1.6	4.357	3.151
870	1	.07	98.4	1.5	4.513	3.297
900	3	.23	98.6	1.3	4.669	3.443
OVERFLOW	17	1.31	100.0	.0		
AVERAGE VALUE OF OVERFLOW		1111.35				

6. RÉFÉRENCES

- [1] W. Bux, "Single Server Queues with General Inter-arrival and Phase-Type Service Time Distributions - Computational Algorithms", Proc. 9th Int. Teletraffic Congress, Torremolinos, 1979.
- [2] D.R. Cox and H.D. Miller, "The Theory of Stochastic Processes", London: Methuen & Co. Ltd., 1965.
- [3] D.R. Cox and W.L. Smith, "Queues", London: Methuen & Co. Ltd., 1961.
- [4] A.A. Fredericks, "A Class of Approximations for the Waiting Time Distributions in a $GI|G|1$ Queueing System", Bell Syst. Tech. J., Vol. 61, No. 3, March 1982.
- [5] W. Krämer and M. Lagenbach-Belz, "Approximate Formulae for the Delay in the Queueing System $GI|G|1$ ", Proc. 8th Int. Teletraffic Congress, Melbourne, 1976.
- [6] M.F. Neuts, "Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models", Baltimore: John Hopkins University Press, 1981.

