INTERCOMPARAISON ET FORMATION DES SÉRIES DE MASSES

M. Romanowski et G. Mihailov

Mémoire Technique Numéro 10

Métrologie Légale et Services de Laboratoires

Consommation et Corporations Canada

Consumer and Corporate Affairs Canada

Mémoire Technique Numéro 10

Intercomparaison et Formation des Séries de Masses

par

M. Romanowski et G. Mihailov

Métrologie Légale et
Services de Laboratoires

TABLES DES MATIERES

Intercomparaison et Formation des Séries de Masses

Avant-propos

La tâche de former les multiples et les sous-multiples d'une unité de masse est un des problèmes fondamentaux de la métrologie scientifique et légale. C'est dans la solution des systèmes d'équations qui sont formés lors de la constitution des échelles de masse que la méthode des moindres carrés a trouvé l'une de ses plus frappantes et plus élégantes applications.

Chaque laboratoire de métrologie du monde industrialisé a établi ses propres schémas, basés sur cette méthode, pour effectuer les intercomparaisons et résoudre les équations linéaires qui les accompagnent. A ce point de vue, ceux des pays où le système métrique (donc décimal) avait été adopté dès le début, avaient une tâche plus simple et plus facile que ceux qui, comme le Canada, ont continué à utiliser simultanément plusieurs systèmes différents.

Plusieurs hommes ont joué un rôle éminent dans la formation de la métrologie des masses au Canada. Le premier à mentionner est R.H. Field du Conseil national des recherches, qui dans les années qui précèdent et suivent la deuxième guerre mondiale a contribué si fortement à la formation du laboratoire des masses à la Direction des Normes. Une reconnaissance particulière est due à feu Richard Reynolds, un métrologiste totalement dédié à son activité, dont les procédés, algorithmes et formulaires ont constitué pendant plusieurs décades le fondement des travaux du laboratoire. W.J.S. Fraser chef du laboratoire des étalons a retravaillé et amélioré une bonne partie des travaux de Reynolds et a contribué ainsi à augmenter la qualité des opérations.

Au moment où le pays a commencé à avancer délibérément vers la "métrication" totale, une revision globale et profonde de l'état actuel de la métrologie des masses au Canada a paru être une entre-prise parfaitement justifiable. Le présent travail traite uniquement l'unité SI de masse c.à.d. le kilogramme, ses multiples et sous-multiples.

Tous les calculs décrits ici ont été entièrement refaits en partant des principes fondamentaux de la statistique. Ils ont été conduits jusqu'à leur conclusion logique c.à.d. jusqu'aux expressions des écarts type sur tous les multiples et sous-multiples du kilogramme.

Les auteurs aiment à croire que leur travail est bien sur la ligne d'une déjà longue "tradition" dans le domaine des calibrages des masses au Canada. Ils sont conscients de ce qu'ils doivent à leur prédécesseurs et espèrent que le présent mémorandum jouera, dans les années qui viennent, le rôle d'un centre autour duquel va graviter toute l'activité du Laboratoire des Masses. Ils espèrent aussi qu'il va contribuer à l'avancement du Système Métrique en général.

Note

Le présent mémoire constitue la forme finale de la version précédente (1971) laquelle a été reproduite en un nombre très réduit d'exemplaires et dont l'avant-propos, rédigé par Mr. G. Jones, P. Eng (en ce temps là Senior Engineer-Mass Calibration) avait souligné la nécessité de réviser de temps en temps les procédés pour la formation de l'échelle des masses, dans le but de rester conforme aux exigences de la métrologie moderne.

Depuis 1971, le mémoire provisoire a été en usage dans le Laboratoire des Masses et a été aussi examiné par d'autres métrologistes. La version finale tient compte des commentaires communiqués aux auteurs et de l'expérience du personnel du Laboratoire des Masses, expérience acquise par l'usage constant du mémoire au cours des six dernières années.

Intercomparaison et formation des séries de masses

1. Introduction

Conformément à une résolution de la Première Conférence générale des Poids et Mesures, tenue à Paris en 1889, l'unité de masse dans le système métrique est définie par la masse d'un certain poids cylindrique en platine iridié nommée "Kilogramme International" (KI). La masse de KI est donc, par définition, égale à 1 kg. Cet étalon est déposé au Bureau International des Poids et Mesures à Sèvres (France). L'unité "kg" fait maintenant partie intégrante du système international des unités désigné par le symbole SI.

Il est évident que la définition d'une unité importante par un objet matériel unique présente plusieurs points faibles. Pour cette raison, le Kilogramme International est incorporé dans un groupe de poids (de type et qualité identiques), et la définition ci-dessus est considérée comme valide aussi longtemps que les intercomparaisons entre les membres du groupe confirment la constance de la masse du Kilogramme International.

Le Kilogramme International est utilisé seulement au cours d'opérations métrologiques exceptionnellement importantes; ainsi depuis 1889, il n'a été touché qu'après la fin de la seconde guerre mondiale. Sa constance et, en général, la constance de tous les étalons en platine iridié a toujours été trouvée extrêmement satisfaisante.

La plupart des anciennes nations du monde possèdent une copie nationale de KI. Les équations des copies sont vérifiées périodiquement au Bureau International en fonction du Kilogramme International et de ses témoins. L'étalon canadien national est gardé par le Conseil National de Recherche, Division de Physique. Toutes les autres unités légales au Canada sont définies en fonction du KI.

Il y a toujours eu un fort désir légitime parmi la majorité des physiciens et des métrologistes de remplacer des prototypes matériels par ce qu'on appelle "étalons naturels". Alors que leurs efforts ont eu du succès dans le domaine de l'unité de longueur (mètre), aucune méthode n'a encore été suggérée pour constituer une véritable unité de masse "naturelle". Le Kilogramme International actuel devra donc très probablement jouer son rôle fondamental pendant encore bien des années.

Le but de ce mémorandum est la comparaison des masses nominalement égales; il sert d'introduction à des méthodes destinées à constituer des étalons de masse autres que "un kg". Les méthodes décrites sont généralement exécutées au moyen des balances à bras égaux de la plus haute qualité et sensibilité.

L'idée que la comparaison des masses (particulièrement dans le but de constituer des "séries") puisse être faite seulement avec l'aide de méthodes statistiques n'est pas absolument justifiée; cependant il faut reconnaître que l'emploi de la méthode des moindres carrés est si commode qu'aucune métrologie de masse ne peut actuellement se concevoir sans cette méthode. Elle procure d'utiles vérifications, augmente la précision et permet une estimation de la précision globale des résultats obtenus. Une de ses caractéristiques importantes est aussi d'éliminer toute possibilité d'opérations arbitraires; il suffit donc de mentionner qu'une opération a été conduite conformément à la méthode des moindres carrés pour être sur qu'une ambiguïté quelconque (dans les expériences et les calculs) est totalement exclue.

Considérons donc le problème fondamental de la comparaison de masses du point de vue d'un métrologiste qui possède dans son laboratoire un représentant du Kilogramme International et qui doit établir les méthodes pour constituer

a) d'autres poids nominalement égaux à 1 kg,

b) des poids de multiples de 1 kg,

c) des poids de sous-multiples de 1 kg.

Les trois cas seront traités successivement et l'on montrera comment la méthode des moindres carrés aide le métrologiste à obtenir la plus haute précision. Dans les sections suivantes, l'étalon représentant KI sera désigné par le symbole RK, et sa masse par le symbole S.

2. Etalonnage des masses nominalement égales

Bien qu'il soit pratiquement impossible de fabriquer un étalon qui soit exactement égal à un autre étalon, il est possible de faire des étalons qui sont si proches, l'un de l'autre que toutes les intercomparaisons peuvent être executées, même sur la balance la plus sensible, sans l'aide de masses additionnelles. La seule masse auxiliaire nécessaire et sans laquelle aucune pesée n'est possible est une "masse de sensibilité" appropriée, par exemple de 1 ou $\frac{1}{2}$ milligramme.

L'opération la plus simple est de construire et d'ajuster un seul poids et de le comparer à RK. En répétant la comparaison plusieurs fois, nous obtenons quelque information concernant la précision des opérations, particulièrement si les pesées sont faites dans des conditions un peu différentes de température, d'humidité, etc. Avec trois poids (c'est-à-dire le RK et deux copies) nous pouvons constituer une relation additionnelle, c'est-à-dire celle qui est obtenue par l'intercomparaison des deux copies. Cette équation peut être considérée comme une simple vérification (mais non prise en considération), ou bien elle peut être incorporée dans le calcul des inconnues par la méthode des moindres carrés.

Lorsque deux poids nominalement égaux sont intercomparés (deux à deux, le nombre des équations supplémentaires augmente rapidement avec n. Si nous avons (n - 1) poids à étalonner par rapport à RK, nous devons avoir n - 1 équations; d'un autre côté le nombre des intercomparaisons possibles de n étalons pris deux à deux est égal à $N = n(n - 1)/2$. Par exemple, avec 5 poids nous pouvons faire 10 intercomparaisons dont 6 sont additionnelles; avec 6 poids nous aurions N = 15 avec 10 additionnelles.

La méthode des moindres carrés sera maintenant appliquée au cas où le nombre des poids est égal à cinq; le système des équations est alors relativement réduit mais les caractéristiques générales de sa structure interne peuvent être perçues facilement. Supposons que les symboles U, V, X, Y, Z représentent les masses de poids, Z étant par définition la masse de RK. Le résultat d'une intercomparaison de, par exemple, V et Y peut être représenté par une relation linéaire générale de forme.

$$V - Y = m_i \tag{1}$$

Elle correspond à i = 6 dans la table (2) qui contient toutes les combinaisons possibles de cinq poids pri deux à deux. L'indice "i" prend toutes les valeurs allant de 1 à 10.

EQUATIONS DE CONDITION

$$\begin{array}{lllllll}
U & - V & & & & = m_1 \\
U & & - X & & & = m_2 \\
U & & & - Y & & = m_3 \\
U & & & & - Z & = m_4 \\
& V & - X & & & = m_5 \\
& V & & - Y & & = m_6 \\
& V & & & - Z & = m_7 \\
& & X & - Y & & = m_8 \\
& & X & & - Z & = m_9 \\
& & & Y & - Z & = m_{10}
\end{array} \tag{2}$$

Ce système ne présente pas de solution au strict sens mathématique à cause des erreurs accidentales qui peuvent affecter les valeurs observées m_i. N'importe quel système partiel de quatre équations prises dans (2) a une solution bien définie pourvu qu'il soit complété par une équation de définition (qui joue le rôle de cinquième équation dans le système partiel).

Cette équation de définition est ici

$$Z = S . \qquad (3)$$

Le système partiel le plus simple est naturellement:

$$U = Z + m_4 = S + m_4,$$
$$V = Z + m_7 = S + m_7,$$
$$X = Z + m_9 = S + m_9,$$
$$Y = Z + m_{10} = S + m_{10}.$$

Ces valeurs ne sont pas influencées par les résultats de toutes les autres intercomparaisons (m_1, m_2, m_3, m_5, m_6, m_8). Pour résoudre le système (2) par la méthode des moindres carrés, il est préférable de négliger le fait que Z a un sens spécial; c'est ainsi que la forme de l'équation de définition n'est pas spécifiée à l'avance et que toutes les quantités, U,V,X,Y,Z sont d'abord traités de la même manière; le calcul est conduit d'une manière "symétrique" et le fait que Z = S n'est pris en considération qu'à la fin du calcul.

Les équations normales des équations de condition (2) forment le système (4)

Equations normales (forme générale)

$$\begin{aligned}
(AA)U + (AB)V + (AC)X + (AD)Y + (AE)Z &= (Am)\\
(BA)U + (BB)V + (BC)X + (BD)Y + (BE)Z &= (Bm)\\
(CA)U + (CB)V + (CC)X + (CD)Y + (CE)Z &= (Cm)\\
(DA)U + (DB)V + (DC)X + (DD)Y + (DE)Z &= (Dm)\\
(EA)U + (EB)V + (EC)X + (ED)Y + (EE)Z &= (Em)
\end{aligned} \qquad (4)$$

où

$$(AA) = A^2_1 + A^2_2 + A^2_3 - \text{--------}+ A^2_{10},$$
$$(AB) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 - \text{-----}+ A_{10}B_{10}, \text{ etc.}$$

La première équation est l'équation normale en U, la seconde équation est l'équation en V, etc. Conformément à une règle classique, l'équation normale en une certaine variable, par exemple U, se forme <u>en ajoutant toutes les équations de condition après avoir multiplié chacune d'elles par son propre coefficient de U.</u> Le système (2) donnera:

$$\begin{aligned}
4U - V - X - Y - Z &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = N_1 \\
-U + 4V - X - Y - Z &= -m_1 + m_5 + m_6 + m_7 = N_2 \\
-U - V + 4X - Y - Z &= -m_2 - m_5 + m_8 + m_9 = N_3 \\
-U - V - X + 4Y - Z &= -m_3 - m_6 - m_8 + m_{10} = N_4 \\
-U - V - X - Y + 4Z &= -m_4 - m_7 - m_9 - m_{10} = N_5
\end{aligned} \tag{5}$$

Le lecteur peut facilement vérifier que le déterminant de (5) est égal à zéro:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Ceci confirme que le système (5) n'a pas de solution unique, à moins qu'une équation de définition appropriée ne lui soit ajoutée, par exemple une relation telle que (3).

Le système (5) est facile à résoudre, et sa solution peut être mise sous une forme qui est très commode pour les calculs numériques; on obtient cette forme par l'introduction de la quantité auxiliaire

$$M = 1/5\ (U + V + X + Y + Z). \tag{6}$$

Le résultat final est

$$\begin{aligned}
5U &= 5M + N_1, & U &= M + N_1/5, \\
5V &= 5M + N_2, & V &= M + N_2/5, \\
5X &= 5M + N_3, & X &= M + N_3/5, \\
5Y &= 5M + N_4, & Y &= M + N_4/5, \\
5Z &= 5M + N_5. & Z &= M + N_5/5.
\end{aligned} \tag{7}$$

Si l'équation de définition (3) est prise en considération, on obtient

$$M = S - N_5/5 \tag{8}$$

d'où

$$\begin{aligned} U &= S + (N_1 - N_5)/5, \\ V &= S + (N_2 - N_5)/5, \\ X &= S + (N_3 - N_5)/5, \\ Y &= S + (N_4 - N_5)/5, \\ Z &= S + (N_5 - N_5)/5 = S. \end{aligned} \tag{9}$$

Le calcul des termes de droite des équations normales (5) est généralement effectué au moyen de la table suivante

	U	V	X	Y	Z
- U	0	$-m_1$	$-m_2$	$-m_3$	$-m_4$
- V	m_1	0	$-m_5$	$-m_6$	$-m_7$
- X	m_2	m_5	0	$-m_8$	$-m_9$
- Y	m_3	m_6	m_8	0	$-m_{10}$
- Z	m_4	m_7	m_9	m_{10}	0
Sommes	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
	$N_1/5$	$N_2/5$	$N_3/5$	$N_4/5$	$N_5/5$

(10)

Les valeurs calculées m_i' des quantités observées m_i s'établissent à partir de la dernière ligne de (10)

$$\begin{aligned} m_i' &= (N_1-N_2)/5, & m_6' &= (N_2-N_4)/5, \\ m_2' &= (N_1-N_3)/5, & m_7' &= (N_2-N_5)/5, \\ m_3' &= (N_1-N_4)/5, & m_8' &= (N_3-N_4)/5, \\ m_4' &= (N_1-N_5)/5, & m_9' &= (N_3-N_5)/5, \\ m_5' &= (N_2-N_3)/5. & m_{10}' &= (N_4-N_5)/5. \end{aligned} \tag{11}$$

Ces valeurs doivent être introduites dans les cases appropriées de la table (10). La différence (Valeur observée - Valeur théorique) dans chaque case s'appelle écart résiduel ou simplement "résidu". Les sommes des résidus dans chaque colonne et dans chaque ligne de (10) doivent être égales à zéro.

Le calcul des écarts types se fait maintenant comme suit. Appelant v_i le résidu

$$v_i = m_i - m_i' , \qquad i = 1, 2, --- 10 \tag{12}$$

Nous obtenons

$$(vv) = \Sigma v_i^2 , \tag{13}$$

et

$$s_m^2 = \frac{(vv)}{10-4} = \frac{(vv)}{6} ,$$

$$s_m = \sqrt{\frac{(vv)}{6}} . \tag{14}$$

10 = le nombre des intercomparaisons, 4 = le nombre des quantités inconnues: U, V, X, Y.

s_m se nomme "écart type de groupe". D'après la théorie des probabilités, il y a 68% de chance pour que le résidu d'une seule intercomparaison de deux masses quelconques, prises dans la suite U, V, X, Y, Z, se trouve entre les limites $\pm$ s_m.

On calcule les écarts types de masses individuelles d'après les équations (9), par exemple:

$$U = S + 1/5 \; (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_4 + m_7 + m_9 + m_{10}).$$

D'après la théorie de la progression de la variance

$$s_U^2 = s_S^2 + (1/5)^2 8 s_m^2 = s_S^2 + 8/25 . s_m^2 . \tag{15}$$

Si S a été déterminé en fonction de KI dans un autre laboratoire, son certificat devrait mentionner l'écart type S_5. Si ce dernier est beaucoup plus petit que s_m on peut le négliger.

Alors

$$s_U^2 = 8/25. s_m^2 \ ,$$

$$s_U = 0.56. s_m \ . \qquad (16)$$

Si l'ordre de grandeur de s_S est semblable à celui de s_m, il faut appliquer la formule complète (15).

Les formules ci-dessus s'appliquent à toutes les masses intercomparées

$$s_U = s_V = s_X = s_Y \ . \qquad (17)$$

On trouvera des exemples de ces opérations dans l'Appendice I.

L'un des cas le plus souvent rencontré est celui de trois masses nominalement égales, X, Y, Z. Nous avons maintenant:

	X	Y	Z
- X	0	$-m_1$	$-m_2$
- Y	m_1	0	$-m_3$
- Z	m_2	m_3	0
	N_1	N_2	N_3
	$N_1/3$	$N_2/3$	$N_3/3$

<u>Equation de condition</u>

$$\begin{aligned} X - Y \quad &= m_1 \\ X \quad - Z &= m_2 \\ Y - Z &= m_3 \end{aligned}$$

<u>Equations normales</u>

$$\begin{aligned} 2X - Y - Z &= m_1 + m_2 = N_1 \\ -X + 2Y - Z &= m_1 + m_3 = N_2 \\ -X - Y + 2Z &= m_2 - m_3 = N_3 \end{aligned}$$

Si

$$M = 1/3 \cdot (X + Y + Z)$$

alors, comme dans (7),

$$X = S + N_1/3 ,$$

$$Y = S + N_2/3 ,$$

$$Z = S + N_3/3 ,$$

et, si Z représente l'étalon de référence $(Z = S)$,

$$M = S - N_3/3 ;$$

et par conséquent

$$X = S + (N_1 - N_3)/3 ,$$
$$Y = S + (N_2 - N_3)/3 .$$

Les valeurs calculées des quantités observées sont:

$$m_i' = (N_1 - N_2)/3 ,$$
$$m_2' = (N_1 - N_3)/3 ,$$
$$m_3' = (N_2 - N_3)/3 ,$$

et l'écart type s_m est:

$$s_m^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{3 - 2} = (m_1 - m_1')^2 + (m_2 - m_2')^2 + (m_3 - m_3')^2;$$

comme

$$X = S + (m_1 + m_2 + m_2 + m_3)/3 ,$$

alors

$$s_x^2 = s_S^2 + 4/9.s_m^2.$$

Si s_S^2 est négligeable, alors, approximativement $S_x = 2/3\ s_m$.

En construisant dix poids (dont l'un peut être le RK), nous pouvons par le procédé décrit ici constituer progressivement l'échelle décimale complète des multiples du kilogramme. En construisant dix masses nominalement égales de un dixième d'un kilogramme chacune et en comparant leur somme au RK, il est aussi possible de constituer les sous-multiples, c'est-à-dire 100, 200... g. Ces procédés ne sont pas employés en métrologie parce qu'ils nécessitent trop de poids individuels que l'on ne peut pas facilement placer sur les plateaux ni manipuler en toute sécurité pendant les comparaisons. Les méthodes employées présentement sont indiquées dans la section suivante.

3. Etalonnage des sous-multiples et des multiples de l'unité de masse.

Une des séries de poids que l'on emploie le plus souvent pour constituer a) des multiples et b) des sous-multiples du kilogramme est basée sur la série 5, 2, 2, 1, 1. La suite des intercomparaisons à laquelle mène cette série est, en fait, exactement la même en a) et en b) et se trouve ci-dessous en (22).

Les vraies valeurs des poids seront désignées par les chiffres entre parenthèses, par exemple, (5) peut désigner la vraie valeur d'un poids dont la valeur nominale est de 5kg. Nous aurons ainsi*:

a) (5), (2), (2'), (1), (1) en kilogrammes

b) (500), (200), (200'), (100), (100) en grammes.

L'influence de l'équation de définition, qui n'est pas la même en a) et en b), sera examinée plus tard;

Les cinq inconnues étant:

$$U = (5), \quad V = (2), \quad X = (2'), \quad Y = (1), \quad Z = (1'), \qquad (18)$$

la forme générale d'une équation linéaire de condition sera:

$$AU + BV + CX + DY + EZ = M_1 \qquad (19)$$

Par exemple, si $U = (5)$ est comparé avec la somme

$$V + X + Y = (2) + (2') + (1)_1$$

alors

$$A_1 = 1, \quad B_1 = -1, \quad C_1 = -1, \quad D_1 = -1, \quad E = 0 \qquad (20)$$

Nous avons ainsi

$$(5) - (2) - (2') - (1) = m \text{ (mesuré)} \qquad (21)$$

---

* Une autre série fréquemment employée est 5, 3, 2, 1, 1. Elle se trouve traitée dans un mémorandum séparé (no 11), en rapport avec d'autres systèmes de poids.

Avec les inconnues U, V, X, Y, Z, il est possible d'effectuer les huit comparaisons suivantes:

(5)		contre	(2) + (2') + (1)
(5)		"	(2) + (2') + (1')
(2)	+ (1)	"	(2') + (1')
(2)	+ (1')	"	(2') + (1)
(2)		"	(2')
(2)		"	(1) + (1')
(2')		"	(1) + (1')
(1)		"	(1')

Elles mènent au système:

Equations de condition

$$
\begin{array}{rrrrrl}
+(5) & -(2) & -(2') & -(1) & & = m_1 \\
+(5) & -(2) & -(2') & & -(1') & = m_2 \\
 & +(2) & -(2') & +(1) & -(1') & = m_3 \\
 & +(2) & -(2') & -(1) & +(1') & = m_4 \\
 & +(2) & -(2') & & & = m_5 \\
 & +(2) & & -(1) & -(1') & = m_6 \\
 & & +(2') & -(1) & -(1') & = m_7 \\
 & & & +(1) & -(1') & = m_8,
\end{array}
\qquad (22)
$$

et à

Equations normales

$$
\begin{array}{rrrrrl}
+2(5) & -2(2) & -2(2') & -\ (1) & -\ (1') & = N_1 \\
-2(5) & +6(2) & -2(2') & & & = N_2 \\
-2(5) & -\ (2) & +6(2') & & & = N_3 \\
-\ (5) & & & +6(1) & -\ (1') & = N_4 \\
-\ (5) & & & -\ (1) & +6(1') & = N_5
\end{array}
\qquad (23)
$$

avec
$$
\begin{aligned}
N_1 &= + m_1 + m_2, \\
N_2 &= - m_1 - m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6, \\
N_3 &= - m_1 - m_2 - m_3 - m_4 - m_5 + m_7, \\
N_4 &= - m_1 + m_3 - m_4 - m_6 - m_7 + m_8, \\
N_5 &= - m_2 - m_3 + m_4 - m_6 - m_7 - m_8.
\end{aligned}
\qquad (24)
$$

Ce système, comme le système (5) n'a pas de solution unique parce que l'une des équations est supplémentaire, c'est-à-dire est une combinaison linéaire des quatre autres équations. Il est facile de vérifier que le déterminant de (23) est égal à zéro et qu'il y a la relation linéaire suivante

$$5N + 2N_2 + 2N_3 + N_4 + N_5 = 0. \qquad (25)$$

En guise d'exercice, il est recommandé d'exécuter tous les calculs en substituant dans (25) les termes de gauche et de droite de (23) et de (24).

Le traitement algébrique du système (23) dépendra beaucoup de l'adoption de l'une ou de l'autre des deux équations suivantes comme équation additionnelle:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} & (5) + (2) + (2') + (1) = M. \\ \text{B)} & (1') = M. \end{array} \qquad (26)$$

M étant nominalement égal à un kilogramme, il n'est pas nécessaire d'exécuter deux opérations algébriques distinctes: on peut transformer un système de solutions en un autre système semblable. (Voir note à la fin de l'Appendice 3).

A. <u>Etalonnage des sous-multiples</u>.

Cette opération est basée sur les équations (22), (23), (24), combinées avec l'équation de définition A. Elle peut se mettre sous la forme d'un simple algorithme menant directement aux solutions qui sont données dans (28). L'algorithme et un exemple sont présentés dans l'Appendice 2.

Le système à résoudre est donc

$$\begin{array}{rrrrrl} +2(5) & -2(2) & -2(2') & -(1) & -(1') & = N_1 \\ -2(5) & +6(2) & -(2') & & & = N_2 \\ -2(5) & -(2) & +6(2') & & & = N_3 \\ -(5) & & & +6(1) & -(1)' & = N_4 \\ -(5) & & & -(1) & +6(1') & = N_5 \\ +(5) & +(2) & +(2') & +(1) & & = M. \end{array} \qquad (27)$$

dans lequel les quantités N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 sont interconnectées par l'équation (25). Le déterminant du système de cinq équations, dont les seconds termes sont N_1, N_2, N_3, N_4, M (la cinquième équation étant omise), n'est pas égal à zéro: ce système a donc une solution bien définie.

La méthode d'élimination appliquée à (27) ne présente pas de difficultés pourvu que l'on exécute les calculs de manière méthodique. Ils mènent aux solutions

$$
\begin{aligned}
(5) &= M/2 + 1/28\ (7N_1 - N_4 + N_5) = M/2 + 1/28.S_1,\\
(2) &= M/5 + 1/35\ (N_1 + 5N_2 - N_4) = M/5 + 1/35.S_2,\\
(2) &= M/5 + 1/35\ (N_1 + 5N_3 - N_4) = M/5 + 1/35.S_3,\\
(1) &= M/10 + 1/140\ (7N_1 + 23N_4 + 5N_5) = M/10 + 1/140.S_4,\\
(1^1) &= M/10 + 1/140\ (7N_1 + 3N_4 + 25N_5) = M/10 + 1/140.S_5,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

dans lesquelles S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 sont exprimés directement en fonction des valeurs observées m_i:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= +\ 8m_1 + 6m_2 - 2m_3 + 2m_4 - 2m_8,\\
S_2 &= -\ 3m_1 - 4m_2 + 4m_3 + 6m_4 + 5m_5 + 6m_6 + m_7 - m_8,\\
S_3 &= -\ 3m_1 - 4m_2 - 6m_3 - 4m_4 - 5m_5 + m_6 + 6m_7 - m_8,\\
S_4 &= -\ 16m_1 + 2m_2 + 18m_3 - 18m_4 - \quad - 28m_6 - 28m_7 + 18m_8,\\
S_5 &= +\ 4m_1 - 18m_2 - 22m_3 + 22m_4 - 28m_6 - 28m_7 - 22m_8.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Pour la détermination des sous-multiples, les symboles (5), (2), (1) etc. désignent les masses en fait égales à 0, 5, 0, 2, 0, 1 kg, ou (500), (200), (100) en grammes. L'algorithme et un exemple se trouvent dans l'Appendice 2. Le poids "additionnel" (100') joue généralement un rôle important dans les opérations suivantes; dans ce but, il se compose des poids suivants:

50 g, 20 g, 20' g, 10 g,

dont la somme est égale à 100 g. De là

$$\Sigma(100) = (50) + (20) + (20') + (10),$$

nous pouvons écrire

$$\Sigma(100) = M' \tag{30}$$

et considérer cette relation comme l'équation de définition qui est nécessaire pour continuer l'étalonnage des quantités inférieures à l'unité. Cet étalonnage nécessitera naturellement un poids additionnel (10') qui, à son tour, sera considéré comme fournissant la troisième équation de définition du type

$$\Sigma\,(10) = M''. \qquad (31)$$

Pour couvrir toute la série des sous-multiples, les suites de poids qui sont nécessaires sont énumérées dans la table suivante. Au point de vue expérimental, toute l'opération nécessite quatre types de balances.

Table

I. Au-dessus de un gramme

$$\Sigma\,(1000) = M,$$

(500), (200), (200'), (100), (100'); $(100') = \Sigma\,(100) = M'$.
(50), (20), (20'), (10), (10'); $(10') = \Sigma\,(10) = M''$.
(5), (2), (2'), (1), (1'); $(1') = \Sigma\,(1) = M'''$.

II. En-dessous de un gramme

$$\Sigma\,(1000) = M'''.$$

(500), (200), (200'), (100), (100'); $(100') = \Sigma\,(100) = M^{iv}$.
(50), (20), (20'), (10), (10'); $(10') = \Sigma\,(10) = M^{v}$.
(5), (2), (2'), (1), (1') .

Un poids de 1 mg ne peut pas être subdivisé en poids invidivuels plus petits: (1') est un poids d'une seule pièce.

L'observateur devrait toujours vérifier que les valeurs (numériques) (29) satisfont avec une haute précision les équations normales (27). Ces valeurs ne pourront pas satisfaire ces équations de condition, du moins pas rigoureusement. Ceci mène au calcul des "résidus" conformément aux définitions (36).

B. Etalonnage des multiples.

Nous allons maintenant passer à l'étalonnage des multiples; il faut en premier lieu, fabriquer des poids dont les masses sont nominalement égales à 2 kg et à 5 kg pour former la suite

(5), (2), (2'), (1), (1')....................en kilogrammes

Le système des équations de condition est identique à (22) et le système des équations normales est identique à (23). Cependant l'équation de définition n'est pas (26)A mais. (26)B, c'est-à-dire

$$(1') = M \tag{32}$$

Ce M doit être introduit dans le système des équations normales (23) et, comme les équations de ce cernier sont interconnectées par la relation (25), l'une des équations de (23) peut être remplacée par (30). Le système, dont le principal déterminant n'est pas égal à zéro, et qui mènera à des valeurs concrètes des inconnues individuelles en fonction de M, est par exemple:

$$\begin{aligned}
2(5) - 2(2) - 2(2') - (1) &= N_1 + M \\
-2(5) + 6(2) - (2') &= N_2 \\
-2(5) - (2) + 6(2') &= N_3 \\
-(5) + 6(1) &= N_4 + M.
\end{aligned} \tag{33}$$

Les solutions sont

$$\begin{aligned}
(5) &= 5M + S_1/7, \\
(2) &= 2M + S_2/7, \\
(2') &= 2M + S_3/7, \\
(1) &= M + S_4/7,
\end{aligned} \tag{34}$$

avec

$$\begin{aligned}
S_1 &= + m_1 + 6m_2 + 5m_3 - 5m_4 + 7m_6 + 7m_7 + 5m_8, \\
S_2 &= - m_1 + m_2 + 3m_3 - m_4 + m_5 + 4m_6 + 3m_7 + 2m_8, \\
S_3 &= - m_1 + m_2 + m_3 - 3m_4 - m_5 + 3m_6 + 4m_7 + 2m_8, \\
S_4 &= - m_1 + m_2 + 2m_3 - 2m_4 + 2m_8.
\end{aligned} \tag{35}$$

L'algorithme et un exemple numérique sont donnés dans l'Appendice 3.

Considérant la masse de la somme (5) + (2) + (2') + (1) comme la définition de la masse (10'), le lecteur n'éprouvera pas de difficulté à accomplir la deuxième étape, c'est-à-dire à calibrer les masses de la suite

(50), (20), (20'), (10), (10')..............en kilogrammes.

C. <u>Calcul des écarts types</u>

Le calcul de ce que l'on appelle "écart type de groupe" s_m (tel qu'il est défini dans la section précédente) est le même dans le cas de sous-multiples que dans le cas des multiples. Si, par exemple, nous considérons les solutions (28), nous savons qu'elles satisfont rigoureusement les équations normales (27), mais ne satisfont pas rigoureusement les équations de condition (22). Si par exemple l'expression

$$(5) - (2) - (2') - (1)$$

est formée au moyen des valeurs données par (28), le résultat sera égal non pas exactement à m_1 (première équation de (22)), mais égal à une valeur légèrement différente m_1'. La différence $m_1 - m_1'$ s'appelle le résidu v_1 de la première opération:

$$v_1 = m_1 - m_1' .$$

Comme ci-dessus, un résidu indique toujours la différence:

"résidu" = valeur observée - valeur calculée.

Les équations (22) fournissent huit résidus v_1, $v_2 \ldots v_8$ qui sont traités de la même manière que ceux de la section 2. Nous calculons d'abord la somme de leurs carrés

$$(vv) = \sum_i v_i^2,$$

et l'écart type de groupe s_m, par

$$s_m = \sqrt{\frac{(vv)}{8-4}} = \sqrt{\frac{(vv)}{4}}.$$

Il faut remarquer que le dénominateur (8 - 4) correspond à la différence: nombre des équations de condition - nombre des équations normales indépendantes. Le lecteur doit toujours se souvenir de la présence du terme "indépendant". C'est ainsi qu'une des équations normales est exclue du compte. Le nombre des équations normales indépendantes est égal au nombre des inconnues indépendantes; ce nombre est égal à 4 parce que ou bien

a) (1') est donné directement en fonction de RK, ou bien

b) la relation 26, A) exprime l'une des inconnues en fonction des trois autres et de RK.

Pour calculer les écart-types sur des poids individuels, nous devons employer les équations (28) et (29) pour les sous-multiples, l'équation (36) pour les multiples.

Conformément au théorème de propagation de variance, le calcul des écart-types se fait comme suit:

A. Appelons s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 les écart-types sur S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, respectivement. Par exemple, par (29) première ligne,

$$s_1^2 = (8^2 + 6^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2)s_m^2,$$

$$s_1^2 = 112s_m^2;$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
s_{(5)}^2 &= (1/2)^2 s_M^2 + (1/28)^2 \times 112 s_m^2 = 0.25 s_M^2 + 0.14_3 s_m^2,\\
s_{(2)}^2 &= (1/5)^2 s_M^2 + (1/35)^2 \times 140 s_m^2 = 0.04 s_M^2 + 0.11_4 s_m^2,\\
s_{(2')}^2 &= (1/5)^2 s_M^2 + (1/35)^2 \times 140 s_m^2 = 0.04 s_M^2 + 0.11_4 s_m^2,\\
s_{(1)}^2 &= (1/10)^2 s_M^2 + (1/10)^2 \times 2836 s_m^2 = 0.01 s_M^2 + 0.14\, s_m^2,\\
s_{(1')}^2 &= (1/10)^2 s_M^2 + (1/10)^2 \times 3360 s_m^2 = 0.01 s_M^2 + 0.17\, s_m^2.
\end{aligned} \tag{36}$$

s_M est l'écart-type dans la détermination de M en fonction du KI. Dans les premières étapes vers les valeurs inférieures au kilogramme, c'est-à-dire quand M = 1000 gr., la valeur de s_M est déduite des opérations au moyen desquelles la veleur de M a été établie. Tel est le cas si M a été inclus dans une intercomparaison de kilogrammes (Section 2). Dans les étapes suivantes, c'est-à-dire si M est nominalement égal à 100 g, M représente (100'), donc $s_M = s_{(1')} = s_{(100')}$.

B. De (34) et (35), nous obtenons:

$$
\begin{aligned}
s^2_{(5)} &= 25s^2_M + 210/49.s^2_m = 25s^2_M + 4.28_6 s^2_m,\\
s^2_{(2)} &= 4s^2_M + 42/49.s^2_m = 4s^2_M + 0.85_7 s^2_m,\\
s^2_{(2')} &= 4s^2_M + 42/49.s^2_m = 4s^2_M + 0.85_7 s^2_m,\\
s^2_{(1)} &= s^2_M + 14/49.s^2_m = s^2_M + 0.28_6 s^2_m.
\end{aligned}
$$

Appendice I

Intercomparaison de masses égales

Une intercomparaison de cinq masses de un kilogramme a donné les équations de condition suivantes (2).

$$
\begin{array}{lllllcrl}
U & - V & & & & = & -69.52 & \times 10^{-6}\ \text{kg} \\
U & & - X & & & = & -68.88 & \text{"} \\
U & & & - Y & & = & -63.60 & \text{"} \\
U & & & & - Z & = & -69.68 & \text{"} \\
 & V & - X & & & = & +\ 0.64 & \text{"} \\
 & V & & - Y & & = & +\ 5.80 & \text{"} \\
 & V & & & - Z & = & -\ 0.48 & \text{"} \\
 & & X & - Y & & = & +\ 4.68 & \text{"} \\
 & & X & & - Z & = & -\ 1.28 & \text{"} \\
 & & & Y & - Z & = & -\ 6.44 & \text{"}
\end{array}
$$

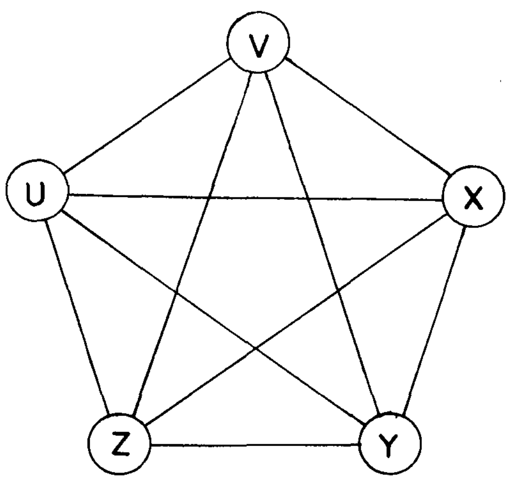

Schéma des intercomparaisons de
cinq poids dans toutes les combinaisons possibles

Ces équations se résolvent d'après la Table (10) Le premier nombre dans chaque cas est la valeur observée, le second (entre parenthèses) est la valeur calculée m' (11), le troisième est le résidu (12). L'unité est 10^{-6} kg (milligramme).

	U	V	X	Y	Z
-U	0	+69.52 (+69.43) + 0.09	+68.88 (+68.67) + 0.21	+63.60 (+63.68) - 0.08	+69.68 (+69.92) - 0.24
-V	-69.52 (-69.43) - 0.09	0	- 0.64 (- 0.76) + 0.12	- 5.80 (- 5.75) - 0.05	+ 0.84 (+ 0.49) - 0.01
-X	-68.88 (-68.67) - 0.21	+ 0.64 (+ 0.76) - 0.12	0	- 4.68 (- 4.99) + 0.31	+ 1.28 (+ 1.25) + 0.03
-Y	-63.60 (-63.68) + 0.08	+ 5.80 (+ 5.75) + 0.05	+ 4.68 (+ 4.99) - 0.31	0	+ 6.44 (+ 6.24) + 0.20
-Z	-69.98 (-69.92) + 0.24	- 0.48 (- 0.49) + 0.01	- 1.28 (- 1.25) - 0.03	- 6.44 (- 6.24) - 0.20	0
N -	-271.68	+75.48	+71.64	+46.68	+77.88
N/5 -	- 54.34	+15.09	+14.33	+ 9.34	+15.58

$N_1 = -271.62$, $N_1/5 = -54.34$, $U = M - 54.34$,

$N_2 = +75.48$, $N_2/5 = +15.09$, $V = M + 15.09$,

$N_3 = +71.64$, $N_3/5 = +14.33$, $X = M + 14.33$,

$N_4 = +46.68$, $N_4/5 = +9.34$, $Y = M + 9.34$,

$N_5 = +77.88$, $N_5/5 = +15.58$, $Z = M + 15.58$.

La somme des carrés des résidus se calcule comme suit:

$$
\begin{aligned}
(v_1)^2 &= (-0.09)^2 = 0.0081\\
(v_2)^2 &= (-0.21)^2 = 0.0441\\
(v_3)^2 &= (+0.08)^2 = 0.0064\\
(v_4)^2 &= (+0.24)^2 = 0.0576\\
(v_5)^2 &= (-0.12)^2 = 0.0144\\
(v_6)^2 &= (+0.05)^2 = 0.0025\\
(v_7)^2 &= (+0.01)^2 = 0.0001\\
(v_8)^2 &= (-0.31)^2 = 0.0961\\
(v_9)^2 &= (-0.03)^2 = 0.0009\\
(v_{10})^2 &= (-0.20)^2 = \underline{0.0040}\\
(vv) &= 0.2342;
\end{aligned}
$$

de sorte que

$$s_m^2 = \frac{(vv)}{10-4} = \frac{0.2342}{6} = 0.0390,$$

$$s_m \cong 0.2.$$

Au moyen des équations (7) la valeur des inconnues U, V, X, Y, Z peut se rattacher à n'importe quelle équation de définition. Si par exemple on sait que

$$Z = (1 + 0.50 \times 10^{-6})\ \mathrm{kg},$$

alors,

$$M = (1 - 15.08 \times 10^{-6})\ \mathrm{kg},$$

et

$$
\begin{aligned}
U &= M + N_1/5 = (1 - 69.42 \times 10^{-6})\ \mathrm{kg},\\
V &= M + N_2/5 = (1 + 0.01 \times 10^{-6})\ \mathrm{kg},\\
X &= M + N_3/5 = (1 + 0.75 \times 10^{-6})\ \mathrm{kg},\\
Y &= M + N_4/5 = (1 - 5.74 \times 10^{-6})\ \mathrm{kg}.
\end{aligned}
$$

APPENDICE 2

Détermination des sous-multiples

L'algorithme qui englobe les contenus de (23), (24), (27), (28) est présenté comme suit:*

Solution

$+m_1$	$-m_1$	$-m_1$	$-m_1$	
$+m_2$	$-m_2$	$-m_2$		$-m_2$
	$+m_3$	$-m_3$	$+m_3$	$-m_3$
	$+m_4$	$-m_4$	$-m_4$	$+m_4$
	$+m_5$	$-m_5$		
	$+m_6$		$-m_6$	$-m_6$
		$+m_7$	$-m_7$	$-m_7$
N_1	N_2	N_3	N_4	N_5

$+7N_1$	$+N_1$	$+N_1$	$+7N_1$	$+7N_1$
	$+5N_2$			
		$+5N_3$		
$-N_4$	$-N_4$	$-N_4$	$+23N_4$	$+3N_4$
$+N_5$			$+5N_5$	$+25N_5$
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
$S_1/28$	$S_2/35$	$S_3/35$	$S_4/140$	$S_5/140$
$M/2$	$M/5$	$M/5$	$M/10$	$M/10$
(5)	(2)	(2')	(1)	(1')

Il est a noter que les quantités m_i, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 sont des "différences" (c. à. d. des petites quantités); les quantités $M/2...M/10$ représentent les masses elles mêmes et sont d'un tout autre ordre de grandeur.

---

* La manière la plus commode de remplir l'algorithme est de l'écrire par lignes plutôt que colonnes

Dans un étalonnage des sous-multiples du kilogramme on a obtenu les résultats suivants. Les symboles (5), (2), (2'), (1), (1') désignent les masses égales à 0.5, 0.2, 0.1, 0.1 kg respectivement. Ils peuvent aussi être remplacés par **les** symboles (500), (200), (200'), (100), (100') si les masses sont exprimées en grammes.

<u>Equations de condition</u>

$$
\begin{array}{cccccccl}
+(5) & -(2) & -(2') & -(1) & & = m_1 & = & -1.4 \text{ mg} \\
+(5) & -(2) & -(2') & & -(1') & = m_2 & = & -0.6 \text{ "} \\
& +(2) & -(2') & +(1) & -(1') & = m_3 & = & +4.4 \text{ "} \\
& +(2) & -(2') & -(1) & +(1') & = m_4 & = & +2.2 \text{ "} \\
& +(2) & -(2') & & & = m_5 & = & +3.4 \text{ "} \\
& +(2) & & -(1) & -(1') & = m_6 & = & +3.2 \text{ "} \\
& & +(2') & -(1) & -(1') & = m_7 & = & 0.0 \text{ "} \\
& & & +(1) & -(1') & = m_8 & = & +1.4 \text{ "}
\end{array}
$$

Le calcul est fait conformément à l'algorithme ci-dessus, l'équation de définition étant

$$M = (1 - 6.33 \times 10^{-6}) \text{ kg}$$

Elle est considéré comme consistant de deux parties: 1°) la valeur nominale qui est égale à 1 kg et 2°) "l'excès" μ

$$\mu = -6.33 \times 10^{-6} \text{ kg} = -6.33 \text{ mg.}$$

La dernière ligne représente les excès des poids par rapport à leurs valeurs nominales.

<u>Solution (Unité = 1 mg)</u>

− 1.4	+ 1.4	+ 1.4	+ 1.4	
− 0.6	+ 0.6	+ 0.6		+ 0.6
	+ 4.4	− 4.4	+ 4.4	− 4.4
	+ 2.2	− 2.2	− 2.2	+ 2.2
	+ 3.4	− 3.4		
	+ 3.2	−	− 3.2	− 3.2
		0.0	0.0	0.0
			+ 1.4	− 1.4
− 2.0	+ 15.2	− 8.0	+ 1.8	− 6.2

+7x - 2.0	1x - 2.0	+1x - 2.0	7x - 2.0	7x - 2.0
-1x - 1.8	5x + 15.2	+5x - 8.0	23x + 1.8	3x + 1.8
+1x - 6.2	-1x + 1.8	-1x + 1.8	5x - 6.2	+25x - 6.2
- 14.0	- 2.0	- 2.0	- 14.0	- 14.0
- 1.8	+ 75.0	- 40.0	+ 41.4	+ 5.4
- 6.2	- 1.8	- 1.8	- 31.0	-155.0
S_1= - 22.0	S_2= + 72.2	S_3= - 43.8	S_4= - 3.6	S_5= -163.6
- 0.786	+ 2.063	- 1.251	- 0.026	-1.169
- 3.165	- 1.266	- 1.266	- 0.633	-0.633
- 3.951	+ 0.797	- 2.517	- 0.659	-1.802

Les valeurs des masses comparées sont donc égales à:

$$(5) = (0.5 - 3.951 \times 10^{-6})\ \text{kg},$$
$$(2) = (0.2 + 0.797 \times 10^{-6})\ \text{kg},$$
$$(2') = (0.2 - 2.517 \times 10^{-6})\ \text{kg},$$
$$(1) = (0.1 - 0.659 \times 10^{-6})\ \text{kg},$$
$$(1') = (0.1 - 1.802 \times 10^{-6})\ \text{kg}.$$

Les valeurs compensées des quantités mesurées m_i, qui en résultent, les erreurs résiduelles et leurs carrés sont les suivantes (en mg):

$m'_i = -1.6$	$v_1 = +0.2$	$v_1^2 = 0.04$
$m'_2 = -0.4$	$v_2 = -0.2$	$v_2^2 = 0.04$
$m'_3 = +4.5$	$v_3 = -0.1$	$v_3^2 = 0.01$
$m'_4 = +2.2$	$v_4 = 0.0$	$v_4^2 = 0.00$
$m'_5 = +3.3$	$v_5 = +0.1$	$v_5^2 = 0.01$
$m'_6 = +3.3$	$v_6 = -0.1$	$v_6^2 = 0.01$
$m'_7 = -0.1$	$v_7 = +0.1$	$v_7^2 = 0.01$
$m'_8 = +1.1.$	$v_8 = +0.3.$	$v_8^2 = 0.09$

$$(vv) = 0.21$$

$$s_m^2 = (vv)/4 = 0.21/4 = 0.05.$$

Les écarts-types sur les valeurs individuelles sont calculés par les formules (36). Si s_M (tel qu'il est donné par le laboratoire où M a été comparé au IK) est égal à $s_M = 8 \times 10^{-3}$ mg, ces formules conduisent aux résultats suivants:

$$\begin{aligned}
s^2_{(5)} &= 9.15 \times 10^{-3}\ \text{mg}^2, & s_{(5)} &= 0.10\ \text{mg} \\
s^2_{(2)} &= 6.02 \times 10^{-3}\ \text{"}, & s_{(2)} &= 0.08\ \text{"} \\
s^2_{(2')} &= 6.02 \times 10^{-3}\ \text{"}, & s_{(2')} &= 0.08\ \text{"} \\
s^2_{(1)} &= 7.23 \times 10^{-3}\ \text{"}, & s_{(1)} &= 0.08\ \text{"} \\
s^2_{(1')} &= 8.63 \times 10^{-3}\ \text{"}, & s_{(1')} &= 0.09\ \text{"}.
\end{aligned}$$

APPENDICE 3

Détermination des multiples

Les équations de condition sont de la même forme que celles de l'appendice 2. Les symboles (5), (2), (2'), (1), (1') indiquent maintenant les masses nominalement égales à 5 kg, 2 kg, 2 kg, 1 kg, 1 kg, respectivement

Equations de condition

$$
\begin{array}{rrrrrl}
+(5) & -(2) & -(2') & -(1) & & = m_1 = -25.0 \text{ mg} \\
+(5) & -(2) & -(2') & & -(1') & = m_2 = -35.0 \text{ "} \\
 & +(2) & -(2') & +(1) & -(1') & = m_3 = -\ 5.8 \text{ "} \\
 & +(2) & -(2') & -(1) & +(1') & = m_4 = -\ 6.1 \text{ "} \\
 & +(2) & -(2') & & & = m_5 = -\ 0.3 \text{ "} \\
 & +(2) & & -(1) & -(1') & = m_6 = -\ 0.9 \text{ "} \\
 & & +(2') & -(1) & -(1') & = m_7 = -\ 0.8 \text{ "} \\
 & & & +(1) & -(1') & = m_8 = -\ 5.6 \text{ "}
\end{array}
$$

L'équation de définition est

$$M = (1') = (1 + 0.05 \times 10^{-6}) \text{ kg} = 1 \text{ kg} - \mu$$

$$\mu = +\ 0.05 \text{ mg.}$$

L'algorithme est semblable à celui qui est donné dans l'appendice 2.

Solution

$+ m_1$	$- m_1$	$- m_1$	$- m_1$	
$+ m_2$	$- m_2$	$- m_2$		$- m_2$
	$+ m_3$	$- m_3$	$- m_3$	$- m_3$
	$+ m_4$	$- m_4$	$- m_4$	$- m_4$
	$+ m_5$	$- m_5$		
	$+ m_6$		$- m_6$	$- m_6$
		$+ m_7$	$- m_7$	$- m_7$
			$+ m_8$	$- m_8$
N_1	N_2	N_3	N_4	N_5

	$12N_1$	$12N_1$		
	$6N_2$	$5N_2$		
	$5N_3$	$6N_3$		
$- N_4$	$2N_4$	$2N_4$	$+ N_4$	
$-6N_5$			$- N_5$	
S_1	S_2	S_3	S_4	
$S_1/7$	$S_2/7$	$S_3/7$	$S_4/7$	
5M	2M	2M	M	M
(5)	(2)	(2')	(1)	(1')

Avec les valeurs $m_1 \ldots\ldots m_8$ telles qu'elles sont données dans les équations de condition nous obtenons:

Solution (Unité = 1 mg)

- 25.0	+ 25.0	+ 25.0	+ 25.0	
- 35.0	+ 35.0	+ 35.0		+ 35.0
	- 5.8	+ 5.8	- 5.8	+ 5.8
	+ 6.1	- 6.1	- 6.1	+ 6.1
	- 0.3	+ 0.3		
	- 0.9		+ 0.9	+ 0.9
		- 0.8	+ 0.8	+ 0.8
			- 5.6	+ 5.6
- 60.0	+ 59.1	+ 59.2	+ 9.2	+ 54.2
	-720.0	-720.0	+ 9.2	
	+364.6	+305.0	- 54.2	
	+296.0	+355.2		
- 9.2	+ 18.4	+ 18.4		
-325.2				
-334.4	- 51.0	- 50.9	- 45.0	
- 47.71	- 7.29	- 7.27	- 6.43	
* + 0.25	+ 0.10	+ 0.10	+ 0.05	+ 0.05
- 47.52	- 7.19	- 7.17	- 6.38	+ 0.05

* Voir note page suivante.

Les valeurs des poids comparés sont:

$$(5) = 5\text{ kg} - 47.52\text{ mg}$$
$$(2) = 2\text{ kg} - 17.19\text{ ''}$$
$$(2') = 2\text{ kg} - 17.17\text{ ''}$$
$$(1) = 1\text{ kg} - 6.38\text{ ''}$$
$$(1') = 1\text{ kg} - 0.05\text{ ''}$$

Les erreurs résiduelles qui en dérivent et leurs carrés sont(en mg):

$$v_1 = -25.0 + 26.8 = +1.8, \qquad v_1^2 = 3.24$$
$$v_2 = -35.0 + 33.2 = -1.8, \qquad v_2^2 = 3.24$$
$$v_3 = -5.8 + 6.4 = -0.6, \qquad v_3^2 = 0.36$$
$$v_4 = +6.1 - 6.4 = -0.3, \qquad v_4^2 = 0.09$$
$$v_5 = -0.3 + 0.0 = -0.3, \qquad v_5^2 = 0.09$$
$$v_6 = -0.9 + 0.9 = -0.0, \qquad v_6^2 = 0.00$$
$$v_7 = -0.8 + 0.8 = -0.0, \qquad v_7^2 = 0.00$$
$$v_8 = -5.6 + 6.4 = +0.8. \qquad v_8^2 = 0.64$$

Donc

$$(vv) = 7.66,$$

$$s_m^2 = \frac{(vv)}{8-4} = \frac{7.66}{4} = 1.92\ (\text{mg})^2.$$

Si on admet que $s_M^2 = 0.008\ (\text{mg})^2$, $s_{(5)}^2$ devient égal à

$$s_{(5)}^2 = 25 \times 0.008 - 4.28_6 \times 1.92 = 8.43\ (\text{mg})^2,$$

et les résultats finals sont:

$$s_{(5)} = \sqrt{8.43}\text{ mg} = 2.90\text{ mg}$$
$$s_{(2)} = \sqrt{1.68}\text{ mg} = 1.30\text{ mg}$$
$$s_{(2')} = \sqrt{1.68}\text{ mg} = 1.30\text{ mg}$$
$$s_{(1)} = \sqrt{0.56}\text{ mg} = 0.75\text{ mg}$$

---

* Les données successives dans cette ligne sont égales à 5, 2, 2, 1, 1 μ, respectivement.

Note:

Le système d'équations traité ici peut aussi être résolu au moyen de l'algorithme donné dans l'appendice 2. Les masses (5), (2), (2'), (1), (1') seraient alors exprimées d'abord en fonction d'une masse de référence provisoire M* dont la valeur nominale est de 10 kg:

$$M^* = (5) + (2) + (2') + (1).$$

Ceci, conformément à (28), devrait conduire aux équations

$$(5) = M^*/2 + 1/28.S_1^*$$

$$(2) = M^*/5 + 1/35.S_2^*$$

$$(2') = M^*/5 + 1/35.S_3^*$$

$$(1) = M^*/10 + 1/140.S_4^*$$

$$(1') = M^*/10 + 1/140.S_5^*$$

dans lesquelles S_1^*, S_2^*, S_3^*, S_4^*, S_5^* sont calculées à partir des quantités observées m_1, m_2, --- m_8 et exprimées par les équations (29).

La dernière des équations ci-dessus constitue la liaison entre la masse de référence provisoire M^* et la masse utilisée dans l'équation de définition

$$M = (1').$$

En résolvant (par rapport à M^*) l'équation

$$M = M^*/10 + 1/140.S_5^*,$$

nous obtenons M^* en fonction de M, c. à. d.

$$M^* = 10\ M - 1/14.S_5^*,$$

Ceci doit être introduit dans les expressions de (5), (2), (2'), (1).

Par exemple, la substitution fournira pour (5) l'expression suivante:

$$(5) = 5M - 1/28.S_5^* + 1/28.S_1^*,$$

$$(5) = 5M - 1/28.(S_5^* - S_1^*).$$

Mais à cause de (29), on a

$$S_5^* - S_1^* = -4m_1 - 24m_2 - 20m_3 + 20m_4 - 28m_6 - 28m_7 - 20m_8,$$

et donc,

$$(5) = 5M - 1/7\cdot(m_1 + 6m_2 + 5m_3 - 5m_4 + 7m_6 + 7m_7 + 5m_8).$$

Cette égalité est identique à la première ligne de (34) de sorte que l'expression qui en résulte pour la variance $s^2_{(5)}$ sera identique à celle de la première ligne de (37). Les résultats définitifs présentés en (37) sont ainsi indépendants de la méthode de calcul. Le lecteur doit toujours se rappeler que les symboles marqués d'un astérisque (*) se rapportent à la valeur de référence provisoire

$$M^* = (5) + (2) + (2') + (1),$$

tandis que M (sans astérisque) se rapporte à celui des poids dont la masse est, ou postulée ou déterminée par une opération indépendante.

Remarques finales

Les méthodes statistiques décrites dans le présent mémorandum (les appendices inclus) sont complètement familières aux personnels de tous les laboratoires d'étalonnage du monde. Plusieurs autres schémas d'intercomparaisons sont utilisés dans le laboratoire des masses; ils sont dus à l'existence légale des système de masse non-métriques. Le lecteur qui serait intéressé par ces schémas est invité à entrer en contact avec le personnel du laboratoire.

L'objectif du présent mémorandum, dont l'étude devrait être précédée par celle du mémorandum No 6 , est de faire connaître dans de plus larges sphères, que malgré son apparente simplicité, la comparaison des masses au niveau de la précision métrologique est une opération complexe. Il est à espérer que le lecteur, après avoir étudié et utilisé les deux mémoranda aura une meilleure appréciation de l'effort que le personnel d'un laboratoire des masses déploie pour maintenir ses étalons de référence et de travail dans des conditions satisfaisantes au point de vue métrologique.

Ces mémoranda devraient aussi constituer des suggestions que les usagers des étalons de masse de haute qualité accomplissent eux mêmes

a) des intercomparaisons des masses nominalement égales (de différentes grandeurs) et b) des opérations d'étalonnage en suivant le schéma (5, 2, 2, 1, 1,) ou des schémas analogues. Les plus utilisés parmi ces derniers sont décrits dans le mémorandum No 11. D'autres schémas sont décrits dans la littérature ou peuvent être constitués par les métrologistes eux mêmes conformément aux balances et les poids qui sont à leur disposition et les conditions dans lesquelles les pesages sont effectués.

Les auteurs expriment le voeu que ce mémorandum mette tous les observateurs au courant du calcul des écarts-types. Ce calcul est la meilleure méthode pour rendre l'observateur complètement conscient du degré d'exactitude atteint dans la comparaison des masses. Il va aussi lui faire sentir l'importance des limites d'exactitude citées dans les certificats délivrés par les laboratoires d'étalonnage et d'aprécier correctement la justesse des opérations basées sur ces valeurs.

DATE DUE
DATE DE RETOUR
