

UNIVERSITÉ LAVAL,
Faculté des Sciences et de Génie,
Département de Génie Électrique,
LABORATOIRE de TÉLÉCOMMUNICATIONS.

Rapport final

CARACTERISATION DE L'ENVIRONNEMENT RADIO
AUX FREQUENCES SUPERIEURES A 500 MHz

par

Denis Angers, Gilles Y. Delisle, Gilles Conthier

pour

Gouvernement du Canada
Ministère des Communications, Ottawa

sous

Contrat OSU80-00170 du Ministère
des Approvisionnements et Services

Période du 22 août 1980 au 31 mars 1981

Mars 1981

Rapport n° LT-81-8278

P
91
C655
A53
1981

UNIVERSITÉ LAVAL,
Faculté des Sciences et de Génie,
Département de Génie Électrique,
LABORATOIRE de TĒLĒCOMMUNICATIONS.

Rapport final

2.
CARACTERISATION DE L'ENVIRONNEMENT RADIO
AUX FREQUENCES SUPERIEURES A 500 MHz

par

(Denis Angers,) Gilles Y. Delisle, Gilles Gonthier

pour

Gouvernement du Canada
Ministère des Communications, Ottawa

sous

Contrat OSU80-00170 du Ministère
des Approvisionnements et Services

Période du 22 août 1980 au 31 mars 1981

Mars 1981

Rapport n° LT-81-8278

RAPPORT FINAL

CARACTERISATION DE L'ENVIRONNEMENT RADIO
AUX FREQUENCES SUPERIEURES A 500 MHz

Par : Dr Denis Angers, Chercheur principal
Dr Gilles Y. Delisle, Collaborateur
M. Gilles Gonthier, Etudiant gradué

Laboratoire de Télécommunications
Département de Génie Electrique
Université Laval, Québec, Canada G1K 7P4

Pour : Ministère des Communications, Ottawa

Contrat OSU80-00170 du Ministère des
Approvisionnement et Services

Durée : 22 août 1980 au 31 mars 1981

Mars 1981

Rapport n° LT-81-8278

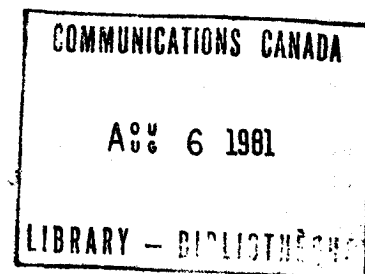


Table des matières

Chapitre 1	INTRODUCTION	1
1.1	Origine et intérêt du projet	1
1.2	Objectifs de l'étude	2
1.2.1	Réorientation de l'étude : justification	3
1.3	Plan du rapport	4
Chapitre 2	MODELES EMPIRIQUES	5
2.1	Introduction	5
2.2	Présentation de quelques modèles	6
2.2.1	Mesures et représentation	6
2.2.2	Nécessité de modèles	7
2.2.3	Quelques modèles	7
	A) Modèle gaussien	8
	B) Modèle de Hall [15]	8
	C) Modèle CCIR (ou atmosphérique).	9
	D) Modèle log-normal	10
	E) Modèles physico-statistiques de Middleton [3-7, 21, 22]	11
2.3	Application des modèles CCIR et log-normal à une série d'expériences sur une ligne à haute tension.	11
2.3.1	Description des conditions expérimentales	11
2.4	Conclusions.	16
Chapitre 3	MODELE PHYSICO-STATISTIQUE DU BRUIT RADIO	17
3.1	Introduction	17
3.2	Modèles physico-statistiques	18
3.2.1	Définitions	19
3.2.2	Hypothèses fondamentales	20
3.3	La fonction caractéristique	22
3.3.1	Dérivation d'une fonction caractéristique	25
3.4	Hypothèses pratiques	26
3.4.1	Composantes en phase et en quadrature	27
3.4.2	Relations avec l'APD	29
3.5	Réduction de la fonction caractéristique	30
3.5.1	Récepteur à bande étroite	30
3.5.2	Densité des sources de bruit en surface	31
3.5.3	Variables de simplification	32
3.5.4	Stabilité du champ de bruit	33
3.5.5	Paramètre additionnel	34
3.5.6	Hypothèses ultimes	34
3.5.7	Interprétation de A_{∞}	35

3.6	Composante gaussienne du bruit radio	35
3.7	Seconde réduction de la fonction caractéristique	37
3.8	Fonction caractéristique pour un bruit de classe A	39
3.8.1	Variables normalisées	
3.8.2	Autres fonctions et moments d'un bruit de classe A	42
3.9	Fonction caractéristique pour un bruit de classe A	43
3.9.1	Conditions de convergence	45
3.9.2	Expression exacte	45
3.9.3	Expression simplifiée approximative de $F_1(ir)_{B+G}$	46
3.9.4	Définitions des paramètres en classe B	48
3.9.5	Variables normalisées en classe B	49
3.9.6	Calcul des probabilités	49
3.9.7	Densités de probabilité et moments d'ordre supérieur	51
3.10	Le point de transition ξ_B	52
3.11	Conclusions	53
Chapitre 4	Calcul numérique des APD avec un modèle physico-statique du bruit	54
4.1	Introduction	54
4.2	Modèles du bruit radio de classe A	54
4.3	Résultats numériques pour un bruit de classe A	56
4.3.1	Influence de Γ^A	56
4.3.2	Influence de A^A	62
4.3.3	Distribution des amplitudes de l'enveloppe selon une loi de Rayleigh	68
4.4	Modèle du bruit radio de classe B - Partie I	70
4.4.1	Résultats numériques pour un bruit de classe B - Partie I	73
4.5	Modèle du bruit radio de classe B - Partie II	79
4.5.1	Résultats numériques pour un bruit de classe B - Partie II	79
4.6	APD composite d'un bruit de classe B	81
4.7	Conclusions	85
Chapitre 5	CONCLUSIONS	88
5.1	Aperçu général	88
5.2	Points particuliers	88
5.3	Aperçu des travaux à venir	89
5.4	Remerciements	90
	Bibliographie	92
Appendice A	Modèle CCIR. Construction et programmes	95
Appendice B	Modèle log-normal. Traitement mathématique et programmes	102
Appendice C	Programmes pour le modèle de Middleton	111

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 ORIGINE ET INTERET DU PROJET

Le programme de recherches décrit dans le présent rapport s'inscrit dans un ensemble d'activités entreprises il y a plus de trois ans maintenant, au sein du Laboratoire de Télécommunications du Département de Génie Electrique de l'Université Laval. Ces activités ont été suscitées et entretenues depuis lors par des contacts, rencontres et discussions avec un bon nombre de chercheurs du Centre de Recherches en Communications à Ottawa. Dans le cas particulier de la caractérisation du bruit radio, les principaux interlocuteurs ont été MM. T. Coyne et W. Lauber.

Déjà, dans une première étape [1], nous avons tenté de faire le point, en faisant un tour d'horizon, sur les travaux réalisés sur la caractérisation du bruit radio, sa mesure, et l'utilisation que l'on peut faire de sa connaissance pour la prédiction du comportement de systèmes de communications.

Il ne fait aucun doute dans notre esprit que le besoin d'une meilleure connaissance du bruit radio demeurera un impératif dans notre société, surtout si l'on songe à la multiplication des réseaux de communications qui utilisent des transmissions numériques. Parmi ces types de bruits, nous avons retenu en particulier ceux générés par les lignes de transport d'énergie électrique à très haute tension, de même que ceux générés par l'allumage des véhicules automobiles.

D'autre part, depuis quelques années, un chercheur très réputé dans le domaine, D. Middleton, a entrepris et mené à terme un ensemble de travaux de modélisation du bruit (modèle physico-statistique) ayant, comme le mot l'indique, une bonne assise dans la physique des phénomènes qui lui donnent naissance. Le traitement mathématique qui les accompagne est très rigoureux encore que passablement hermétique. Il va de soi que nous ne pouvions ignorer cette approche globale et, de toute évidence, cette contribution majeure, on le verra plus

loin, a considérablement modifié l'orientation initialement prévue pour nos travaux.

1.2 OBJECTIFS DE L'ETUDE

La première étape du contrat précédent [1] nous avait déjà amenés à décrire succinctement, entre autres choses, les éléments suivants:

a) au chapitre de la caractérisation, nous avons exploré les deux approches fondamentales et aussi nécessaires l'une que l'autre, soit les approches déterministe et statistique, cette dernière s'appuyant essentiellement sur la distribution de probabilité d'amplitude. En dépit du fait que plusieurs données d'ordre temporel ne puissent être retenues (plusieurs signaux différents peuvent donner la même APD, par exemple), le recours à certains modèles empiriques, comme le modèle CCIR et le modèle log-normal, permet d'identifier le plus souvent des paramètres d'intérêt servant à évaluer la performance de systèmes de communication. Il va sans dire que cette opération présuppose le bien-fondé du modèle, de même que son applicabilité. C'est ainsi que l'on pouvait conclure, à la suite de Lauber [2], à l'utilité réelle du modèle log-normal pour caractériser, dans certaines bandes de fréquences, le bruit généré par les lignes à très haute tension.

b) tout en reconnaissant une très grande utilité aux modèles précités, nous devons chercher à comprendre la portée réelle du modèle de Middleton [3-7]. D'autant plus que l'intérêt pour ces modèles grandissait chez nos interlocuteurs du Centre de Recherches en Communications.

Si, enfin, nous ajoutons aux éléments qui précèdent une autre observation, à savoir que nos travaux ont permis de mettre en évidence *la concordance moins réelle qu'on ne le croyait a priori des résultats du modèle log-normal avec ceux observés sur les lignes de transport à très haute tension*, il n'en fallait pas davantage pour remettre en question l'orientation initialement prévue pour nos travaux. Si bien qu'à la suite de discussions avec M. T. Coyne, notre répondant scientifique, nous avons convenu qu'il était nécessaire de modifier substantiellement le projet d'étude original.

1.2.1 Réorientation de l'étude: justification

Initialement donc, si l'on se réfère à la proposition soumise en janvier 1980, et qui a donné lieu au présent contrat, nous visions les buts suivants:

- a) faire un relevé de l'ensemble des résultats expérimentaux disponibles pour caractériser le bruit dû aux lignes de transport de l'énergie électrique et le bruit d'allumage au-delà de 500 MHz.
- b) dégager les conclusions les plus importantes concernant les difficultés de mesure, les lacunes de l'appareillage et les zones de fréquence pour lesquelles aucun résultat n'est disponible.
- c) procéder à un inventaire de l'appareillage actuellement disponible, décrire son fonctionnement, ses limitations.
- d) enfin, étudier analytiquement les solutions possibles pour rendre ces instruments opérationnels pour des fréquences supérieures à 1000 MHz.

Le premier geste posé fut de nous familiariser avec le traitement réel d'une APD typique du bruit généré par une ligne de transport d'énergie à haute tension pour établir les relations avec les paramètres d'intérêt, comme la valeur moyenne V_{AV} et la valeur efficace V_{RMS} par exemple. Or les méthodes numériques auxquelles nous avons eu recours, de même que celle mise au point par Akima [8], nous ont conduits à des résultats qui ne coïncidaient pas toujours avec des résultats déjà publiés, mettant en doute, par le fait même, le bien-fondé d'une utilisation de modèles empiriques pour la caractérisation de ce type de bruit dans le domaine de fréquence spécifié. Il n'en fallait pas davantage pour revoir, en profondeur, l'applicabilité du modèle log-normal dans le cas considéré.

Dans la même veine, nous avons dès lors cru bon de poursuivre plus avant et de tenter de comprendre les théories de Middleton et surtout de chercher à reproduire les résultats qu'il annonçait. Ce qui fut fait, avec plein succès.

Nous avons donc mis au point une technique numérique qui permet de reproduire les APD de bruits artificiels de provenances diverses, à partir des paramètres identifiés par Middleton pour les trois classes de bruits.

Cette étape constitue, croyons-nous, un pas essentiel dans un programme général qui permettrait d'obtenir ces mêmes paramètres à partir d'une mesure directe de bruit quelconque.

1.3 PLAN DU RAPPORT

La démarche suivie dans nos travaux nous a amenés, dans le second chapitre, à présenter un certain nombre de modèles, en privilégiant légèrement le modèle log-normal, et le modèle CCIR pour l'analyse des grandes caractéristiques des APD fournies par ces modèles empiriques. On verra dès lors l'incompatibilité de certains résultats expérimentaux avec ceux fournis par le recours à ces modèles.

Au troisième chapitre, nous présenterons une description et une interprétation des modèles physico-statistiques de Middleton et al., ce, d'une façon nettement plus élaborée qu'au niveau du rapport précédent [1]. Nous croyons nécessaire de procéder à cette étape pour comprendre la présentation, par la suite, au chapitre 4, des équations et approximations qui ont conduit à la mise au point de programmes pour reproduire les résultats affichés dans les différentes publications de ces auteurs. Cela permet également de montrer leur caractère opérationnel et de discuter l'ensemble des résultats obtenus.

Au chapitre 5, dans une discussion critique des problèmes d'analyse numérique engendrés par la mise en oeuvre du modèle de Middleton, nous discutons des sources d'erreurs, des ordres de grandeur impliqués et des précautions à prendre pour tenter d'aller plus avant dans cette modélisation.

En conclusion, nous tentons de situer l'importance des résultats obtenus dans la mise au point d'un programme complet qui permettrait d'identifier, directement à partir d'une mesure de bruits, la classe de ces bruits, et de calculer les paramètres du modèle canonique de Middleton qui permettraient de le caractériser complètement.

Chapitre 2

MODELES EMPIRIQUES

2.1 INTRODUCTION

La prédiction de la performance d'un système de communication quel qu'il soit exige une connaissance de la statistique du bruit additif qui le gêne. La grande variété des bruits, la gamme de fréquence dans laquelle ils prédominent, leur caractère le plus souvent impossible à décrire sous une forme analytique traitable raisonnablement, tout cela a amené plusieurs chercheurs à proposer des modèles mathématiques de tous ordres. Certains, d'une part totalement empiriques, i.e. sans relations explicables avec les phénomènes physiques qui donnent naissance au bruit et non analytiques; d'autres, en dépit de leur caractère empirique, sont entièrement analytiques et permettent d'établir des liens de cause à effet avec des caractéristiques temporelles de ces mêmes bruits.

Enfin, Middleton et al. ont proposé, ces dernières années, des modèles globaux, canoniques, qualifiés par leurs auteurs de modèles physico-statistiques. Outre le fondement physique, ces auteurs ont joint à leur théorie des méthodes de traitement rigoureuses et/ou approximatives le cas échéant. Nous consacrerons d'ailleurs une part importante de ce travail, en particulier les chapitres 3, 4 et 5, respectivement à l'exposé de ce modèle, aux techniques numériques de calcul qui en découlent, et à une discussion critique des problèmes d'analyse numérique engendrés par sa mise en oeuvre.

Pour l'instant, il importe, croyons-nous, de faire une revue rapide des quelques modèles proposés et utilisés jusqu'à ce jour, d'évaluer en particulier les limites réelles de l'applicabilité des modèles CCIR (ou atmosphériques) et log-normal dans le cas du bruit engendré par les lignes de transport à haute tension.

2.2 PRESENTATION DE QUELQUES MODELES

2.2.1 Mesures et représentation

Avant de faire une synthèse de quelques modèles de bruit, il importe de les situer dans cet ensemble d'outils dont dispose l'analyste de systèmes de communications en regard des mesures généralement effectuées.

Les données sur le bruit les plus fréquemment obtenues sont les suivantes:

1) *tension crête* (V_{peak} , V_p), laquelle ne fournit, pour la période de temps que dure la mesure, qu'une indication de la plage dynamique, sans plus.

2) *tension quasi-crête* ($V_{\text{quasi-peak}}$, V_{qp}): c'est une mesure de la valeur moyenne de la tension aux bornes d'un circuit RC alimenté à travers une diode, dont les constantes de temps de charge et de décharge sont spécifiées [9-10]. En dépit d'une absence totale de signification sur le plan analyse statistique d'un signal, des relations avec d'autres grandeurs telle la valeur efficace V_{RMS} ont été établies dans des cas spécifiques [11-12]. On tend cependant à faire graduellement abstraction de V_{qp} .

3) *tension moyenne* (V_{AVERAGE} , V_{AV}): cette valeur mesurée dans le temps prend une signification importante en statistique moyennant certaines conditions (ergodicité).

4) *tension efficace* (V_{RMS}): cette mesure, liée directement à la notion de puissance, a une signification particulièrement importante en statistique (relation avec variance et écart-type, moment du second ordre, etc.).

La représentation la plus fréquente du bruit est celle où l'on met en évidence l'enveloppe et la phase. La statistique de l'amplitude de l'enveloppe est le plus souvent présentée à l'aide d'une fonction de distribution de probabilité cumulative complémentaire (Amplitude Probability Distribution, APD) qu'il est possible de mesurer, directement, pendant un intervalle de temps, avec un détecteur comportant un certain nombre de comparateurs, suivi d'un dispositif d'affichage. Celui-ci permet d'enregistrer en abscisse, le pourcentage du temps de mesure pour lequel la valeur de l'ordonnée est dépassée; l'ordonnée étant elle-même le niveau du signal d'entrée du détecteur (en dB).

Mathématiquement, si $P(A)$ = probabilité que le niveau A soit dépassé

par l'enveloppe instantanée, on obtiendra, pour l'APD,

$$P_0(A) = 1 - P(A) = \int_A^{\infty} p(a) da \quad (2-1)$$

où $p(a)$ = densité de probabilité du phénomène.

On peut montrer [13] que l'on peut tirer de l'APD, la valeur moyenne de l'enveloppe (V_{AV}) et la valeur efficace (V_{RMS}) de cette même enveloppe. Une dernière donnée fréquemment utilisée et mesurée est la tension de déviation (V_d) définie elle-même comme:

$$V_d = V_{RMS} - V_{AV} \text{ (dB)} \quad (2-2)$$

Cette dernière valeur sera même caractéristique de certains types de bruits.

Enfin, une échelle particulière* (papier dit de Rayleigh) est devenue un standard pour la présentation des APD et permet de déduire directement, le cas échéant, le caractère gaussien ou impulsionnel du bruit dont l'enveloppe est ainsi décrite.

2.2.2 Nécessité de modèles

Depuis plus de vingt ans, on a tenté, généralement avec un certain succès, d'établir des relations entre les mesures décrites plus haut et l'APD. Une fois celles-ci établies, il devenait intéressant de tenter de reproduire ou de calculer des APD à partir de mesures effectuées et de les comparer à une APD expérimentale. C'est l'étape même de la modélisation.

Le succès de cette première opération dans maints cas permettait en outre de déduire d'autres propriétés temporelles du bruit, dont nous ferons état plus loin.

2.2.3 Quelques modèles

Comme on l'a dit plus haut, les caractéristiques du bruit radio diffèrent selon la nature des sources et selon la bande - région et largeur - de fréquences considérée. Dans des conditions préalablement déterminées, généralement par des normes internationales, on obtiendra des APD dont la forme

* échelle linéaire par $-\frac{1}{2} \log_{10}[-\ln P(a)]$.

(asymptotes, points de cassure, points de déflexion, etc.) sera plus ou moins caractéristique du milieu mesuré.

C'est ainsi que plusieurs modèles ont été proposés jusqu'ici et nous nous bornerons à en présenter brièvement seulement quelques-uns ici, soit les modèles gaussien et de Hall. Deux autres feront l'objet d'une étude un peu plus critique à cause même de leur intérêt pour caractériser le bruit atmosphérique et de la préférence marquée pour ceux-ci dans des efforts pour caractériser le bruit des lignes à haute tension: il s'agit des modèles CCIR (ou atmosphérique) et log-normal. Les détails analytiques, les techniques numériques utilisées pour leur traitement et les programmes d'ordinateur utilisés pour obtenir des résultats numériques sont présentés aux appendices A et B.

D'autres modèles ont trouvé des champs d'application d'intérêt et, à cette fin, nous référons le lecteur à la synthèse qu'en a fait Spaulding [14].

A) Modèle gaussien

Ce premier modèle, analytique, fournit une densité de probabilité de Rayleigh pour l'enveloppe. L'APD correspondante est décrite par l'expression

$$P_0(V) = \int_V^{\infty} x/\alpha^2 \exp(-x^2/2\alpha^2) dx \quad (2-3)$$

$$= e^{-V^2/2\alpha^2} \quad (2-4)$$

Transposée sur du papier dit de Rayleigh, l'APD devient une droite dont la pente est $-1/2$. On aura souvent recours à cette caractéristique pour fins de comparaison.

L'expérience montrera que ce modèle ne permet pas d'expliquer la présence d'une grande plage dynamique que l'expérience nous impose le plus souvent.

B) Modèle de Hall [15]

Ce modèle, conçu pour la représentation de bruit dont la composante impulsionnelle est particulièrement importante, propose un processus gaussien à bande étroite pondéré par un facteur qui varie dans le temps. Mathématiquement:

$$V(t) = a(t) \cdot n(t) \quad (2-5)$$

où $n(t)$ = processus gaussien à moyenne nulle,

$a(t)$ = processus aléatoire stationnaire, indépendant de $n(t)$, dont la description statistique est choisie pour obtenir la meil-

leure description possible de $V(t)$.

La synthèse de ce modèle n'est pas présentée ici et on la retrouvera dans l'article de Spaulding cité plus haut [14]. Bien que n'ayant aucune relation avec la physique même des phénomènes en cause, ce modèle permet de déduire certaines données d'ordre temporel, comme le taux moyen, pour l'enveloppe, de passage par certains niveaux (enveloppe level crossing), la distribution des largeurs d'impulsions et sur la répartition des espaces entre les impulsions. Lui aussi admet comme variables d'entrée V_{RMS} et V_d .

Enfin, Giordano [16] a apporté à cette technique une certaine légitimité physique: nous n'avons pas cru nécessaire de refaire une application pratique de ce modèle, ce travail ayant donné des résultats mitigés dans le cas du bruit généré par les lignes à haute tension [17].

C) Modèle CCIR (ou atmosphérique)

Sans doute le plus utilisé jusqu'ici, il a trouvé un champ d'application assez général pour la caractérisation du bruit atmosphérique et l'on a tenté d'en élargir le domaine d'application à d'autres sources de bruit, et ce avec un succès relatif. Tout à fait empirique, il s'appuie sur une technique de construction géométrique par laquelle deux segments de droite, sur l'APD, l'un pour la composante impulsionsnelle, l'autre pour la composante de Rayleigh, sont joints par un arc de cercle. Le détail de cette construction et des résultats qui en découlent est donné à l'appendice A.

Ce modèle utilise, dans le strict cas du bruit atmosphérique, les variables d'entrée V_{RMS} et V_d et constitue, il faut le reconnaître, un cas particulier d'un modèle plus élaboré, soit celui du NBS [18], lequel fait intervenir une dimension supplémentaire connue comme L_d^* . Spaulding et al. [19] ont évalué celle-ci pour le cas du modèle atmosphérique et ont établi la relation suivante:

$$L_d = 1,69 V_d + 0,72 \quad (2-6)$$

Cette précision est nécessaire ici car plusieurs auteurs ont tenté d'appliquer le modèle atmosphérique à diverses autres sources de bruit, en laissant tomber un paramètre qui aurait été d'une grande utilité dans un programme de recherche de modèle optimal.

* L_d est définie de la façon suivante: c'est la différence exprimée en dB entre V_{RMS} et V_{log} pour l'enveloppe [19].

Akima [8] a mis au point un programme qu'il nous a été loisible d'utiliser et dont nous donnons l'essentiel à l'appendice A. La valeur du paramètre L_d est définie comme nous l'avons dit plus haut et donnée par la relation (2-6). C'est ce même programme que l'équipe de Lauber a utilisé pour tenter de reproduire les APD mesurées lors des expériences d'Applegrove [2] portant sur le bruit de lignes de transmission. Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir sur ce sujet précis.

D) Modèle log-normal

Le modèle log-normal, développé par Omura [13], est particulièrement intéressant pour plusieurs raisons. Il met l'accent sur la composante impulsionnelle du bruit, la plus gênante dans les systèmes de communications numériques. Il a un caractère analytique et est relativement simple de manipulation. L'expérience montre enfin que c'est celui qui, on le verra plus loin, représente le mieux les caractéristiques du bruit de lignes de transmission.

Nous avons fait usage de ce modèle et nous reportons à l'appendice B le traitement mathématique complet qu'en a fait Omura [13], de même que les éléments nécessaires au traitement numérique de ce modèle. Ici, nous nous bornerons à en donner la définition de base et les relations qu'ont les mesures généralement effectuées sur le terrain entre elles et avec l'APD.

Ainsi, on définit le bruit $a(t)$ comme étant un processus à bande étroite:

$$a(t) = Ae^{n(t)} \sin[\omega_0 t + \theta(t)] = E(t) \sin[\omega_0 t + \theta(t)] \quad (2-7)$$

où l'enveloppe $E(t)$ - l'élément qui nous intéresse ici - est le produit de

A , une constante, et de $e^{n(t)}$

où $n(t)$ = processus gaussien à moyenne nulle et de variance σ_n^2 .

L'auteur établit des relations pour déterminer, à l'aide de E_{RMS} , E_{AV} (donc V_d), A et σ_n^2 , et l'APD. De plus, dans ce cas-ci, on peut aussi prédire le taux moyen de passage (average crossing rate), de même que la distribution de l'intervalle entre impulsions (pulse spacing distribution).

Nous avons donc utilisé ce modèle pour reprendre à notre compte des calculs déjà effectués par Lauber [2] dans le cas de bruit généré par des lignes à haute tension.

E) Modèles physico-statistiques de Middleton [3-7,21,22]

C'est sans aucun doute la plus importante contribution apportée par un chercheur dans ce domaine depuis longtemps. L'auteur s'appuie sur la réalité des phénomènes physiques et sur un outillage mathématique très raffiné; le sujet est présenté en détail au troisième chapitre pour les fondements et le traitement mathématique, et au quatrième chapitre pour le traitement numérique de certaines APD typiques. Ces deux éléments constituent le coeur du présent rapport.

Nous aurions pu reprendre à notre compte plusieurs autres modèles, avec ou sans variantes, ne serait-ce que pour acquérir une certaine dextérité dans le maniement même de ceux-ci. Mais nous avons cru sage de faire davantage porter nos efforts sur les modèles CCIR, log-normal et celui de Middleton parce qu'ils semblaient plus appropriés pour décrire les caractéristiques réelles observées dans le cas de bruits de ligne à haute tension.

Pour une couverture plus générale, nous renvoyons encore le lecteur à la synthèse de Spaulding [14].

2.3 APPLICATION DES MODELES CCIR ET LOG-NORMAL A UNE SERIE D'EXPERIENCES SUR UNE LIGNE A HAUTE TENSION

2.3.1 Description des conditions experimentales

Une équipe de chercheurs du CRC, dirigée par W. Lauber, a entrepris il y a quelques années une campagne de mesures sur les caractéristiques du bruit généré par les lignes de transport de l'énergie électrique à haute tension et déjà certains résultats ont été publiés par Lauber [2] dans le cas du projet de 775 kV de Applegrove.

L'objectif était en partie de chercher à identifier lequel des modèles du CCIR (atmosphérique) ou log-normal convenait le mieux pour reproduire les APD mesurées dans une certaine gamme de fréquence, dans différentes conditions de température, d'humidité, bref, à partir de mesures de tension V_{RMS} et V_d . En utilisant une méthode de comparaison classique, soit celle dite de la différence RMS*, il pouvait conclure à la plus ou moins grande applicabilité

$$* \text{ différence RMS} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{[P_0(V_i)_{MODELE} - P_0(V_i)_{MESUREE}]^2}{N}} \text{ en \%} \quad (2-8)$$

de tel ou tel modèle.

Nous avons cru bon de répéter ces mêmes expériences à partir des valeurs fournies et publiées par l'auteur lui-même et ce, s'appuyant sur des programmes d'analyse numérique que nous avons élaborés ou qu'il nous a aimablement fournis, et pour lesquels nous le remercions ici.

Par la même occasion, nous avons cru bon d'insérer le modèle NBS dans notre programmation car le modèle CCIR ne constitue qu'un cas particulier de ce dernier.

De plus, cette procédure a été rendue nécessaire à cause de la difficulté que nous avons observée à faire coïncider le modèle CCIR avec les résultats expérimentaux. Rappelons ici que ce qui caractérise le modèle CCIR, c'est une valeur spécifique du paramètre L_d , lequel est défini par la relation (2-6). Cette dernière a été établie par Spaulding pour caractériser le bruit atmosphérique et ne tient pas nécessairement dans d'autres cas. Il était relativement facile de retrouver dans la famille des courbes contenues dans la monographie 23 du NBS [18], des valeurs différentes et compatibles de L_d (lequel n'a pas été mesuré dans l'ensemble des expériences auxquelles nous référons) et qui permettaient de faire coïncider l'une ou l'autre des courbes fournies par le modèle du NBS. Poussant un peu plus loin notre investigation sur les caractéristiques mêmes du modèle CCIR, en regard de l'intersection des droites qui définissent les régions dites de bruit de Rayleigh et de bruit impulsionnel, nous avons trouvé que le modèle CCIR ne permettait pas d'obtenir un point d'intersection dont l'abscisse P_i excède 23.6 % (figure 2-1-a).

Le tableau 2-1 donne la valeur P_i en fonction du paramètre V_d et la figure 2-1-b présente ces mêmes résultats sous la forme d'un graphique.

Les figures 2-2 et 2-3 présentent les résultats obtenus en superposant les données obtenues avec les modèles CCIR, log-normal (LN) et NBS sur les résultats expérimentaux de Lauber [2].

V_d (dB)	P_i (%)
1.05	23.6
1.5	23.6
2	23.6
5	23.3
10	22.8
15	21.5
20	19.3
25	17.1
30	14.3
40	11.0

Tableau 2-1

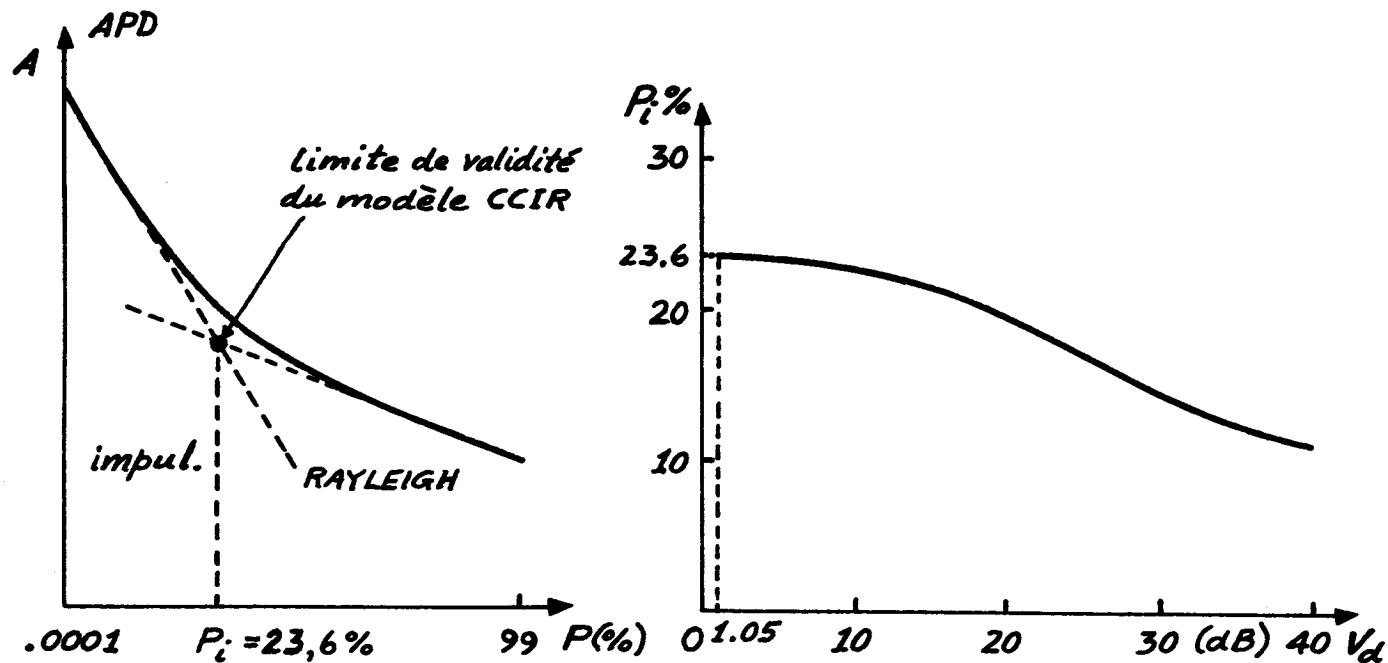


Figure 2-1. a) Limite de validite du modele CCIR.

b) Valeur de P_i en fonction de V_d .

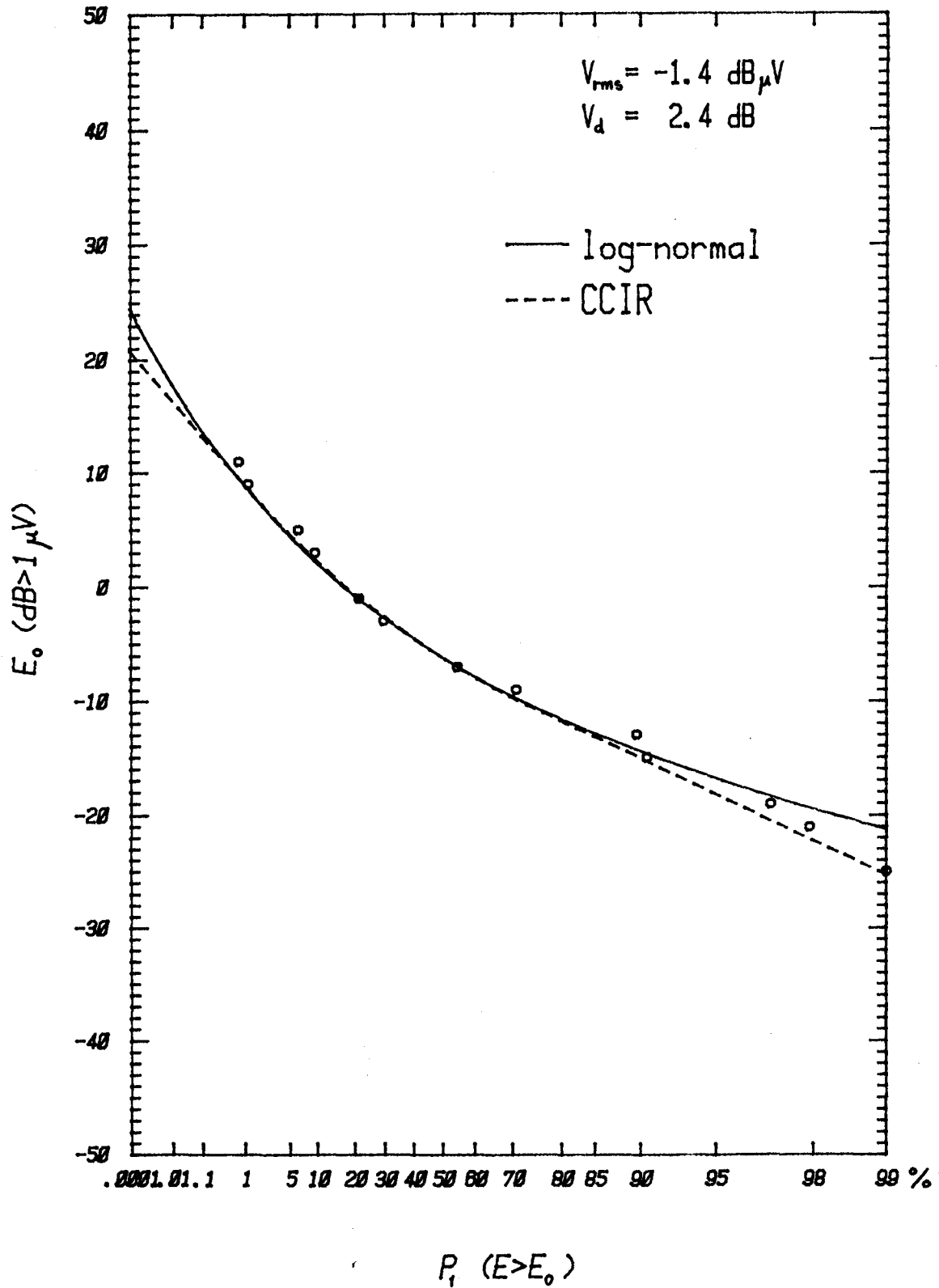


Figure 2-2. Superposition des données obtenues avec les modèles log-normal et CCIR sur les résultats expérimentaux de Lauber [2].

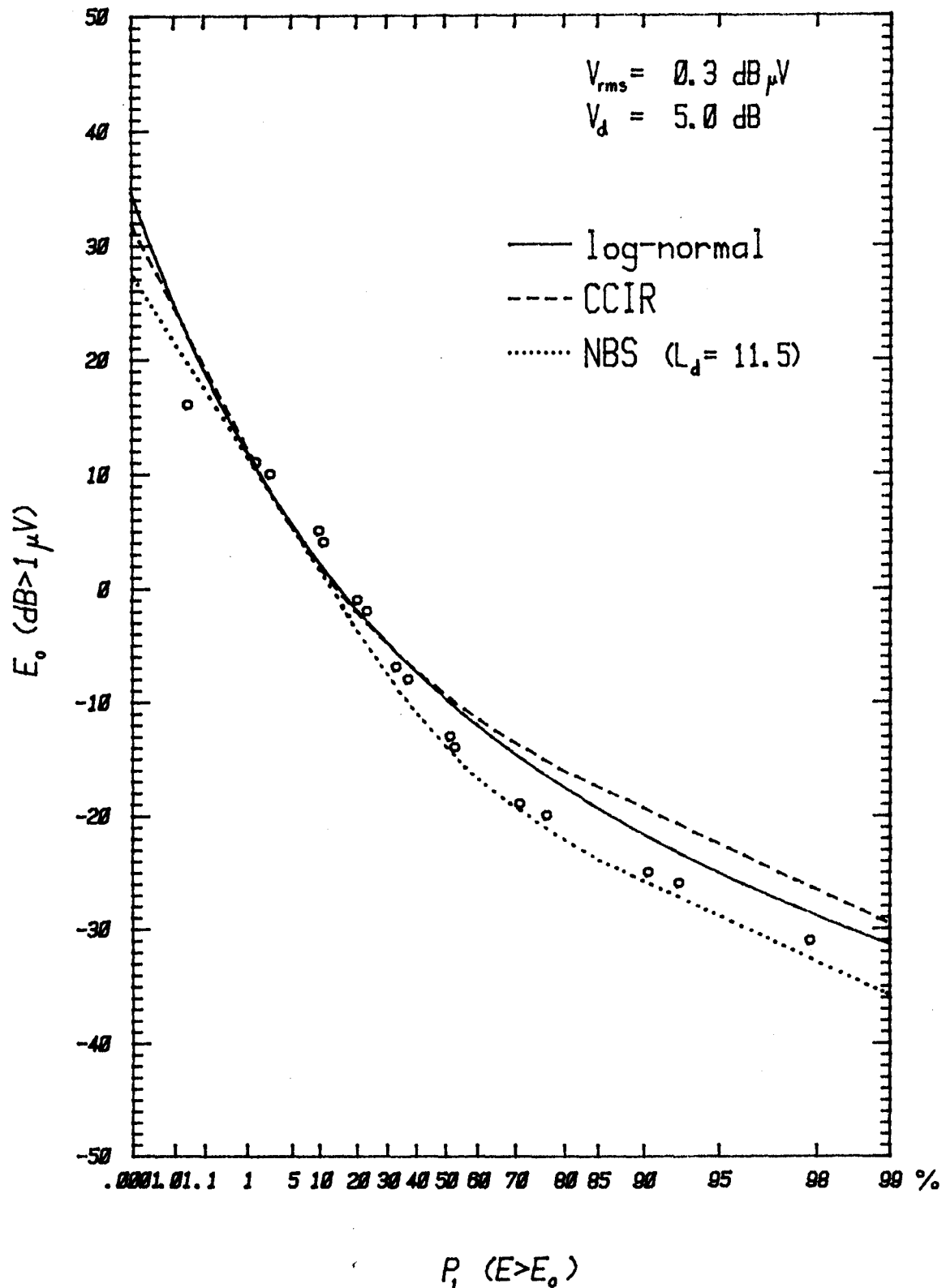


Figure 2-3. Superposition des données obtenues avec les modèles log-normal, CCIR et NBS sur les résultats expérimentaux de Lauber [2].

D'après ces résultats, la seule APD mesurée qui possède un P_1 acceptable (environ 22%) pour justifier l'emploi du modèle CCIR est celle du conducteur sec de la figure 2-3. Il n'est donc pas étonnant que ce soit elle qui présente la plus faible différence RMS (entre APD mesurée et APD calculée) de toutes les APD (voir tableau 3, p. 1261 [2]).

La modélisation des autres APD requiert un modèle plus général, c'est-à-dire un modèle nécessitant, en plus des paramètres V_d et V_{RMS} , le paramètre L_d qui n'est plus relié linéairement à V_d . Le modèle du NBS, dont le modèle CCIR n'est qu'un cas particulier, permet de modéliser avec une plus grande précision ces APD comme nous avons pu le constater en utilisant la monographie 23 du NBS [18]. *Il ne fait aucun doute que le modèle du NBS est supérieur au modèle du CCIR et au modèle log-normal pour caractériser les divers types de bruit étudiés dans l'article cité plus haut.*

2.4 CONCLUSIONS

Trois commentaires découlent donc de cette comparaison entre les différents modèles dans le cas spécifique des APD traitées:

1°) le modèle NBS (à trois paramètres), de toute évidence, colle davantage avec la réalité des caractéristiques du bruit étudié.

2°) le critère fréquemment utilisé pour retenir le modèle optimal, soit celui de la différence RMS, est particulièrement discutable dans le cas d'APD de bruit à forte composante impulsionnelle. *Le poids accordé à cette portion de la courbe est nettement insuffisant* alors que cette composante devient de loin la plus gênante dans l'analyse du comportement de systèmes de communications en milieu bruité.

3°) en dépit de la simplicité relative du traitement des données qu'exige le modèle log-normal, celui-ci demeure une construction de l'esprit qu'un modèle qui s'appuie sur la réalité des phénomènes physiques aura tôt fait de confiner à l'oubli.

A moins que l'on ne puisse pas développer les outils suffisamment simples et nécessaires à la mise en oeuvre d'un modèle basé sur la réalité des phénomènes physiques, il est vraisemblable que les modèles présentés dans ce chapitre ne seront plus utilisés.

Chapitre 3

MODELE PHYSICO-STATISTIQUE DU BRUIT RADIO

3.1 INTRODUCTION

Tel que nous l'avons présenté au chapitre précédent, il est difficile, voire impossible, de songer à modéliser de façon satisfaisante le bruit radio si l'on s'appuie exclusivement sur une modélisation empirique. En effet, les paramètres de ce modèle ne cherchent pas à représenter en soi les processus ou mécanismes générateurs du bruit radio mais visent *uniquement* à décrire approximativement, à partir d'équations empiriques, les résultats expérimentaux observés. Il est donc inévitable que si les mécanismes mis en jeu dans la génération d'un bruit quelconque observé expérimentalement sont différents de ceux pour lesquels une série de paramètres empiriques avaient été déduits, tout le processus doit alors être repris. Il semble, de plus, assez évident que cette approche devient inutilisable pour prédire la *performance* d'un système de communications en présence de bruit car elle ne peut s'adapter aux variations des diverses sources génératrices du bruit, facteur limitatif fondamental de tout système de communications.

L'approche empirique est, en revanche, à peu près la seule utilisée actuellement dans la pratique parce qu'elle est relativement simple, se prête très aisément à une mise en oeuvre sur ordinateur et que les paramètres qu'elle nécessite sont assez faciles à obtenir expérimentalement. Les appareils de mesure présentement disponibles sur le marché sont d'ailleurs conçus pour mesurer ces paramètres, à savoir V_d , V_{RMS} et L_d . Cela n'empêche cependant pas les utilisateurs et chercheurs dans ce domaine d'être très conscients des limitations fondamentales de cette approche et de souhaiter que une (ou des) méthode alternative puisse être disponible pour caractériser beaucoup plus adéquatement l'environnement radio.

La raison fondamentale qui paraît justifier jusqu'à maintenant que l'on n'ait à peu près pas encore, dans la majorité des travaux pratiques, uti-

lisé l'approche d'un modèle physico-statistique semble être sa complexité mathématique et, par voie de conséquence, l'incapacité à cerner et calculer les paramètres qui devraient être utilisés. L'objectif de ce chapitre est donc de présenter, dans la mesure du possible, les éléments strictement indispensables à une modélisation du bruit radio sous l'approche physico-statistique et de tenter de dégager une certaine signification des paramètres constituant les modèles proposés. Cela est fait dans l'optique où nous croyons avoir réussi, au moins partiellement, à sortir l'essentiel d'une prolifération assez extraordinaire des travaux de modélisation physico-statistique de Middleton [3-7,21-22] et de reproduire les résultats numériques qui y sont présentés.

Nous ne reprendrons pas en entier l'ensemble des considérations qui a conduit Middleton à proposer un certain nombre de paramètres, ces derniers étant d'ailleurs issus de développements mathématiques très profonds et, à première vue, si complexes qu'ils peuvent, à toute fin pratique, dérouter la quasi-totalité des utilisateurs potentiels. Nous concentrons plutôt nos efforts sur l'*utilisation* de ces paramètres dans une situation concrète de modélisation de bruit radio et sur *leurs significations physiques* dans le contexte où les utilisateurs sont intéressés à obtenir les meilleurs résultats possibles en appliquant cette modélisation. Nous nous limiterons donc à montrer ce que nous croyons être l'essentiel de ces travaux et, pour ce faire, nous ne nous référerons qu'à quelques publications de Middleton [5,21], les intéressés pouvant très facilement consulter l'ensemble des autres travaux.

3.2 MODELES PHYSICO-STATISTIQUES

La prédiction de la performance d'un système de communications en réception en fonction d'une certaine classe de signaux à l'émission ne peut être faite d'une façon exacte que si l'on connaît analytiquement les expressions des interférences aléatoires auxquelles il est soumis. Cela revient à dire que l'on doit, généralement, posséder plus d'informations sur les mécanismes de génération de cette interférence (bruit) que celles que l'on peut obtenir directement par la mesure de paramètres. On a donc effectivement besoin d'un modèle qui, en plus de donner des résultats comparables à ceux obtenus expérimentalement, doit avoir des paramètres significatifs directement reliés aux mécanismes physiques qui sont à la source même de bruit engendré. Ces paramètres doivent également

pouvoir être interprétés selon la nature des sources de bruit à l'étude, leurs distributions spatiale et temporelle, les conditions de propagation et tout autre effet qui puissent réagir sur le système étudié.

Des travaux divers [15,23-26] ont envisagé le problème de la modélisation du bruit radio avec une approche physico-statistique et des résultats plus ou moins utilisables pratiquement ont été obtenus. Nous ne les discuterons pas dans ce chapitre car il est nettement évident que le modèle de Middleton [5] surpasse tout ce qui a été disponible auparavant. Non seulement le modèle de Middleton est-il canonique (i.e. qu'il peut servir pour toutes les formes de bruit sans modification du formalisme mathématique adopté) mais il est également celui qui est le mieux documenté, qui présente le plus d'intérêt, qui est le plus susceptible d'être mis en oeuvre d'une manière universelle et qui introduit, en même temps que les paramètres, une signification et une justification physique très profondes. Nous nous limitons donc seulement aux travaux de Middleton pour les fins du présent contrat.

3.2.1 Définitions

Un processus d'interférence possède, pour la quasi-totalité des cas rencontrés en pratique, une largeur de bande telle que le récepteur l'assimile à un processus à bande étroite autour d'une fréquence centrale f_0 . Ceci découle évidemment du fait que la largeur de bande du récepteur est très inférieure à sa fréquence centrale et que celui-ci *assume* que le processus peut être caractérisé par une *amplitude* et une *phase*.

On distingue néanmoins deux grandes classes d'interférence, à savoir les bruits de classes A et B. Les définitions sont les suivantes:

bruit de classe A: bruit résultant de sources dont le spectre à l'émission est plus étroit que la largeur de bande du récepteur. Il s'agit dans ce cas d'une interférence bande étroite, i.e. dont le spectre est moins large que celui balayé par le récepteur. Pour ce type de bruit, les transitoires générés dans l'étage d'entrée (front-end) du récepteur sont négligeables en terme des constantes de temps susceptibles de perturber la réception.

bruit de classe B: bruit résultant de sources dont le spectre à l'émission est plus large que celui accepté par l'étage d'entrée du récepteur. Dans ce cas, les transitoires générés par le bruit dans le récepteur, que ce soit en charge ou en décharge, ont un effet significatif sur la perfor-

mance globale du récepteur.

On peut également mentionner que le cas le plus général, c'est-à-dire un bruit résultant de la somme des effets de sources dont certaines sont de classe A et d'autres de classe B, peut être noté *bruit de classe C*. Il ne s'agit cependant pas d'un cas *fondamental* car on montre [5] que ce type de bruit peut être traité comme un bruit de classe B pour lequel on a modifié certaines valeurs de paramètres.

Dans l'étude analytique et critique de ce chapitre, nous ne considérerons donc que les bruits de classes A et B en sachant que la connaissance de ceux-ci permet une connaissance totale de n'importe quel environnement électromagnétique.

On notera que l'on fait appel aux termes largeur de bande du récepteur, largeur de bande de bruit, étage d'entrée, récepteur, etc. Afin d'être concis et précis par la suite, on peut utiliser la figure 3-1 pour expliciter chacun de ces termes et préciser, mathématiquement, ce que veulent dire classes A et B.

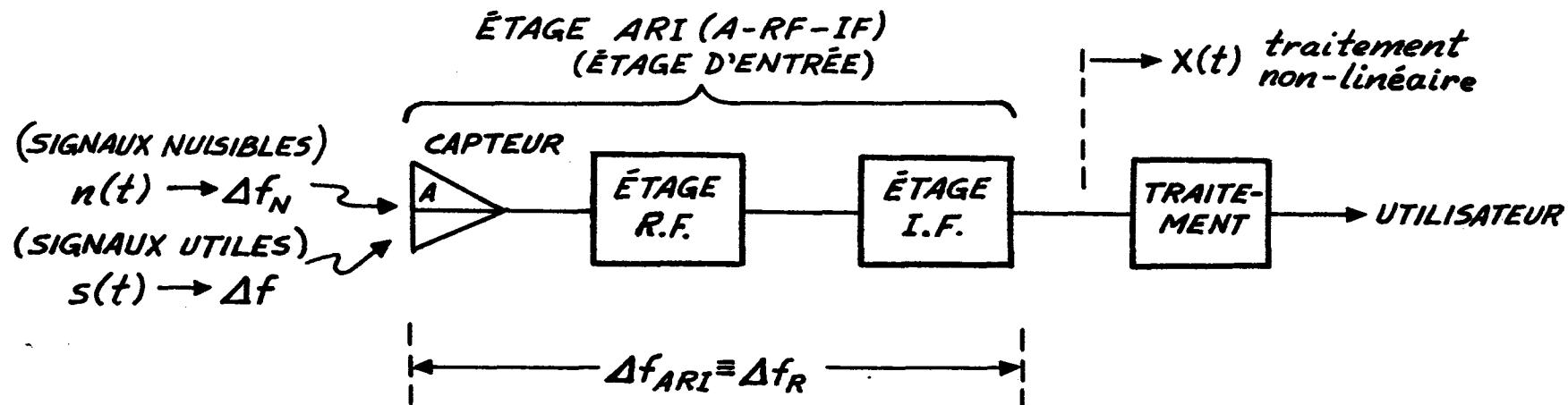
3.2.2 Hypothèses fondamentales

Avant de discuter à fond chacune des caractéristiques du modèle physico-statistique correspondant à un bruit de classes A ou B, il est important de réaliser quels sont les postulats fondamentaux qui sont à l'origine du modèle de Middleton. Les bruits à l'étude n'étant pas gaussiens (auquel cas la solution classique du filtre adapté s'appliquerait intégralement), il est supposé que:

1°) les sources de bruit (ou d'interférence) sont à des endroits différents et se répartissent *dans l'espace* suivant une loi de Poisson.

2°) les temps d'émission de ces sources de bruit sont répartis dans le temps suivant une loi de Poisson également.

Autrement dit, on suppose qu'il existe un très grand nombre de sources d'interférence possibles et que, même si elles ont toutes à peu près la même forme d'onde, elles sont susceptibles de différer dans leur *amplitude*, leur *durée*, leur *fréquence*. Ces paramètres descriptifs sont supposés être distribués aléa-



Bruit de classe A
 $\Delta f_N \leq \Delta f_{ARI} (\equiv \Delta f_R)$

Bruit de classe B
 $\Delta f_N > \Delta f_R (\equiv \Delta f_{ARI})$

Δf_N : largeur de bande du bruit incident $n(t)$

Δf : largeur de bande des signaux utiles $s(t)$

Δf_R : largeur de bande de l'étage A-RF-IF du récepteur.

Figure 3-1. Conception d'un récepteur au sens de Middleton [5] et définitions des classes de bruit.

toirement. Physiquement, cela peut être interprété comme étant un ensemble de sources totalement indépendantes en amplitude et en temps.

3.3 LA FONCTION CARACTERISTIQUE

L'élément clef de la modélisation physico-statistique de Middleton est la "fonction caractéristique" du bruit à l'étude. Il n'est pas particulièrement évident de comprendre la signification physique, pas plus d'ailleurs que la dérivation mathématique, de cette fonction et l'objectif de cette section est de donner au lecteur l'ensemble de notre perception des principales étapes qui conduisent à la définition de cette fonction. Il n'est pas impératif, pour mettre en oeuvre sur ordinateur le modèle de Middleton, de comprendre l'exposé de cette section mais nous croyons qu'elle le devient si l'on veut obtenir une compréhension profonde de la signification physique des paramètres que l'on doit manipuler.

3.3.1 Dérivation d'une fonction caractéristique

Supposons un récepteur (dont l'étage ARI est linéaire) situé dans un environnement radio quelconque. On peut considérer que les sources de bruit qui affecteront sa performance sont celles dont les amplitudes sont suffisantes pour excéder le niveau du bruit thermique. Ces sources contribueront au bruit total reçu par le récepteur et l'on note Λ le domaine qui les englobe toutes.

Le domaine Λ peut être scindé en un certain nombre de plus petits secteurs spatiaux que l'on note $\Delta\lambda_j$. Ainsi, dans chacune de ces "petites sections spatiales" de Λ , on peut supposer qu'il y a N émissions indépendantes de bruit aléatoire sur un intervalle de temps \hat{e} .

Pour un temps d'observation t , le bruit provenant d'une source dans la j ème section spatiale a une forme d'onde, à la sortie du récepteur linéaire, qui peut être représentée comme

$$U(t, \hat{e}, \theta) \tag{3-1}$$

dans laquelle θ est une variable aléatoire qui contient l'ensemble des paramètres aléatoires *indépendants du temps* requis pour caractériser adéquatement la forme d'onde reçue, typiquement la valeur moyenne de l'amplitude du bruit.

Le récepteur effectue une superposition de l'ensemble des signaux reçus simultanément pendant la période d'observation t et la forme d'onde résultante du bruit provenant des N sources dans la $j^{\text{ième}}$ zone est donc

$$X(t)_j = \sum_{n=0}^N U(t, \hat{\epsilon}, \theta)_n \quad (3-2)$$

L'hypothèse de sources indépendantes, réparties spatialement selon une distribution de Poisson, permet d'écrire que la probabilité conditionnelle qu'il y ait exactement N événements (dans notre cas, les événements sont les émissions de bruit), qui se produisent dans le secteur spatial $\Delta\lambda_j$ sur un intervalle de temps $\Delta\hat{\epsilon}$ pour un temps d'observation donné t' , est:

$$P_j(N|t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j) = \frac{1}{N!} [\rho(\Delta\lambda_j, \Delta\hat{\epsilon}) \cdot \Delta\lambda_j]^N e^{-(\rho \cdot \Delta\lambda_j)} \quad (3-3)$$

dans laquelle $\rho(\Delta\lambda_j, \Delta\hat{\epsilon})$ est le nombre moyen d'émissions de bruit se produisant dans un intervalle spatial $\Delta\lambda_j$ sur un intervalle de temps $\Delta\hat{\epsilon}$.

Analytiquement, la façon de caractériser des fonctions de variables aléatoires discrètes est d'introduire une densité de probabilité. Si l'on a une fonction de deux variables non nécessairement simultanées, elle devient une densité de probabilité conditionnelle. Si elle est en plus soumise à une autre variable, elle devient une densité de probabilité conditionnelle conjointe. Dans notre cas, on peut définir la densité de probabilité conditionnelle conjointe pour que les N événements se produisent dans l'intervalle de temps $\Delta\hat{\epsilon}$ pour un intervalle spatial $\Delta\lambda_j$ et un temps d'observation t' , soit:

$$w_N(X_1, t_1, \dots, X_N, t_N | N, t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j) \quad (3-4)$$

La distribution conjointe est la somme de tous les événements compte tenu de leur probabilité. On exprime donc la distribution conjointe $W_j(X_1, t_1, \dots, X_N, t_N | t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j)$ telle que les N formes d'ondes reçues par le récepteur, observées à sa sortie au temps t' et en provenance du secteur spatial $\Delta\lambda_j$ comme:

$$\begin{aligned} W_j(X_1, t_1, \dots, X_N, t_N | t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} P_j(N|t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j) \cdot w_N(X_1, t_1, \dots, X_N, t_N | N, t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j) \end{aligned} \quad (3-5)$$

Dans la théorie statistique des signaux, on définit souvent la fonction caractéristique $\Phi_X(a)$ comme l'espérance mathématique d'une exponentielle contenant la variable aléatoire X , soit

$$\phi_X(a) = E[e^{iax}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx \quad (3-6)$$

où $f(x)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire.

Comme on le constate, la fonction ainsi définie est la transformée de Fourier de la densité de probabilité. On calcule alors la densité à partir de la fonction caractéristique en prenant la transformée de Fourier inverse, soit:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(a)e^{-iax} da \quad (3-7)$$

L'approche de Middleton ne fait pas exception à cette étape car il introduit la fonction caractéristique de $W_j(X_N, t_N | t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j)$ comme étant $F_j(i\xi | t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j)_X$

où ξ est la variable de transformation

et X est la valeur instantanée de la forme d'onde.

Ainsi:

$$F_j(i\xi | t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j)_X = \sum_{N=0}^{\infty} P_j(N | t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j) \cdot F_N(i\xi_1, t_1, \dots, i\xi_N, t_N | N, t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j) \quad (3-8)$$

dans laquelle

$F_N(i\xi_1, t_1, \dots, i\xi_N, t_N | N, t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j)$ est évidemment, si l'on compare (3-8) à (3-6), la fonction caractéristique correspondant à la densité de probabilité définie par (3-4). Or l'expression de F_N découle naturellement du fait que l'on a un ensemble de N variables aléatoires qui peuvent être utilisées pour caractériser une seule variable X . Avec la définition d'une fonction caractéristique (3-6), on doit conclure que pour l'ensemble des variables θ , auquel correspond une forme d'onde, on peut définir une distribution conjointe $W(\theta_N)$ telle que pour un temps d'observation donné t' , les N variables possibles seront utilisables pour caractériser un signal donné par une transformée de Fourier d'ordre N de leur distribution, soit (avec 3-6):

$$F_N(i\xi, t_1, \dots, i\xi_N, t_N | N, t', \Delta\hat{\epsilon}, \Delta\lambda_j) = \left\{ e \left[i \sum_{n=0}^N \xi_n U(t, \hat{\epsilon}, \theta)_n \right] \right\}^N \quad (3-9)$$

$$= \int W(\theta_N) e^{\left\{ i \sum_{n=0}^N \xi_n U(t, \hat{\epsilon}, \theta)_n \right\}} d\theta \quad (3-10)$$

L'équation (3-10) correspond à la fonction caractéristique dans le cas d'une densité de probabilité au sens de (3-6). Si l'on considère maintenant une distribution telle qu'en (3-8), on obtient alors la fonction caractéristique d'ordre n pour le $j^{\text{ème}}$ intervalle spatial, soit:

$$F_j(i\xi|\Delta\hat{\epsilon},\Delta\lambda_j) = e^{\left\{ \rho(\Delta\lambda_j, \Delta\hat{\epsilon}) \cdot \Delta\lambda_j \left\langle e^{i \sum_{n=0}^N \xi_n U(t, \hat{\epsilon}, \theta)} - 1 \right\rangle_{\theta} \right\}} \quad (3-11)$$

où les parenthèses $\langle \rangle_{\theta}$ sont utilisées pour montrer qu'une valeur moyenne est établie sur les valeurs possibles de θ .

En comparant l'équation (3-11) à celle présentée par Middleton [5, éq. 2-1, p. 113] on réalise que ce dernier y a apporté quelques simplifications additionnelles. En particulier, les points suivants sont utilisés:

- 1°) on peut représenter une exponentielle par une décomposition en série;
- 2°) le premier terme de l'exponentielle de (3-11) peut être factorisé;
- 3°) pour un très grand nombre de secteurs spatiaux, ou, autrement dit, pour un secteur correspondant pratiquement à une direction donnée ($j \rightarrow \infty$), les Δx de la formulation deviennent des dérivées dx ;
- 4°) sous réserve de l'approximation de (3°), la fonction caractéristique de tous les signaux provenant de l'ensemble des secteurs est équivalente au produit de toutes les fonctions, soit:

$$F(i\xi) = \prod_j F_j(i\xi|\Delta\hat{\epsilon},\Delta\lambda_j) \quad (3-12)$$

d'où, avec (3-11):

$$F(i\xi)_X = e^{\left\{ \int_{\hat{\epsilon}, \Lambda} \rho(\lambda, \hat{\epsilon}) \cdot \left\langle e^{\left\{ i \sum_{n=1}^N \xi_n U(t, \hat{\epsilon}, \theta) \right\}} - 1 \right\rangle_{\theta} d\lambda d\hat{\epsilon} \right\}} \quad (3-13)$$

3.3.2 La fonction caractéristique du premier ordre

L'optique du modèle de Middleton n'est pas de déterminer la fonction caractéristique du $n^{\text{ème}}$ ordre telle que (3-13) mais *plutôt de caractériser l'amplitude instantanée de X* , i.e. du signal d'interférence reçu. En fait, compte tenu qu'il est maître du temps d'échantillonnage du récepteur, il peut fixer la période d'observation T (et par conséquent $\hat{\epsilon}$) de façon à avoir $N=1$

dans (3-13).

Dans ce cas, on obtient la fonction caractéristique du 1^{er} ordre qui est l'*élément majeur* du modèle de Middleton, à savoir:

$$F_1(i\xi)_X = e^{\left\{ \int_{\hat{\epsilon}, \Lambda} \rho(\lambda, \hat{\epsilon}) \langle e^{i\xi U(t, \hat{\epsilon}, \theta)} - 1 \rangle_{\theta} d\lambda d\hat{\epsilon} \right\}} \quad (3-14)$$

L'équation (3-14) est celle du modèle statistique de base et la signification des paramètres est donnée ci-après:

$\hat{\epsilon}$: est une époque (ou un temps) qui indique à l'observateur (avec le récepteur), qui "regarde" le phénomène au temps t , quand une source est susceptible d'émettre.

λ : est un paramètre géométrique combiné de la source et du récepteur dans la région Λ . En fait, en coordonnées sphériques, $d\lambda = drd\phi$ pour une surface et $d\lambda = drd\theta d\phi$ pour un volume.

$\rho(\lambda, \hat{\epsilon})$: est la densité conjointe du processus d'interférence supposée comme étant une répartition de Poisson dans le temps et dans l'espace.

$\langle \rangle_{\theta}$: signifie qu'une moyenne de l'ensemble des paramètres qui peuvent caractériser la source (amplitude, durée, etc.) est considérée.

$U(t, \hat{\epsilon}, \theta)$: est la forme d'onde typique des sources de bruit observée après l'étage ARI du récepteur.

3.4 HYPOTHESES PRATIQUES

La fonction caractéristique du 1^{er} ordre (éq. 3-14) est complexe même si l'on a effectué quelques simplifications. On constate, en particulier, que l'application pratique du modèle de Middleton ne nécessite pas d'*éléments temporels comme tels*. Il faut donc réaliser que des éléments additionnels doivent être introduits si l'on désire obtenir une statistique sur l'*amplitude et la phase des interférences uniquement*. Cette section a pour but de montrer quelles sont les hypothèses supplémentaires nécessaires et comment il faut les comprendre.

3.4.1 Composantes en phase et en quadrature

L'intérêt de la modélisation se situe dans la caractérisation de l'enveloppe du signal interférent $X(t)$. Ce dernier est toujours à bande étroite dans la mesure où le récepteur est aussi à bande étroite par rapport à sa fréquence centrale et, en conséquence, on peut prendre en considération des nouvelles variables aléatoires X_C et X_S qui représentent les variations lentes des composantes en phase et hors-de-phase du signal X :

$$X(t) = X_C(t) \cos \omega_0 t + X_S(t) \sin \omega_0 t \quad (3-15)$$

où $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 étant la fréquence centrale de l'étage IF du récepteur.

On peut écrire (3-15) comme:

$$X(t) = \operatorname{Re}\{(X_C - iX_S)e^{i\omega_0 t}\} \quad (3-16)$$

$$= \operatorname{Re}\{Ee^{i(\omega_0 t - \psi)}\} \quad (3-17)$$

$$\text{où} \quad E = \sqrt{X_C^2 + X_S^2}, \quad \psi = \tan^{-1} \frac{X_S}{X_C} \quad (3-18)$$

l'amplitude E et la phase ψ sont essentiellement ce que l'on recherche par la suite et il vaut la peine de bien approfondir la signification de (3-17). Cette équation peut également s'écrire sous la forme:

$$X(t) = \operatorname{Re}\{\underline{X}_0 e^{i\omega_0 t}\} \quad (3-19)$$

$$\text{où} \quad \underline{X}_0 = X_C - iX_S = Ee^{-i\omega_0 \psi} \quad (3-20)$$

Si l'on se rappelle maintenant la définition de $X(t)$ (éq. 3-2), on se rend compte que le développement en composantes orthogonales s'applique également à une forme d'onde $U(t, \hat{\epsilon}, \theta)$, à savoir:

$$U_C = U(t, \hat{\epsilon}, \theta) \cos \psi \quad (3-21)$$

$$U_S = U(t, \hat{\epsilon}, \theta) \sin \psi \quad (3-22)$$

Dans ses textes, Middleton particularise les termes en quadrature (éq. 3-21 et 3-22) en fonction des paramètres physiques possibles, soit:

$$U_C = B_0 \cos(\phi'_S + \mu_d \hat{\epsilon} \omega_0) \quad (3-23)$$

$$U_S = B_0 \sin(\phi'_S + \mu_d \hat{\epsilon} \omega_0) \quad (3-24)$$

dans lesquelles:

B_0 : l'enveloppe du bruit observée en fonction du nombre, du temps et du lieu des sources en négligeant l'effet Doppler possible entre les sources et l'observateur ($B > 0$).

ϕ'_S : une phase variable *composite* résultant de la géométrie des sources et des déphasages additionnels dus à l'antenne et à l'équipement d'observation.

μ_d : coefficient tenant compte de l'effet Doppler dû au mouvement relatif de l'observateur par rapport aux sources, qui est généralement négligeable.

Sous réserve des conditions exprimées en (3-23) et (3-24), la fonction caractéristique (3-14) bidimensionnelle peut s'écrire comme:

$$F_1(i\xi, i\eta)_{X_C, X_S} = e \left\{ \left\langle \int_{\Lambda} \rho(\lambda, \hat{e}) \left[e^{i\xi U_C + i\eta U_S} - 1 \right] d\lambda d\hat{e} \right\rangle \right\} \quad (3-25)$$

où il est évident que ξ et η représentent les coordonnées cartésiennes. On obtient une version simplifiée de (3-25) si l'on fait appel aux coordonnées sphériques r et ϕ (i.e. bidimensionnelles).

En explicitant les termes

$$\phi'_S = \phi_S + \phi_T + \phi_R \quad (3-26)$$

i.e. un angle de phase de la source (ϕ_S) et les phases géométriques de la source (ϕ_T) et du récepteur (ϕ_R),

$$\text{et} \quad \mu_d = 1 + \varepsilon_d \quad (3-27)$$

où ε_d est un coefficient Doppler normalisé entre la source et le récepteur, on peut écrire la fonction caractéristique du 1^{er} ordre bidimensionnelle en sphérique (notée \hat{F}_1) comme

$$\hat{F}_1(ir, \phi) = e \left\{ \left\langle \int_{\Lambda} \rho(\lambda, \hat{e}) e^{irB_0 \cos[\phi'_S + \mu_d \omega_0 (\lambda + \hat{e}) - \varepsilon_d \omega_0 t - \phi]} - 1 \right\rangle_{\theta} d\lambda d\hat{e} \right\} \quad (3-28)$$

A PARTIR DE L'EQUATION (3-28) ET DE LA PROPRIETE DE LA FONCTION CARACTERISTIQUE EXPLICITEE EN (3-7), IL EST POSSIBLE DE RETROUVER LA DENSITE DE PROBABILITE DE L'AMPLITUDE DE L'ENVELOPPE DU SIGNAL (E) ET DE SA PHASE (ψ).

Ainsi, en prenant une transformée de Fourier inverse bidimensionnelle en polaire, on a:

$$W_1(E, \psi) = \frac{E}{(2\pi)^2} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\phi \hat{F}_1(i, \phi) e^{iEr \cos(\psi - \phi)} \quad (3-29)$$

où E est forcément plus grand que zéro ($E > 0$) et la phase totale représentée par ψ est comprise entre 0 et 2π ($0 \leq \psi \leq 2\pi$).

La distribution de l'amplitude de l'enveloppe du signal est donc:

$$W_1(E) = \int_0^{2\pi} w_1(E, \psi) d\psi \quad (3-30)$$

car une distribution est évidemment égale à l'intégrale d'une densité de probabilité.

3.4.2 Relations avec l'APD

Pour obtenir une représentation près de la réalité physique, on utilise généralement l'APD (amplitude probability distribution) [que nous appellerons "la distribution de probabilité cumulative complémentaire" car elle représente $P_1(E > E_0)$] et c'est cet élément dont nous avons besoin pour effectuer des **COMPARAISONS EXPERIMENTALES**.

Si l'on choisit une certaine valeur de l'amplitude de l'enveloppe E_0 , la probabilité qu'elle soit excédée s'écrit comme:

$$P_1(E > E_0) = \int_{E_0}^\infty W_1(E) dE \quad (3-31)$$

ou encore

$$P_1(E > E_0) = 1 - \int_0^{E_0} W_1(E) dE \quad (3-32)$$

En utilisant (3-32) avec (3-29) et (3-30) et en faisant appel à la relation mathématique

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x) \quad (3-33)$$

où J_0 est une fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro et J_1 en est une d'ordre un,

on peut écrire:

$$P_1(E > E_0) = 1 - \int_0^{E_0} \frac{E}{2\pi} \left[\int_0^\infty r J_0(rE) dr dE \int_0^{2\pi} \hat{F}_1(ir, \phi) d\phi \right] \quad (3-34)$$

ou alors:

$$P_1(E > E_0) = 1 - \frac{E_0}{2\pi} \int_0^\infty J_1(rE_0) dr \cdot \int_0^{2\pi} \hat{F}_1(ir, \phi) d\phi \quad (3-35)$$

L'équation (3-35) est, finalement, la base incontestable du modèle de Middleton. Les résultats qui en découlent proviennent d'une *spécialisation* de cette expression à des cas particuliers tenant compte de la réalité physique à l'étude. C'est ce que nous appellerons la *réduction* de la fonction caractéristique et la section suivante fait justement le point à ce sujet.

3.5 REDUCTION DE LA FONCTION CARACTERISTIQUE

La complexité associée à la modélisation du bruit radio et au calcul de la fonction caractéristique (éq. 3-35) force, jusqu'à un certain point, à introduire des *approximations* basées sur notre perception des phénomènes physiques. C'est la réduction de la fonction caractéristique. Cette section montre comment, à l'aide d'approximations, on peut arriver à établir une statistique valable sur le comportement de l'enveloppe du bruit.

3.5.1 Récepteur à bande étroite

Puisque l'on s'intéresse à la caractérisation de l'enveloppe du bruit, donc aux variations lentes par rapport à la fréquence centrale du récepteur, il est possible de considérer les hypothèses suivantes comme étant applicables à la réalité physique que l'on désire cerner:

1°) l'enveloppe du bruit B_0 et sa phase composite ϕ'_S (voir section 3.4.1) sont des variables dont les variations sont *lentes* par rapport au déplacement spatial caractérisé par λ ;

2°) le nombre moyen d'émissions de bruit $\rho(\lambda, \hat{e})$ dans un intervalle d'espace λ pour un intervalle de temps \hat{e} , est susceptible de varier relativement lentement par rapport à la fréquence centrale du processus caractérisé par l'exposant de (3-28).

Dans ces conditions, on montre [5] que seul le terme oscillatoire correspondant à $m=0$ dans l'expansion en fonctions de Bessel de l'exposant de (3-28), à savoir:

$$e^{ia \cos \phi} = \sum_0 i^m J_m(a) \cos \phi \quad (3-36)$$

contribue de façon significative à la fonction caractéristique, les autres termes donnant des variations beaucoup trop rapides pour être d'intérêt.

On conclut alors que, dans le cas où le processus est véritablement à bande étroite, i.e. $\Delta f_{ARI} \ll f_0$, la fonction caractéristique \hat{F}_1 est indépendante de la variable géométrique azimutale ϕ , et (3-28) s'écrit alors:

$$\hat{F}_1(ir, \phi) = e^{\left\{ \left\langle \int_{\Lambda} \rho(\lambda, \hat{\epsilon}) \left[J_0(rB_0[t, \lambda | \hat{\epsilon}, \theta]) - 1 \right] \right\rangle_{\theta} d\lambda d\epsilon \right\}} \quad (3-37)$$

donc
$$\hat{F}_1(ir, \phi) = \hat{F}_1(ir) \quad (3-38)$$

Sous réserve de la validité de (3-38) pour une interférence donnée, on peut simplifier très appréciablement les résultats obtenus auparavant. Ainsi, l'équation (3-29) se réduit à:

$$W_1(E, \psi) = \frac{E}{2\pi} \int_0^{\infty} r J_0(rE) \hat{F}_1(ir) dr \quad (3-39)$$

donc:
$$W_1(E, \psi) = W_1(E) W_1(\psi) \quad (3-40)$$

Cette dernière équation confirme l'indépendance de la distribution de l'amplitude de l'enveloppe E par rapport à la distribution de sa phase totale ψ . Explicitement, on peut écrire:

$$W_1(E) = E \int_0^{\infty} r J_0(rE) \hat{F}_1(ir) dr \quad (3-41)$$

et
$$W_1(\psi) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad (3-42)$$

L'équation fondamentale (3-35) se ramène alors, avec (3-41) et (3-42), à la forme plus simple:

$$P_1(E > E_0) = 1 - E_0 \int_0^{\infty} J_1(rE_0) \hat{F}_1(ir) dr \quad (3-43)$$

3.5.2 Densité des sources de bruit en surface

Afin de simplifier davantage (3-37) et permettre une solution analytique, on introduit la densité des sources de bruit en surface $\sigma_{\Lambda}(\lambda)$ qui s'exprime en terme du nombre moyen d'émissions $\rho(\lambda, \hat{\epsilon})$ (voir section 3.3.2) comme:

$$\rho(\lambda, \hat{\varepsilon}) = \sigma_{\Lambda}(\lambda) c^2 \hat{\varepsilon} \quad (3-44)$$

où c est la vitesse de la lumière; les autres paramètres ont été définis précédemment.

Il est bien évident que la densité des sources de bruit en surface $\sigma_{\Lambda}(\lambda)$ doit satisfaire à l'une des deux conditions ci-dessous pour qu'une solution à (3-43) soit possible:

- 1°) elle est obtenue expérimentalement et elle peut être substituée dans (3-37);
- 2°) elle est supposée posséder une certaine forme analytique simple et, conséquemment, peut également être introduite dans (3-37).

Généralement, on peut simplement supposer qu'elle est une fonction de la distance radiale, ce qui, en termes du temps $\hat{\varepsilon}$, se traduit par [27]:

$$\sigma_{\Lambda}(\lambda) = A_K \hat{\varepsilon}^{-\mu} \quad (3-45)$$

où A_K est une constante.

Avec (3-45), (3-44) s'écrit sous la forme:

$$\rho(\lambda, \hat{\varepsilon}) = A_K c^2 \hat{\varepsilon}^{(1-\mu)} \quad (3-46)$$

Afin de normaliser la distribution de $\rho(\lambda, \hat{\varepsilon})$, soit

$$\int_0^{\hat{\varepsilon}_{\max}} \rho(\lambda, \hat{\varepsilon}) d\hat{\varepsilon} = 1 \quad (3-47)$$

à l'unité, on doit faire, avec (3-46), la valeur de la constante A_K telle que:

$$A_K = c^{-2} (2 - \mu) \hat{\varepsilon}_{\max}^{(\mu-2)} \quad (3-48)$$

3.5.3 Variables de simplification

Afin de simplifier encore (3-37) et, éventuellement, (3-43), on introduit les variables suivantes [27]:

$v_T(\hat{\varepsilon})$ = le nombre moyen d'émissions par source pour un intervalle de temps $d\hat{\varepsilon}$ au cours d'une période T ,

$$A_{\hat{\varepsilon}, T} = \int_T v_T(\hat{\varepsilon}) d\hat{\varepsilon} \quad (3-49)$$

$A_{\hat{\varepsilon}, T}$ = le nombre moyen d'émissions par source de bruit au cours de la période de T .

On peut présumer de l'indépendance du nombre moyen d'émissions par source de bruit $A_{\hat{\epsilon}, T}$ au cours d'une période T avec le nombre moyen de sources de bruit dans un secteur spatial A_{Λ} qui s'exprime comme

$$A_{\Lambda} = \int_{\Lambda} \rho_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \quad (3-50)$$

Avec l'hypothèse ci-dessus, le nombre moyen d'émissions de bruit sur une période T est donc (avec 3-49 et 3-50):

$$A_T = \int_{\Lambda, T} \rho(\lambda, \hat{\epsilon}) d\lambda d\hat{\epsilon} = A_{\Lambda} \cdot A_{\hat{\epsilon}, T} \quad (3-51)$$

Les densités de probabilité des deux variables en cause, soit λ pour l'espace et $\hat{\epsilon}$ pour le temps, s'exprime donc, en utilisant les résultats de (3-49) à (3-51), comme:

$$W_1(\lambda) = \frac{\rho_{\Lambda}(\lambda)}{A_{\Lambda}} \quad (3-52)$$

$$\text{et} \quad W_1(\hat{\epsilon})_T = \frac{v_T(\hat{\epsilon})}{A_{\hat{\epsilon}, T}} \quad (3-53)$$

Avec les définitions précédentes, et en notant le résultat par \hat{I}_T , on obtient l'équation ci-dessous pour l'exposant de l'équation (3-37),

$$\hat{I}_T = A_{\Lambda} \cdot A_{\hat{\epsilon}, T} \int_{\Lambda, \hat{\epsilon}} W_1(\lambda) W_1(\hat{\epsilon}) \langle J_0(rB_0) - 1 \rangle_{\theta} d\lambda d\hat{\epsilon} \quad (3-54)$$

3.5.4 Stabilité du champ de bruit

Comme nous l'avons défini à la section 3.4.1, l'enveloppe du bruit B_0 est une fonction du nombre, du temps et du lieu des sources de bruit. En général, la sortie du récepteur de la figure 3-1 sera donc une enveloppe dont la durée T_S sera une variable aléatoire.

Si l'on suppose que le nombre moyen de sources ne change pas, on peut également supposer que la durée moyenne de la présence, à la sortie du récepteur, d'une enveloppe de bruit sera \bar{T}_S .

A la suite de Skomal [27], on peut donc introduire une variable aléatoire z telle que la relation temporelle ci-dessous soit vérifiée:

$$t + \hat{\epsilon} = \bar{T}_S \cdot z \quad (3-55)$$

En utilisant (3-55) dans (3-54) on obtient:

$$\hat{I}_T = A_\Lambda \cdot A_{\hat{e}, T} \bar{T}_S \left\langle \int_0^{T_S/\bar{T}_S} W_1(z) [J_0(rB_0) - 1] dz \right\rangle_{\theta, \lambda, T_S} \quad (3-56)$$

ou bien

$$\hat{I}_T = T^{-1} A_\Lambda \cdot A_{\hat{e}, T} \bar{T}_S \left\langle \int_0^{T_S/\bar{T}_S} T W_1(z) [J_0(rB_0) - 1] dz \right\rangle_{\theta, \lambda, T_S} \quad (3-57)$$

3.5.5 Paramètre additionnel

Afin d'obtenir une version finale simplifiée de (3-37), on définit la quantité ci-après:

$$\bar{v}_T = T^{-1} A_\Lambda \cdot A_{\hat{e}, T} \quad (3-58)$$

comme étant le nombre moyen d'émissions par seconde au cours d'une période d'observation T.

3.5.6 Hypothèses ultimes

On suppose qu'au cours de la période d'observation T, le bruit est STATIONNAIRE et que durant cette période la probabilité d'émission $W_1(z)$ est uniformément répartie dans le temps T, soit:

$$W_1(z) = \frac{1}{T} \quad (3-59)$$

On obtient donc, avec ces hypothèses, l'expression (3-57) modifiée sous la forme:

$$\hat{I}_T = \bar{v}_T \bar{T}_S \left\langle \int_0^{T_S/\bar{T}_S} [J_0(rB_0) - 1] dz \right\rangle_{\theta, \lambda, T_S} \quad (3-60)$$

En régime permanent, on a la situation où

$$T \rightarrow \infty \quad (3-61)$$

et, en conséquence,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{v}_T \rightarrow \bar{v}_\infty = A_\Lambda \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} (A_{\hat{e}, T}/T) \quad (3-62)$$

donc on peut définir

un indice impulsif A_∞ tel que

$$A_\infty = \bar{v}_\infty \bar{T}_S \quad (3-63)$$

qui est, en fait, une mesure du degré de chevauchement des impulsions (observées) originant d'une région de l'espace.

3.5.7 Interprétation de A_∞

Une faible valeur de A_∞ indiquera que très peu d'impulsions seront présentes simultanément à la sortie du récepteur et conséquemment le faible chevauchement de celles-ci donnera un comportement typiquement impulsif à la réponse.

En revanche, une grande valeur de A_∞ signifiera qu'un très grand nombre d'impulsions contribueront à la sortie du récepteur et qu'il y aura forcément un chevauchement très important donnant ainsi à la réponse une allure statistique qui détruira son caractère impulsif et qui, à la limite, sera décrite par une courbe gaussienne.

On obtient donc, pour (3-60), avec les hypothèses émises plus tôt, l'expression:

$$\hat{I}_\infty(r) = A_\infty \left\langle \int_0^{T_S/\bar{T}_S} [J_0(rB_0) - 1] dz \right\rangle_{\theta, \lambda, T_S} \quad (3-64)$$

et la substitution de (3-64) dans (3-37) nous donne la forme finale de la fonction caractéristique qui est la base des calculs du bruit radio selon l'approche de Middleton, à savoir:

$$\hat{F}_1(ir) = e^{A_\infty \left\langle \int_0^{T_S/\bar{T}_S} [J_0(rB_0) - 1] dz \right\rangle_{\theta, \lambda, T_S}} \quad (3-65)$$

3.6 COMPOSANTE GAUSSIENNE DU BRUIT RADIO

Le but du modèle de Middleton est de caractériser le bruit radio à partir des statistiques établies sur son enveloppe à la sortie du récepteur, ce dernier ayant l'une ou l'autre des caractéristiques schématisées à la figure 3-1. Il est évident qu'en général le bruit impulsif ne sera pas observé seul mais qu'un bruit thermique de distribution gaussienne y sera superposé et, conséquemment, la statistique sur l'enveloppe de ce bruit suivra une distribution de Rayleigh.

On suppose qu'il y a indépendance entre les diverses sources de bruit

gaussien, par exemple le bruit provenant d'un secteur spatial et celui résultant de l'équipement utilisé pour faire la mesure. On assume par ailleurs qu'il y a également indépendance entre les diverses sources de bruit gaussien et celles de nature impulsionnelle. Analytiquement, cela veut dire que la fonction caractéristique conjointe des deux types de bruit est le produit d'une fonction caractéristique résultant du bruit impulsionnel (éq. 3-65) et d'une fonction caractéristique résultant du bruit gaussien.

La fonction caractéristique bidimensionnelle résultant du bruit gaussien se définit en coordonnées cartésiennes comme

$$F_{1G}(i\xi, i\eta) = e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)\sigma_G^2} \quad (3-66)$$

$$\text{ou} \quad F_{1G}(i\xi, i\eta) = e^{-\frac{1}{2}r^2\sigma_G^2} \quad (3-67)$$

dans laquelle les relations cartésiennes-polaires classiques, soit $\xi = r \cos \phi$ et $\eta = r \sin \phi$, ont été utilisées. De même, on suppose que la variable angulaire ϕ est uniformément distribuée entre 0 et 2π .

Généralement, les diverses composantes du bruit gaussien étant statistiquement indépendantes, on peut écrire que

$$\sigma_G^2 = \sigma_R^2 + \sigma_E^2 \quad (3-68)$$

où R et E représentent respectivement les composantes gaussiennes dues au récepteur et aux sources externes.

En particulierisant (3-65) et (3-66) aux deux types de bruit, à savoir les classes A et B, on obtient les fonctions caractéristiques désirées, soit:

Bruit de classe A + Bruit gaussien:

$$\hat{F}_1(ir) = e^{-\frac{1}{2}r^2\sigma_G^2} \cdot e^{\left\{ A_{\infty, A} \left\langle \int_0^{T_S/\bar{T}_S} [J_0(rB_{0A}) - 1] dz \right\rangle_{\theta, \lambda, T_S} \right\}} \quad (3-69)$$

Bruit de classe B + Bruit gaussien:

$$\hat{F}_1(ir) = e^{-\frac{1}{2}r^2\sigma_G^2} \cdot e^{\left\{ A_{\infty, B} \left\langle \int_0^{\infty} [J_0(rB_{0B}) - 1] dz \right\rangle_{\theta, \lambda} \right\}} \quad (3-70)$$

Tous les termes de ces fonctions caractéristiques seront entièrement discutés dans les sections suivantes.

3.7 SECONDE REDUCTION DE LA FONCTION CARACTERISTIQUE

Le principal problème de la formulation mathématique de Middleton est l'obtention de résultats analytiques qui soient utilisables par la suite pour faire des calculs numériques. Ainsi, on doit être en mesure d'évaluer les densités de probabilité en présence de bruit de classes A ou B à partir des fonctions caractéristiques dont nous avons déjà dérivé les expressions fondamentales. A partir de celles-ci, on doit chercher à introduire des possibilités additionnelles de réduction de ces fonctions pour les rendre "analytiquement tractables", pour reprendre l'expression de Middleton.

On constate tout d'abord que le comportement de la densité de probabilité d'une variable aléatoire est régi par celui de la fonction caractéristique associée et ce, pour des valeurs de l'argument près de zéro. Le comportement de $\hat{F}_1(ir)$ est donc déterminé, à et aux environs de $r=0$ par la *plus grande contribution dépendante de r* qui établit le profil de $W_1(E)$ pour de grandes amplitudes. Cela est vrai aussi en ce qui concerne $P_1(E)$ et les autres fonctions de E à mesure que l'amplitude de E augmente et tend à satisfaire la condition

$$E \rightarrow \infty$$

En pratique, cela signifie que le comportement de $W_1(E)$ pour $E \rightarrow \infty$ est régi par une décroissance, à la limite, du type de Rayleigh.

La procédure pour calculer les fonctions caractéristiques pertinentes aux bruits de classes A ou B est donc:

- 1°) d'examiner leur comportement au voisinage de $r=0$;
- 2°) d'exprimer $J_0(rB_0) - 1$ sous la forme d'une intégrale;
- 3°) de supposer explicitement un type de propagation donné et conséquemment une distribution de source donnée;
- 4°) d'inverser l'ordre d'intégration résultant de 2° et 3°;
- 5°) de fixer les limites imposées par le fait que le bruit de classe A, dont une composante peut être notée μ_{0A} , est de *durée finie* alors que celui de classe B, représenté par $\mu_{0B}(z)$, où z est la variation réduite du temps (3-55), existe pour $0 < z < \infty$.

C'est précisément cette distinction entre μ_{0A} et μ_{0B} qui amène des formes explicites différentes pour les fonctions caractéristiques F_1 pour les bruits de classes A et B.

On ne peut évidemment pas reprendre dans tous ses détails l'ensemble des considérations que Middleton doit introduire pour procéder aux cinq étapes prévues ci-dessus. On réfère le lecteur au texte principal [5] pour plus de précision mais, essentiellement, les trois hypothèses supplémentaires qui permettent une réduction additionnelle de la fonction caractéristique sont:

a) Hypothèse sur la loi de propagation:

On suppose que la distribution des sources de bruit et la loi de propagation $g(\lambda)$ qui lui est associée peuvent s'exprimer comme un produit de termes, soit:

$$g(\lambda) = [g_s(\phi)g_v(\theta, \phi)] / (4\pi c\lambda)^\gamma, \quad \gamma > 0 \quad (3-71)$$

où $g_{s,v}$ sont des facteurs angulaires pris unitaires dans les modèles de propagation les plus utilisés, et γ un facteur qui détermine le type de propagation considéré. Ainsi, en général, $\gamma \geq \frac{1}{2}$ est plus proche de la réalité, et $\gamma = 1$ représente le cas classique d'une propagation sphérique autour d'un point donné.

b) Hypothèse sur la distribution des sources:

On suppose également que la distribution des sources de bruit en surface $\sigma_\Lambda(\lambda)$ peut s'exprimer, de même qu'en a), par le produit de deux termes, l'un fonction de la géométrie, l'autre fonction du diagramme de rayonnement de ces sources et de celui du récepteur, soit:

$$\sigma_\Lambda(\lambda) = a(\lambda)b(\theta, \phi) \quad (3-72)$$

c) Hypothèse sur la durée du signal à l'entrée:

La durée du signal à l'entrée établit le domaine des sources λ_{\max} perceptibles par le récepteur selon qu'il s'agit de bruit de classes A ou B. Ainsi, en résumé, les conditions sont les suivantes:

Bruit de classe A:	$0 \leq x \leq x_0$ $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$	car	$\mu_{0A} = 0$	pour	$z > z_0$
Bruit de classe B:	$0 \leq x < \infty$ $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$	car	$\mu_{0B} \neq 0$	pour	$z < \infty$

Les domaines de variation possibles pour x et λ dans le cas des deux types d'interférence sont donc ainsi clarifiés.

On notera que le lien entre x et λ s'écrit comme

$$x = \frac{rG_0}{\lambda^\gamma} \quad (3-73a) \quad \lambda = \frac{(rG_0)^{1/\gamma}}{x^{1/\gamma}} \quad (3-73b)$$

$$\text{et} \quad x_0 = \frac{rG_0}{\lambda_{\max}^\gamma} \quad (3-74)$$

où G_0 est la forme d'onde du bruit généré, reliée à B_0 , la forme d'onde du bruit observé, par une fonction complexe des paramètres de propagation.

3.8 FONCTION CARACTERISTIQUE POUR UN BRUIT DE CLASSE A

Nous avons indiqué en (3-69) la fonction caractéristique d'un bruit de classe A. En suivant le cheminement exposé au paragraphe 3.7 et en effectuant un certain nombre de manipulations mathématiques dont on pourra trouver les détails dans Skomal [27], on obtient une expression simplifiée de la fonction caractéristique qui s'écrit comme:

$$F_1(iax) = e^{-A_A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_A^m}{m!} e^{(-\sigma_{mA}^2 \cdot \frac{1}{2} a_A^2 x^2)} \quad (3-75)$$

dans laquelle on a défini les nouvelles variables ci-dessous pour en faciliter l'écriture:

$$(3-76) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{\infty, A} \rightarrow A_A \\ \sigma_{mA}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{A_A} + \Gamma'_A \right) (1 + \Gamma'_A)^{-1} \\ \Gamma'_A = \frac{\sigma_G^2}{\Omega_{2A}} \\ \Omega_{2A} = \frac{1}{2} A_{\infty, A} \langle B_{0A}^2 \rangle_\theta \\ r = a_A x \\ a_A = [2\Omega_{2A} (1 + \Gamma'_A)]^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Si l'on fait un instant abstraction du formalisme mathématique et que l'on recherche la signification physique de (3-75), on retrouve les points fondamentaux explicités ci-dessous.

POUR UN BRUIT DE CLASSE A, on constate que:

- A) la fonction caractéristique résultante ne montre plus une dépendance explicite en fonction de la distribution spatiale des sources dans le domaine Λ .
- B) la fréquence des émissions de bruit, leur durée et le nombre de sources sont interreliés dans un seul paramètre, l'indice impulsionnel A_A .
- C) en suite à (B), il ne sera pas possible de déterminer directement le nombre de sources de bruit ayant conduit aux résultats mesurés expérimentalement.
- D) seule la valeur moyenne du signal de bruit $\langle B_{0A}^2 \rangle_{\theta}$ entre dans le calcul de la fonction caractéristique du premier ordre.
- E) en suite à (D), le processus ou mécanisme de propagation, qui entre en jeu par l'intermédiaire du temps \hat{e} , est totalement masqué et il est impossible de retrouver cette information avec la fonction caractéristique du premier ordre.

Note: Le symbole ξ est utilisé en 3.3.1 pour la fonction caractéristique. Il est utilisé à nouveau ici pour l'enveloppe car il n'y a pas de confusion possible.

3.8.1 Variables normalisées

L'introduction de nouvelles variables (3-76) pour faciliter l'écriture de la fonction caractéristique du 1^{er} ordre, et l'amener sous la forme de (3-75), permet d'inclure des variables normalisées pour l'enveloppe du bruit E et le niveau à excéder E_0 . Ainsi, on définit

$$\xi = E[2\Omega_{2A}(1 + \Gamma'_A)]^{-\frac{1}{2}} = a_A E \quad (3-77)$$

$$\xi_0 = E_0[2\Omega_{2A}(1 + \Gamma'_A)]^{-\frac{1}{2}} = a_A E_0 \quad (3-78)$$

En introduisant (3-77) et (3-78) dans (3-75), on a:

$$P_1(\xi > \xi_0)_A = 1 - \xi_0 e^{-A_A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_A^m}{m!} \int_0^{\infty} J_1(\xi_0 x) e^{-\frac{\sigma^2}{mA} \frac{a_A^2 x^2}{2}} d\lambda \quad (3-79)$$

En utilisant

1°) les propriétés de l'intégrale de Bessel, à savoir [27]

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(a_A z) z^{\mu-1} e^{-b^2 z^2} dz = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \left(\frac{a_A}{2}\right)^{\nu}}{2b^{\mu} \Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(\frac{\nu+\mu}{2}, \nu+1, -\frac{a_A}{4b^2}\right) \quad (3-80)$$

$$\operatorname{Re} a_A^2 > 0$$

$$\operatorname{Re} (\nu+\mu) > 0$$

dans laquelle ${}_1F_1$ est la fonction hypergéométrique confluyente et Γ désigne la fonction Gamma.

2°) l'approximation de la fonction hypergéométrique, i.e.

$${}_1F_1(1,2,-z) \approx \frac{1 - e^{-x}}{x} \quad (3-81)$$

3°) l'identité

$$e^{-A/A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m/A}{m!} = 1 \quad (3-82)$$

on obtient l'expression ci-dessous pour la probabilité $P_1(\xi > \xi_0)_A$, c'est-à-dire en fonction des variables normalisées,

$$P_1(\xi > \xi_0)_A = 1 - e^{-A/A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m/A}{m!} \frac{\xi_0^2}{2\sigma_{mA}^2} {}_1F_1\left[1,2, -\frac{\xi_0^2}{2\sigma_{mA}^2}\right] \quad (3-83)$$

ou bien:

$$P_1(\xi > \xi_0)_A = e^{-A/A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m/A}{m!} e^{-\xi_0^2/2\sigma_{mA}^2} \quad (3-84)$$

Il s'agit de l'expression finale avec laquelle la mise en oeuvre sur ordinateur du modèle de bruit de classe A a été effectuée et dont les résultats sont présentés au chapitre suivant.

A titre d'informations immédiates que l'on peut recueillir de (3-84) on note [27]:

a) que la probabilité $P(\xi > \xi_0)_A$ s'exprime en fonction d'une série de termes, chacun ayant la forme d'une distribution de Rayleigh mais avec une variance et un facteur d'échelle fonction de l'ordre du terme dans la série,

b) que la variance du bruit de classe A (σ_{mA}^2) augmente avec l'ordre du terme de la série.

3.8.2 Autres fonctions et moments d'un bruit de classe A

Dans un modèle de bruit de classe A, on constate, avec (3-76), qu'il y a donc trois paramètres à évaluer (à partir de résultats expérimentaux), soit:

$$\boxed{A_A, \Gamma'_A, \Omega_{2A}} \quad (3-85)$$

avant de pouvoir effectuer le calcul d'une APD.

Cela implique que l'on dispose d'au moins trois relations indépendantes contenant ces variables. En plus de (3-84), qui est l'une d'entre elles, on peut obtenir les deux autres en obtenant les premier et second moments de la fonction. Ceci est relativement simple car on a, par définition:

$$W_1(\xi) = - \left. \frac{\partial P(\xi > \xi_0)}{\partial \xi} \right|_{\xi = \xi_0} \quad (3-86)$$

qui devient, avec (3-84):

$$W_1(\xi)_A = \xi e^{-A_A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_A^m}{m!} \frac{e^{-\xi^2/2\sigma_{mA}^2}}{\sigma_{mA}^2} \quad (3-87)$$

Les moments d'ordre β de l'enveloppe sont définis comme

$$\langle \xi^\beta \rangle = \int_0^{\infty} \xi^\beta W_1(\xi) d\xi \quad (3-88)$$

et s'expriment, avec (3-87):

$$\langle \xi^\beta \rangle = e^{-A_A} \Gamma \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_A^m}{m!} \left(\frac{\frac{m}{A_A} + \Gamma'_A}{1 + \Gamma'_A} \right)^{\frac{1}{2}\beta} \quad (3-89)$$

Ainsi, les moments du premier et du deuxième ordre s'écrivent respectivement:

$$\langle \xi_A \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-A_A} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{A_A^m}{m!} \left[\frac{\frac{m}{A_A} + \Gamma'_A}{1 + \Gamma'_A} \right]^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3-90)$$

$$\langle \xi_A^2 \rangle = e^{-A_A} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{m}{A_A} + \Gamma'_A}{1 + \Gamma'_A} \cdot \frac{A_A^m}{m!} \right) \quad (3-91)$$

Les résultats numériques obtenus pour le modèle de bruit de classe A seront présentés en détail et discutés au chapitre 4. Il convient cependant de mentionner que si $W_1(\xi)_A$ est correctement normalisée, le moment du second ordre $\langle \xi_A^2 \rangle$ doit être égal à l'unité. Les calculs montrent que cela est vrai et qu'aucun autre ajustement ou normalisation n'est nécessaire pour faire les calculs requis par un bruit de classe A.

3.9 FONCTION CARACTERISTIQUE POUR UN BRUIT DE CLASSE B

Nous avons présenté à l'équation (3-70) l'expression de la fonction caractéristique d'un bruit de classe B. On notera que dans ce cas, l'intégration se fait entre 0 et ∞ pour la variation de temps normalisé z . On ne peut donc plus appliquer la même approche que celle utilisée pour le bruit de classe A qui consistait à prendre une période normalisée T/\bar{T}_S , donc à faire une moyenne sur le domaine temporel z .

Afin de solutionner (3-70), on fait appel en premier lieu à une propriété de l'intégrale de la fonction de Bessel qui s'écrit

$$J_0(y) = 1 - \int_0^y J_1(x) dx \quad (3-92)$$

En substituant (3-92) dans (3-70), on obtient la fonction caractéristique du 1er ordre d'un bruit de classe B:

$$\hat{F}_1(ir)_{B+G} = e^{-\frac{1}{2}r^2\sigma_G^2} \left\{ e^{-A_{\infty,B}} \left\langle \int_0^{\infty} dz \int_0^x J_1(x) dx \right\rangle_{\theta,\lambda} \right\} \quad (3-93)$$

La variable x , définie en (3-73), peut être explicitement exprimée en termes de l'enveloppe du bruit observée B_{OB} si l'on suppose une variation en r simple comme:

$$x = \frac{rG_0(t)}{\epsilon^\gamma} = rB_{OB} \quad (3-94)$$

On écrit alors (3-93) sous la forme:

$$\hat{F}_1(ir)_{B+G} = e^{-\frac{1}{2}r^2\sigma_G^2} e^{\left\{ -A_{\infty,B} \left\langle \int_0^{\infty} dz \int_0^{r_{OB}^B} J_1(x) dx \right\rangle_{\theta,\lambda} \right\}} \quad (3-95)$$

On peut séparer l'intégration sur la variable x en deux domaines et écrire (3-95) sous la forme:

$$\hat{F}_1(ir)_{B+G} = e^{-\frac{1}{2}r^2\sigma_G^2} e^{\{\Delta\}} \quad (3-96)$$

$$\text{où } \Delta = -A_{\infty,B} \left\langle \int_0^{\infty} dz \int_0^{x_0} J_1(x) dx \right\rangle_{\theta,x} - A_{\infty,B} \left\langle \int_0^{\infty} dz \int_{x_0}^{\infty} J_1(x) dx \right\rangle_{\theta,x} \quad (3-97)$$

où x indique le domaine effectif de distribution spatiale des sources de bruit.

En faisant appel à (3-46), qui donne une expression analytique pour le nombre moyen d'émissions de bruit se produisant dans un intervalle λ sur un intervalle de temps \hat{E} , on peut modifier (3-96) comme suit:

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(ir)_{B+G} = e^{-\frac{1}{2}r^2\sigma_G^2} e^{\left\{ -A_{\infty,B} \int_0^{\hat{E}_{\max}} A_K c^2 \hat{E}^{(1-\mu)} d\hat{E} \right.} \\ \cdot \left. \left\langle \int_0^{\infty} dz \int_0^{x_0} J_1(x) dx \right\rangle_{\theta} - A_{\infty,B} \left\langle \int_0^{\infty} dz \int_{x_0}^{\infty} J_1 dx \right\rangle_0 \right.} \\ \cdot \left. \int_0^{\left(\frac{rG_0}{x}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} A_K c^2 \hat{E}^{(1-\mu)} d\hat{E} \right\rangle_{\theta} \quad (3-98) \end{aligned}$$

Le dernier élément de l'exponentielle de (3-98) s'écrit comme:

$$\int_{\hat{E} = \left(\frac{rG_0}{x}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}^0 A_K c^2 \hat{E}^{(1-\mu)} d\hat{E} = \frac{A_K c^2 \hat{E}^{(2-\mu)}}{2-\mu} = \left(\frac{\hat{E}}{\hat{E}_{\max}}\right)^{2-\mu} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{(2-\mu)}{\gamma}} \quad (3-99)$$

En définissant un paramètre de densité spatiale de propagation α comme

$$\alpha = \frac{2-\mu}{\gamma} \Big|_{\text{surface}} \quad (3-100)$$

(3-98) devient:

$$\hat{F}_1(ir)_{B+G} = e^{-\frac{1}{2}r^2\sigma_G^2} e^{-A_{\infty,B} \cdot (I_1 + I_\alpha)} \quad (3-101)$$

dans laquelle:

$$I_1 = \left\langle \int_0^\infty dz \int_0^{x_0} J_1(x) dx \right\rangle_\theta \quad (3-102)$$

et

$$I_\alpha = \left\langle x_0^\alpha \int_0^\infty dz \int_{x_0}^\infty J_1(x) x^{-\alpha} dx \right\rangle_\theta \quad (3-103)$$

donc

$$\hat{I}_\infty(r)_B = -A_{\infty,B}(I_1 + I_\alpha) \quad (3-104)$$

3.9.1 Conditions de convergence

Analytiquement, il y aura convergence de (3-103) pour $\alpha > -\frac{1}{2}$. Il n'y a cependant aucune autre limitation sur α donc:

$$-\frac{1}{2} < \alpha < \infty$$

On verra par ailleurs que pour obtenir des approximations des fonctions caractéristiques de bruit de classe B on se restreint à l'intervalle

$$0 < \alpha < 2$$

3.9.2 Expression exacte de $\hat{F}_1(r)_{B+G}$

Le calcul de (3-102) est effectué en prenant une expansion en fonction de Bessel suivie d'une intégration terme à terme; celui de (3-103) fait appel à une représentation par l'intégrale de Barnes [28] de la fonction de Bessel de première espèce $J_1(x)$. Le résultat *exact* pour la fonction caractéristique $\hat{F}_1(ir)_{B+G}$ d'un bruit de classe B est:

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(ir)_{B+G} = e^{-\frac{1}{2}r^2\sigma_G^2} e \left\{ -A_{\infty,B} \left[\frac{(1 + \alpha/2) \langle x_0^\alpha \rangle}{2^{\alpha-1} \Gamma(1 + \alpha/2)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell \langle x_0^{2\ell+2} \rangle}{\ell! (\ell+1)! 2^{2\ell+1}} \cdot \frac{4\ell+4-\alpha}{(2\ell+2)(2\ell+2-\alpha)} \right] \right\} \quad (3-105) \end{aligned}$$

On introduit les variables ci-après pour faciliter l'écriture de (3-105), soit

$$(3-106) \quad \left. \begin{aligned} b_{1\alpha} &= \frac{\Gamma(1 - \alpha/2)}{2^{\alpha-1} \Gamma(1 + \alpha/2)} \langle G_{0,B}^\alpha \rangle \hat{\epsilon}_{\max}^{-\alpha\gamma} \\ b_{2\alpha} &= \frac{(4-\alpha)}{(2-\alpha)} \langle G_{0,B}^2 \rangle \hat{\epsilon}_{\max}^{-2} \\ b_{l\alpha} &= \frac{(4l+4-\alpha)2^{-2l-1}}{l!(l+1)!(2l+2-\alpha)(2l+2)} \langle G_{0,B}^{2l+2} \rangle \hat{\epsilon}_{\max}^{-\gamma(2l+2)} \end{aligned} \right\}$$

De cette façon, l'expression exacte finale de $\hat{F}_1(ir)_{B+G}$ est donc:

$$\hat{F}_1(ir)_{B+G} = e^{\left\{ -b_{1\alpha} A_{\alpha,B} r^\alpha - (\sigma_G^2 + b_{2\alpha} A_{\infty,B}) \frac{1}{2} r^2 - \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l b_{l\alpha} A_{\infty,B} r^{2l+2} \right\}} \quad (3-107)$$

3.9.3 Expression simplifiée approximative de $\hat{F}_1(ir)_{B+G}$

Il est évident, en regardant (3-107), qu'il ne s'agit pas d'une expression facile à utiliser, particulièrement si l'on note que l'on a une série infinie en exposant. Dans le cas du bruit de classe A, la fonction caractéristique n'était fonction que de r donc pouvait être décrite en une seule étape peu importe la région considérée pour E_0 et E . Or, dans le cas de (3-107), on doit conclure qu'il faudra deux fonctions caractéristiques distinctes, i.e.

- une fonction pour des valeurs de $P_1(E > E_0)$ à mesure que $E_0 \rightarrow \infty$,
- une fonction différente pour de petites et moyennes valeurs de $E > E_0$.

Si l'on veut que ces fonctions approximatives soient mathématiquement traitables sur ordinateur, cela implique qu'il doit y avoir un mécanisme de jonction entre les deux pour assurer la continuité. Ce point particulier sera abordé ultérieurement.

Une simplification de (3-107) est possible [27] si l'inégalité ci-dessous s'applique:

$$b_{l\alpha} A_{\infty,B} \leq 1$$

et la limite supérieure de la série infinie s'écrit alors:

$$\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l b_{l\alpha} A_{\infty,B} r^{2l+2} \leq \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} r^{2l+2} = \frac{r^4}{1+r^2} \quad \text{pour } r^4 < 1 \quad (3-108)$$

Cela revient donc à se définir un domaine d'application afin de bénéficier de

l'approximation introduite par (3-108). En effet, l'équation (3-107) contient trois termes en exposant. Selon le domaine de variation considéré pour r , l'un ou l'autre des termes prendra de l'importance. Ainsi, pour que la fonction caractéristique demeure correcte pour des valeurs intermédiaires de $E < E_0$ en incluant les valeurs très faibles de $E < E_0 \rightarrow 0$, le terme dominant de (3-107) sera la plus petite puissance de r avec un coefficient négatif, i.e.

$$-b_{1\alpha} A_{\infty, B} r^\alpha$$

Pour des valeurs faibles et intermédiaires de E et E_0 , la forme de l'APD suit le comportement de la fonction caractéristique lorsque r devient grand.

Pour de grandes valeurs de E et E_0 , la fonction caractéristique approchée qui approximera au mieux (3-107) est celle dont les variations seront les plus importantes pour des valeurs de r au voisinage de zero.

Donc, pour caractériser un processus très impulsif (grande valeur de E_0 sur l'APD), le domaine de variation de r important est

$$0 \leq r < 1$$

La contribution du terme $-b_{1\alpha} A_{\infty, B} \cdot \frac{1}{2} r^2$ de (3-107) devient inférieure à celle des deux autres pris individuellement si

$$\frac{2-\mu}{\gamma} \leq 2$$

$$\text{car } \mu \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 \leq \gamma \leq 2.$$

La fonction caractéristique approchée de (3-107) est, dans ce cas, dominée par les autres termes, i.e.

$$\hat{F}_1(ir)_{B+G} \cong e^{\{-(\sigma_G^2 + b_{2\alpha} A_{\infty, B}) \frac{1}{2} r^2\}} \quad (3-109)$$

En notant que

$$-b_{2\alpha} A_{\infty, B} \cdot \frac{1}{2} r^2 \cong A_{\infty, B} (e^{-b_{2\alpha} \cdot \frac{1}{2} r^2} - 1) \quad (3-110)$$

on peut écrire que la fonction caractéristique approximative dans le cas d'événements de faible probabilité (grandes amplitudes de l'enveloppe) sera égale à

EVENEMENTS
MOINS
PROBABLES

$$\hat{F}_1(ir)_{B+G-II} \cong e^{-A_{\infty, B}} e^{\left(A_{\infty, B} \cdot e^{-\frac{1}{2} r^2 b_{2\alpha} - \sigma_G^2 \frac{1}{2} r^2} \right)} \quad (3-111)$$

$$E > E_0 \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 2$$

Pour des valeurs intermédiaires et faibles de E_0 (i.e. dans la zone où l'enveloppe du bruit approche une distribution de Rayleigh), le bruit thermique domine la partie impulsive et le premier terme de (3-107) conserve une certaine importance. On a alors:

EVENEMENTS
PLUS
PROBABLES

$$\hat{F}_1(ir)_{B+G-I} \cong e^{(-b_{1\alpha} A_{\infty,B} r^\alpha - \Delta\sigma_G^2 r^2)}$$

$$E > E_0 \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha < 2$$

(3-112)

Il est évident maintenant que l'on doit s'assurer d'un passage non discontinu entre $\hat{F}_1(ir)_{B+G-I}$ et $\hat{F}_1(ir)_{B+G-II}$. Cela revient à dire que seuls les résultats expérimentaux permettront de déterminer le point de jonction entre les deux courbes et que cette transition est évaluée empiriquement. Les résultats expérimentaux du chapitre suivant feront état de ces calculs.

3.9.4 Définitions des paramètres en classe B

En plus du terme de bruit gaussien normal qu'on retrouve en classe A (σ_G^2), l'équation (3-107) présente un terme gaussien additionnel ($b_{2\alpha} A_{\infty,B}$) qui est dû à la "partie impulsionnelle" du bruit de classe B. Quoique cela semble assez paradoxal, on retrouve donc une composante gaussienne additionnelle en classe B due à la nature différente des bruits modélisés. Cela nous amène à définir les paramètres ci-après:

$$\Delta\sigma_G^2 = \sigma_G^2 + b_{2\alpha} A_{\infty,B} \quad (3-113)$$

$$= b_{2\alpha} A_{\infty,B} \left(1 + \frac{\sigma_G^2}{b_{2\alpha} A_{\infty,B}} \right) \quad (3-114)$$

$$= \Omega_{2B} (1 + \Gamma'_B) \quad (3-115)$$

où $\Omega_{2B} \triangleq b_{2\alpha,B}$ (3-116)

et $\Gamma'_B \triangleq \frac{\sigma_G^2}{\Omega_{2B}} = \frac{\text{composante gaussienne indépendante}}{\text{composante gaussienne "impulsive"}}$ (3-117)

$$\Gamma'_B = \left(\frac{4-\alpha}{2-\alpha} \right) \Omega_{2B} \quad (3-118)$$

avec Ω_{2B} représentant la contribution gaussienne du bruit impulsionnel (uniquement de classe B) et σ_G^2 défini identiquement comme en classe A, i.e. par (3-68).

3.9.5 Variables normalisées en classe B

Comme nous l'avons démontré au paragraphe 3.8.1, nous pouvons introduire des *variables normalisées* afin de faciliter l'écriture des fonctions diverses, telle l'APD.

Par analogie avec (3-77) et (3-78), on pose:

$$\xi_0 = E_0 [2\Omega_{2B} (1 + \Gamma'_B)]^{-\frac{1}{2}} \quad (3-119)$$

$$\xi = E [2\Omega_{2B} (1 + \Gamma'_B)]^{-\frac{1}{2}} \quad (3-120)$$

et, en comparaison avec (3-76), (3-77) et (3-78), on a:

$$(3-121) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_B = [2\Omega_{2B} (1 + \Gamma'_B)]^{-\frac{1}{2}} \\ r = a\lambda \\ \xi = a_B E \\ \xi_0 = a_B E_0 \end{array} \right.$$

On peut donc écrire à nouveau (3-111) et (3-112) sous une forme simplifiée en faisant usage des variables normalisées définies précédemment, i.e.

$$\begin{array}{l} \hat{F}_1(i a_B \lambda)_{B+G-I} \simeq e^{\left\{ -b_{1\alpha} A_B a_B^{\alpha} \lambda^{\alpha} - \frac{1}{2} \cdot a_B^2 \lambda^2 \Delta \sigma_G^2 \right\}} \\ \hat{F}_1(i a_B \lambda)_{B+G-II} \simeq e^{-A_B} e^{\left\{ A_B e^{-\frac{1}{2} a_B^2 \lambda^2 b_{2\alpha}} - \frac{1}{2} a_B^2 \lambda^2 \sigma_G^2 \right\}} \end{array} \quad (3-122)$$

3.9.6 Calcul des probabilités

En utilisant la formule générique pour obtenir la probabilité, i.e. (3-79), mais appliquée à la classe B, et en procédant d'une façon analogue à celle du paragraphe 3.8.1, on a:

$$P_1(\hat{\xi} > \hat{\xi}_0)_B \simeq 1 - \hat{\xi}_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \hat{A}^n}{n! \alpha} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{\alpha n}{2}\right) \cdot {}_1F_1\left(1 + \frac{\alpha n}{2}; 2; -\frac{\hat{\xi}^2}{\hat{\xi}_0^2}\right) \quad (3-123)$$

où l'on a défini les nouvelles variables suivantes:

$$(3-124) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\xi}_0 = (\xi_0 N_I) / 2G_B \\ \hat{A}_\alpha = A_\alpha / 2^\alpha G_B^\alpha \\ A_\alpha = 2^\alpha b_{1\alpha} a_\alpha A_B = 2^\alpha b_{1\alpha} A_B / [2\Omega_{2B} (1 + \Gamma'_B)]^{\alpha/2} \\ = \frac{2\Gamma(1 - \alpha/2)}{\Gamma(1 + \alpha/2)} A_B \left\langle \left(\frac{\hat{B}_{0,B}}{\sqrt{2\Omega_{2B} (1 + \Gamma'_B)}} \right)^\alpha \right\rangle \\ G_B^2 = \frac{1}{4} (1 + \Gamma'_B)^{-1} \cdot \left(\frac{4 - \alpha}{2 - \alpha} + \Gamma'_B \right) \end{array} \right.$$

L'interprétation des nouveaux paramètres est comme suit:

- a) N_I est un facteur d'échelle qui agit sur $P_{1(B-1)}$ de façon que
 $\langle \xi_B^2 \rangle = 1$ pour $a_B^2 \Delta \sigma_G^2 = 2G_B^2$.
- b) A_α est un indice impulsif effectif (classe B) proportionnel à l'indice impulsif A_B .

Compte tenu que nous avons deux fonctions caractéristiques, l'une pour les grandes amplitudes, l'autre pour les valeurs intermédiaires et faibles de E_0 , il est logique d'avoir également deux expressions différentes pour les probabilités. Celles-ci sont les expressions fondamentales du modèle de bruit classe B et s'écrivent comme:

$$P_1(\hat{\xi} > \hat{\xi}_0)_{B-I} \approx 1 - \hat{\xi}_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \hat{A}_\alpha^n \Gamma(1 + \frac{\alpha n}{2})}{n!} {}_1F_1\left(1 + \frac{\alpha n}{2}; 2; -\hat{\xi}_0^2\right) \quad (3-125)$$

$$0 \leq \xi_0 \leq \xi_B$$

$$P_1(\xi > \xi_0)_{B-II} \approx e^{-A_B} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_B^m}{m!} e^{-\hat{\xi}_0^2 / 2\sigma_{mB}^2} \quad (3-126)$$

avec

$$2\sigma_{mB}^2 = \left(\frac{m}{A_B} + \Gamma'_B \right) \cdot (1 + \Gamma'_B)^{-1}$$

$$\xi_B \leq \xi_0 \leq \infty$$

$$\hat{A}_B = \left(\frac{2 - \alpha}{4 - \alpha} \right) A_B$$

Nous avons noté le domaine de validité de (3-125) et (3-126) par rapport à ξ_B qui est défini comme le point d'intersection (déterminé expérimentalement) entre P_{1-B-I} et P_{1-B-II} . On y fera référence dans la section suivante.

Il est absolument impossible dans le cadre de ce rapport de présenter tous les détails analytiques (excessivement nombreux d'ailleurs) qui se retrouvent dans l'ensemble des publications de Middleton. On cherche néanmoins à faire ressortir l'essentiel et, en conséquence, certains éléments supplémentaires sur (3-125) et (3-126) peuvent être obtenus en consultant [5-7].

On a donc six paramètres à déterminer, soit

$$[A_B , \Gamma'_B , \Omega_{2B} , A_\alpha , \alpha , N_I] \quad (3-127)$$

les trois premiers sont analogues à ceux du bruit de classe A, les trois autres étant propres au bruit de classe B. Le chapitre 4 montrera de quelles façons on obtient ces paramètres additionnels et comment varie l'APD en fonction de ces paramètres.

3.9.7 Densités de probabilité et moments d'ordre supérieur

Par des considérations similaires à celles émises dans le cas du bruit de classe A, on obtient les expressions des densités de probabilité $W_1(\xi)_{B-I}$ et $W_1(\xi)_{B-II}$ en appliquant (3-86) à (3-125) et (3-126) respectivement, soit:

$$W_1(\xi)_{B-I} = W_1(\hat{\xi})_{B-I} \approx 2\hat{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \hat{A}_\alpha^n \Gamma\left(1 + \frac{\alpha n}{2}\right) \cdot {}_1F_1\left(1 + \frac{\alpha n}{2}; 1; -\hat{\xi}^2\right) \quad (3-128)$$

$$0 \leq \xi \leq \xi_B$$

$$\text{et} \quad W_1(\xi)_{B-II} \approx e^{-A_B} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_B^m \xi e^{-\xi^2/2\hat{\sigma}_{mB}^2}}{m! \hat{\sigma}_{m,B}^2} \quad (3-129)$$

$$\xi_B \leq \xi < \infty$$

Les moments d'ordre supérieur s'obtiennent en appliquant (3-88) aux deux mêmes équations et en utilisant la superposition des effets de composantes indépendantes, i.e.

$$\langle \xi^\beta \rangle_B = \int_0^{\xi_B} \xi^\beta W_1(\xi)_{B-I} d\xi + \int_{\xi_B}^{\infty} \xi^\beta W_1(\xi)_{B-II} d\xi \quad (3-130)$$

$$\text{d'où} \quad \langle \xi^\beta \rangle_B = \langle \xi^\beta \rangle_{B-I} + \langle \xi^\beta \rangle_{B-II} \quad (3-131)$$

3.10 LE POINT DE TRANSITION ξ_B

Le point de transition ξ_B est représenté à la figure 3-2 et il s'agit d'un point déterminé *empiriquement* qui n'a aucun lien avec les mécanismes physiques sur lesquels se fondent les six autres paramètres canoniques du modèle de bruit de classe B.

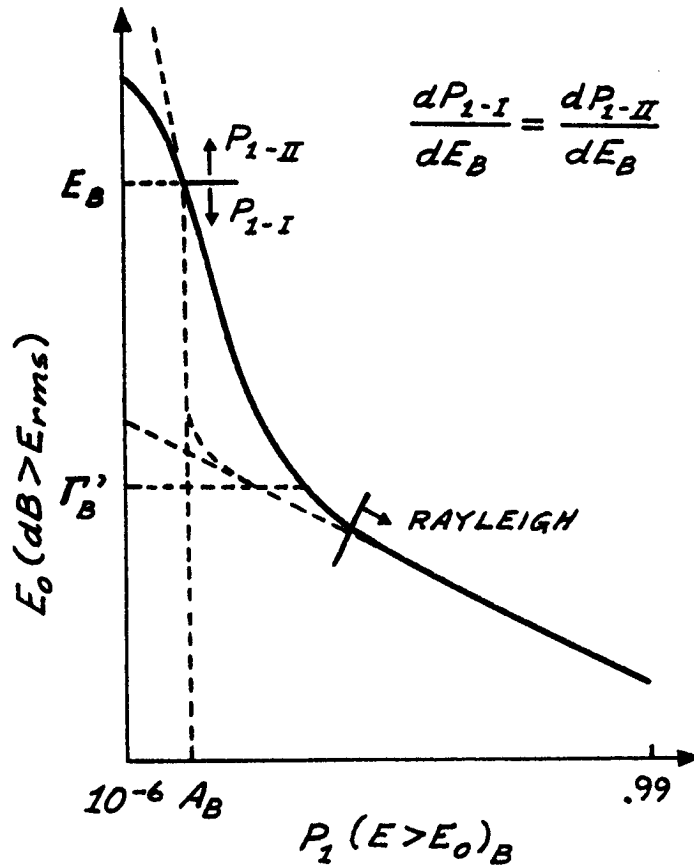


Figure 3-2 Point de transition ξ_B pour un bruit de classe B.

Il représente le point d'inflexion de la courbe de l'APD déterminé *expérimentalement*, donc le point auquel la relation suivante est vérifiée:

$$\frac{d^2 P_{1-Experim.}}{d\xi_B^2} = 0 \quad (3-132)$$

Sans cette valeur expérimentale de ξ_B , il est impossible de déterminer quelle sera la forme limite de l'APD pour $\xi_0 \rightarrow \infty$.

On trouvera au chapitre suivant et dans les publications de Middleton [21,5] des exemples d'interprétation possible pour ξ_B .

3.11 CONCLUSIONS

L'objectif visé par ce chapitre n'était pas de reprendre en entier les travaux de Middleton, ce qui aurait nécessité un nombre très appréciable de considérations additionnelles, mais plutôt de faire ressortir l'essentiel de la démarche intellectuelle qui doit être suivie pour comprendre le modèle physico-statistique de Middleton.

Nous n'avons retenu que l'essentiel du modèle et cherché, en y ajoutant des commentaires supplémentaires, de faire réaliser au lecteur quels sont, dans les faits, les points importants qui se dégagent au travers d'un formalisme mathématique très rigoureux.

Il va de soi, et nous l'avons déjà mentionné, que la compréhension intégrale des équations que nous avons présentées n'est, en aucun temps, nécessaire pour appliquer le modèle et obtenir des résultats numériques. Nous croyons fermement, cependant, qu'une très bonne connaissance du fondement même du modèle est absolument requis pour interpréter correctement les diverses significations des multiples paramètres.

Nous suggérons à un lecteur éventuel de chercher à retenir l'essentiel du modèle à l'aide du texte de ce chapitre et à compléter, le cas échéant, par les multiples versions de Middleton sur le sujet. A notre avis néanmoins, on retrouvera suffisamment d'information dans ce chapitre pour apprécier les résultats obtenus et qui feront l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

CALCUL NUMERIQUE DES APD AVEC UN MODELE PHYSICO-STATISTIQUE DU BRUIT

4.1 INTRODUCTION

En suite à la dérivation analytique du modèle de Middleton présenté au chapitre précédent, nous avons mis indépendamment en oeuvre ce modèle sur ordinateur afin de pouvoir attester des résultats déjà publiés, d'interpréter les paramètres par comparaison des résultats, d'évaluer les difficultés de calcul numérique inhérentes à l'utilisation d'un formalisme mathématique complexe.

Nous présentons donc dans ce chapitre les méthodes numériques utilisées pour évaluer les probabilités de dépassement (APD) des bruits électromagnétiques de classes A et B. Tous les calculs numériques ont été obtenus à l'aide de programmes écrits en APL puis vérifiés ultérieurement avec des programmes écrits en BASIC. On trouvera à l'appendice C les détails de tous les programmes utilisés pour effectuer tous les calculs visés par la formulation de Middleton.

4.2 MODELES DU BRUIT RADIO DE CLASSE A

On se rappelle que la distribution de probabilité cumulative complémentaire (APD) de l'enveloppe du bruit est donnée par :

$$P_1(\xi > \xi_0)_A \approx e^{-A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} e^{-\xi_0^2 / 2\hat{\sigma}_{mA}^2}, \quad (4-1)$$

où $\xi_0 = \xi_0 a_A$ (4-2)

$$2 \sigma_{mA}^2 = \frac{\frac{m}{A_A} + \Gamma'_A}{1 + \Gamma'_A} \quad (4-3)$$

Le facteur de normalisation σ_A est défini par:

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{2\Omega_{2A}(1 + \Gamma'_A)} \quad (4-4)$$

et il sert à normaliser l'enveloppe instantanée du bruit par rapport à la racine carrée de la valeur quadratique moyenne de l'enveloppe instantanée. Autrement dit :

$$\xi = E a_A = \frac{E}{\langle E^2 \rangle^{1/2}} \quad (4-5)$$

$$\xi(\text{dB}) = E(\text{dB}) - E_{\text{rms}}(\text{dB}) \quad (4-6)$$

$$a_A(\text{dB}) = - E_{\text{rms}}(\text{dB}) \quad (4-7)$$

le facteur de normalisation a_A (4-4) peut donc être déterminé en calculant la valeur efficace de l'enveloppe du bruit donnée, soit par une APD expérimentale soit par un enregistrement sur bande magnétique.

Les paramètres A_A et Γ'_A sont évalués approximativement, au moyen d'une APD expérimentale, selon la méthode empirique illustrée à la figure 4-1 [21]. L'indice de recouvrement A_A ($0 < A_A < 1$) correspond à l'abscisse P_1 située dans le prolongement de la pente abrupte de l'APD expérimentale. Le facteur gaussien Γ'_A est déterminé par l'ordonnée du point délimitant la partie de Rayleigh (ligne droite de pente - 1/2) et la partie impulsive de l'APD.

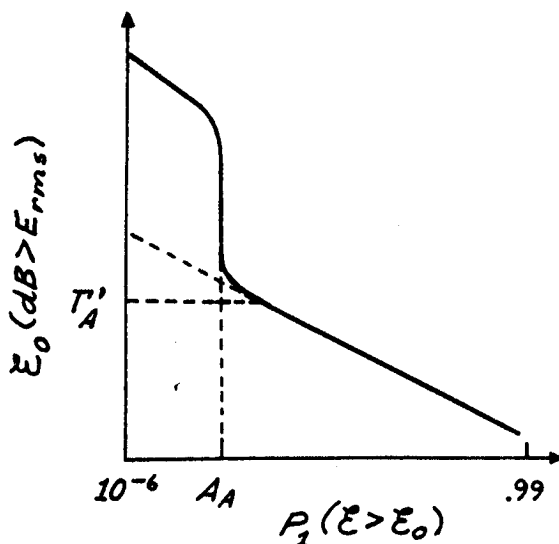


Fig. 4-1. Une APD typique de classe A.

L'intensité de la composante impulsive (non-gaussienne) du bruit Ω_{2A} est déterminée en combinant les équations (4-4) et 4-5) soit :

$$\Omega_{2A} = \frac{\langle E^2 \rangle}{2(1 + \Gamma'_A)} \quad (4-8)$$

Le calcul numérique des APD du bruit de classe A est relativement simple. Il suffit de se fixer une certaine précision à atteindre (de l'ordre d'une partie dans 10 millions) et de faire la somme des M premiers termes de la série ci-dessous obtenue avec les équations (4-1) et (4-3) pour obtenir des valeurs précises. Le nombre de termes M est variable mais on peut mentionner qu'il est de l'ordre de 15 dans les calculs que nous avons effectués.

$$P_1 (\xi > \xi_0)_A \cong e^{-A_A} \sum_{m=0}^M \frac{A_A^m}{m!} e^{-\frac{\xi_0^2 (1 + \Gamma'_A)}{A_A + \Gamma'_A}} \quad (4-9)$$

De plus, la convergence est très rapide du fait que l'indice de recouvrement A_A est toujours inférieur à l'unité.

4.3 RESULTATS NUMERIQUES POUR UN BRUIT DE CLASSE A

Afin de démontrer d'une part que nous avons réussi à mettre en oeuvre le modèle de Middleton sur ordinateur et, d'autre part, de comprendre davantage l'influence des deux paramètres importants du modèle de bruit de classe A, à savoir A_A et Γ'_A , nous présentons plusieurs APD où l'influence de ces paramètres est clairement identifiée.

4.3.1 Influence de Γ'_A

En premier lieu, la figure 4-2 illustre une APD de classe A pour $\Gamma'_A = 0,0001$ et A_A prenant successivement les valeurs de 0,01; 0,1 et 0,5.

Ce premier choix avait pour but de vérifier notre programmation et de reproduire intégralement ce résultat que Middleton a publié à plusieurs reprises [5]. Comme on peut le constater, la concordance est intégrale.

Afin d'illustrer l'influence du paramètre Γ'_A sur une APD de classe A, nous présentons des APD comparatives aux figures 4-3, 4-4, 4-5 et 4-6 tracées

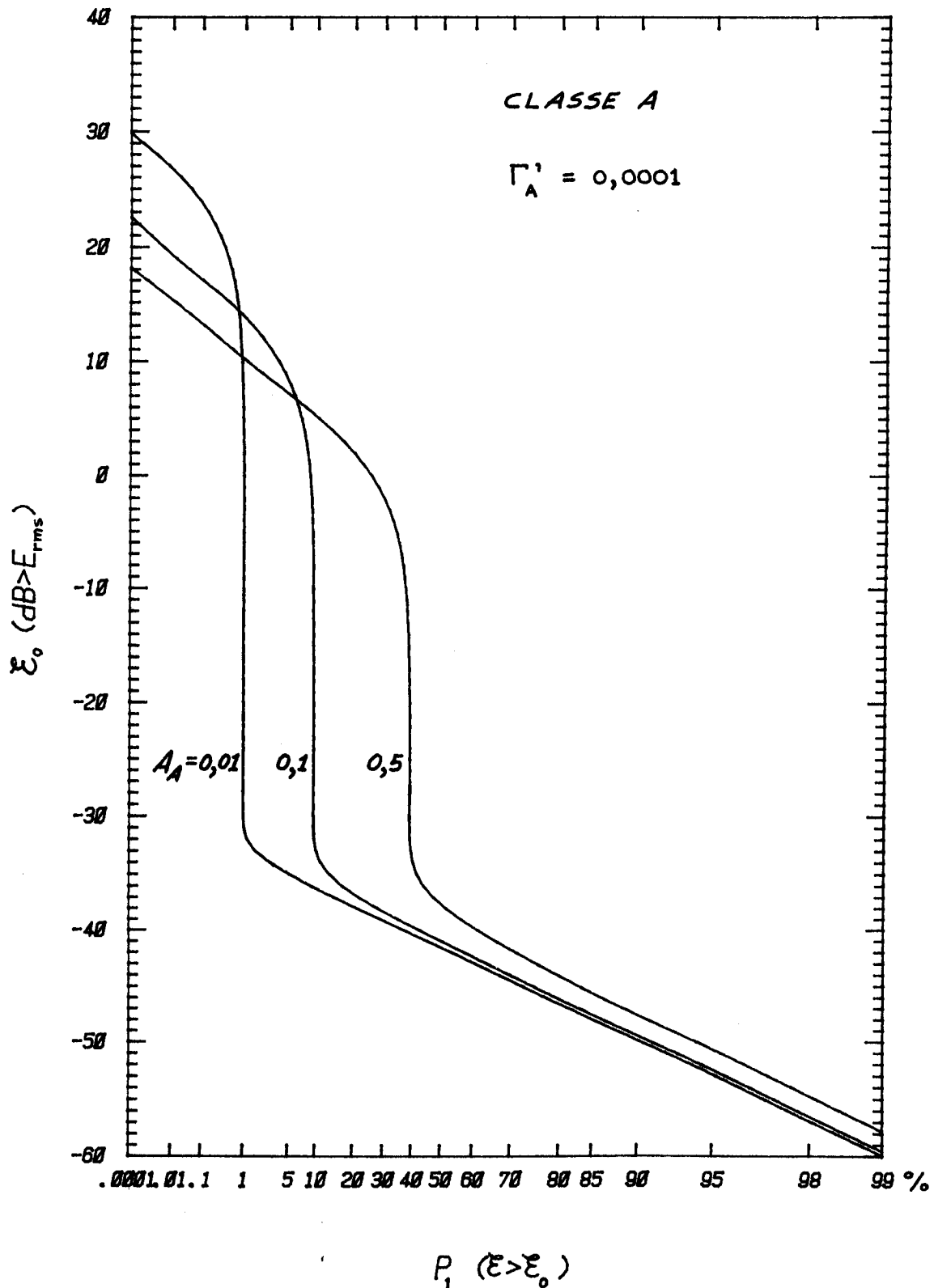


Figure 4-2. APD de classe A pour $\Gamma'_A = 0,0001$ et A_A variable.

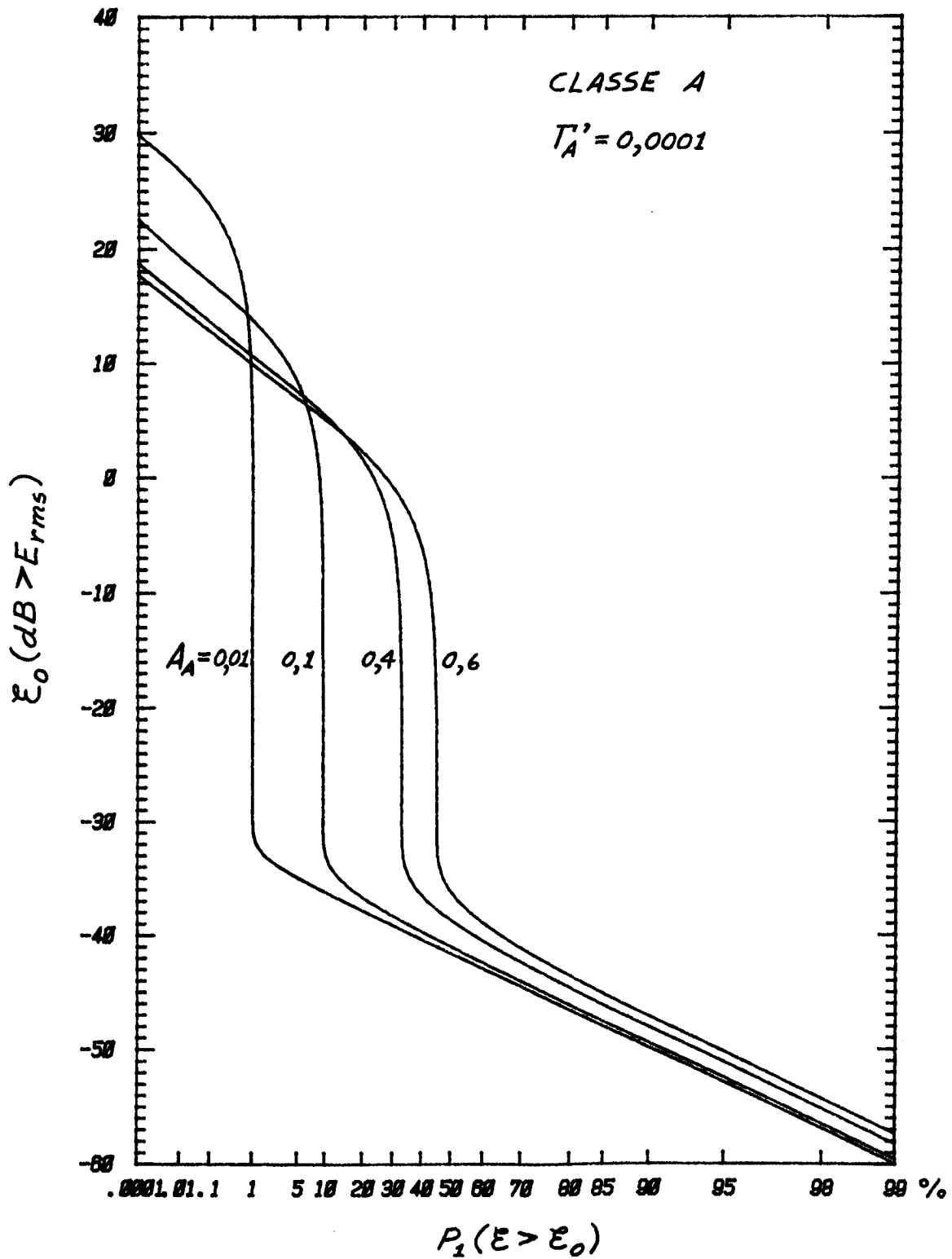


Figure 4-3. APD de classe A pour $\Gamma'_A = 0,0001$ et A_A prenant des valeurs différentes de celles publiées par Middleton.

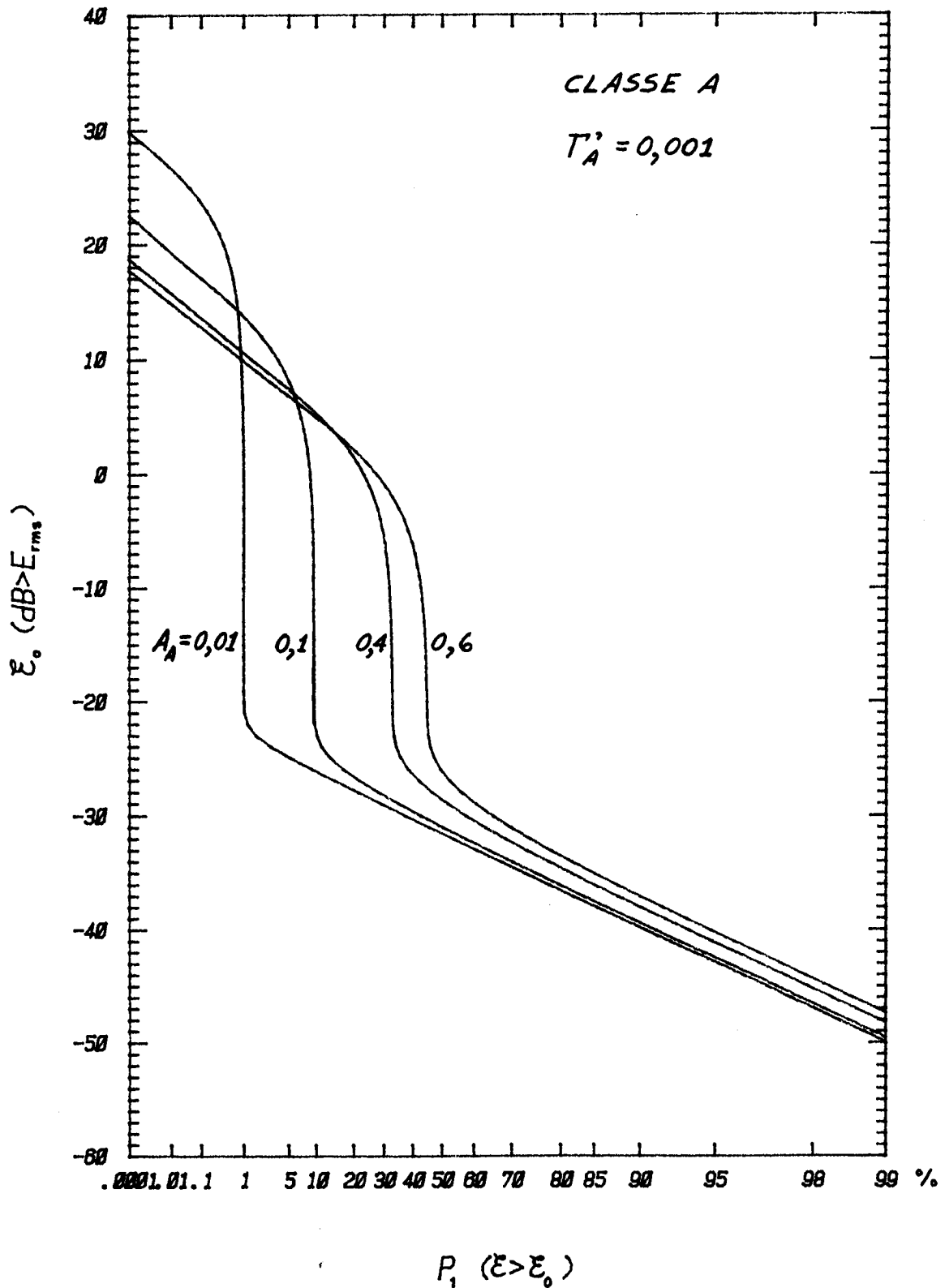


Figure 4-4. APD de classe A pour $\Gamma'_A = 0,001$ et A_A variable.

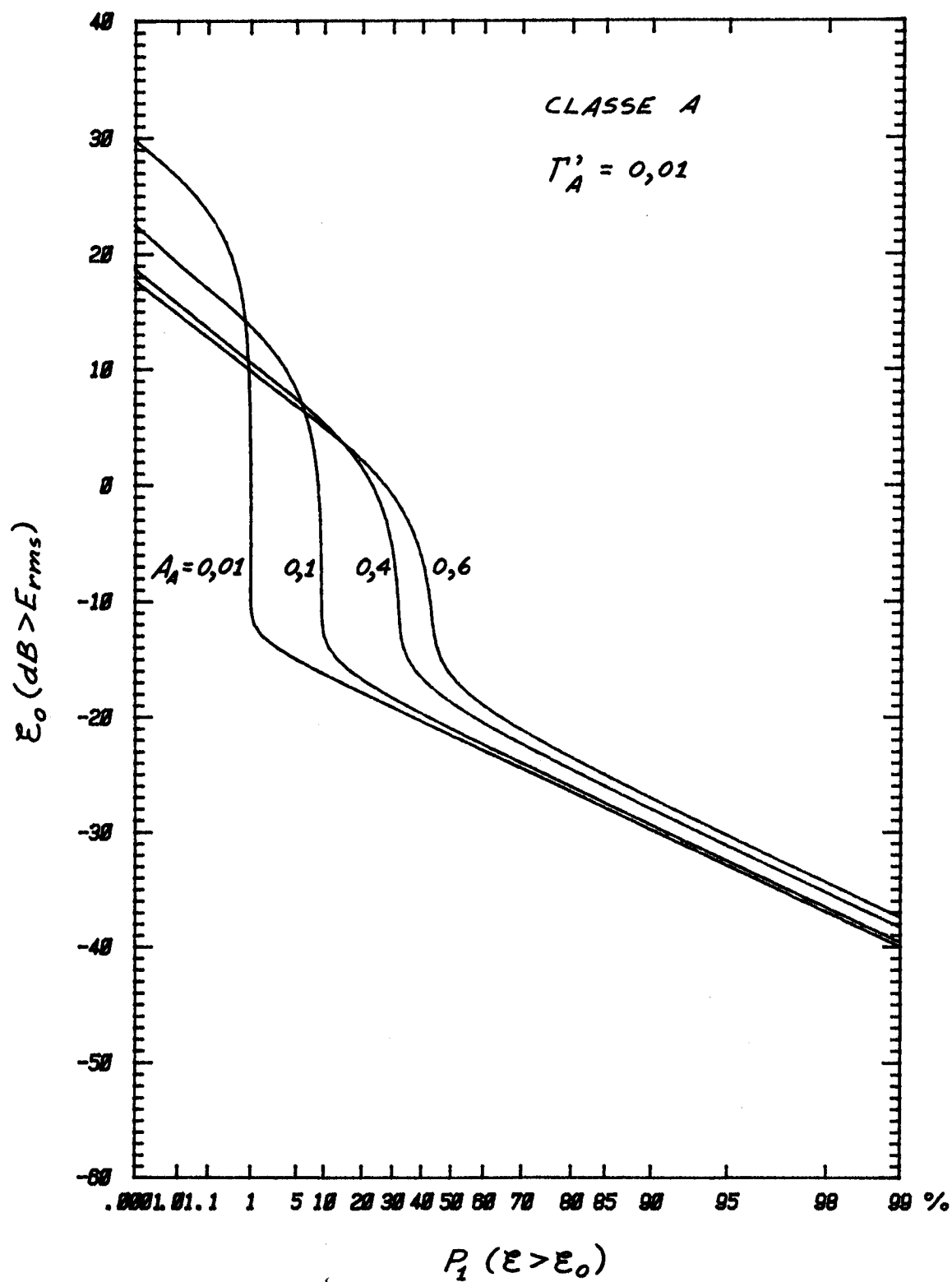


Figure 4-5. APD de classe A pour $\Gamma'_A = 0,01$ et A_A variable.

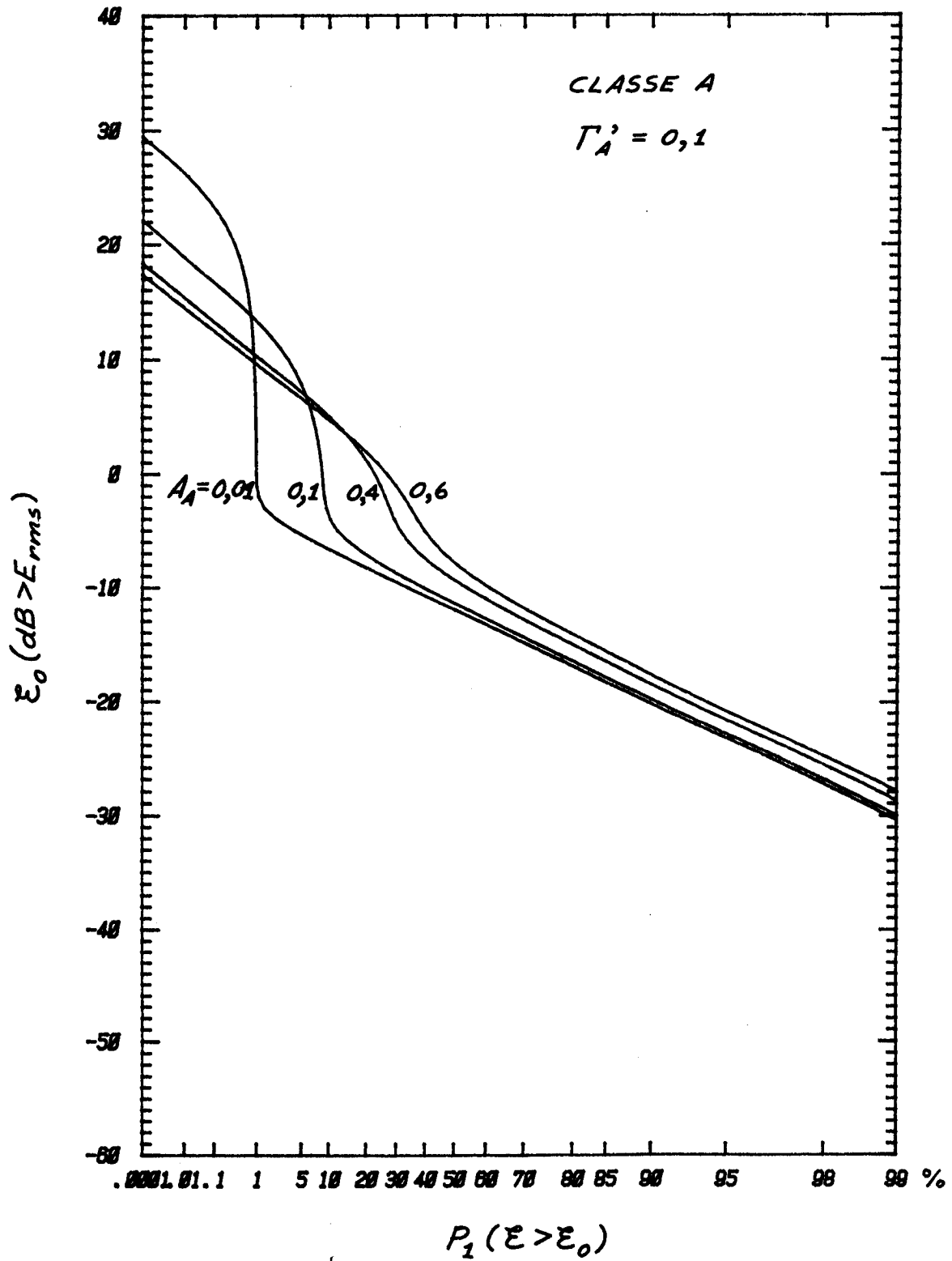


Figure 4-6. APD de classe A pour $\Gamma_A' = 0,1$ et A_A variable.

respectivement pour $\Gamma_A' = 10^{-4}$, 10^{-3} , 10^{-2} et 10^{-1} et ce, pour les mêmes valeurs de A_A (0,01; 0,1; 0,4; 0,6). Par comparaison de ces figures, on voit très clairement que le paramètre Γ_A' (qui est le rapport de la composante gaussienne du bruit à la composante impulsionnelle) est lié également à l'écart dynamique de l'amplitude des impulsions arrivant au récepteur. Ainsi si Γ_A' est faible ($=10^{-4}$, fig. 4-3) cela veut dire que la composante impulsionnelle du bruit est très importante et qu'il est très probable que l'effet de cette composante se fasse sentir à des niveaux inférieurs (~ -35 dB sur la figure 4-3) compte tenu du faible bruit gaussien présent.

A mesure que Γ_A' augmente, cela veut dire que l'importance de la composante gaussienne augmente et que, par conséquence, la nature impulsionnelle du bruit total se fera sentir à des niveaux plus élevés. Cela est clairement démontré par les résultats des figures 4-4, 4-5 et 4-6 où l'on trouve ~ -25 dB, -12 dB et -5 dB lorsque Γ_A' augmente de 10^{-3} à 10^{-1} .

4.3.2 Influence de A_A

D'une façon similaire à la sous-section précédente, nous avons, en premier lieu, reproduit un résultat de Middleton pour bien établir notre interprétation. La figure 4-7 présente une APD de classe A avec les mêmes valeurs de paramètres que ceux de Middleton, i.e $A_A = 0,1$ et Γ_A' variant de 0,1 à 0,0001. Une comparaison avec la courbe de Middleton [5] permet de constater une excellente fiabilité de notre modélisation.

Pour visualiser l'influence de A_A , nous avons fait varier celui-ci de part et d'autre de la valeur de 0,1 utilisée pour la figure 4-7. Le paramètre A_A étant défini comme une mesure du chevauchement des impulsions (eq.3-63) provenant d'une région de l'espace, diminuer sa valeur correspond à supposer l'arrivée d'impulsions de grandes amplitudes moins fréquentes d'une part, et à augmenter la plage dynamique possible d'autre part. La figure 4-8 illustre de façon claire, en comparaison avec la figure 4-7 les deux points mentionnés. En effet, non seulement l'écart dynamique est-il augmenté (+30 dB à -60 dB en comparaison avec +22 dB à -60 dB) mais $P_1(\xi > \xi_0)$ est maintenant de l'ordre de 1% par rapport au 5% qu'elle était à la figure 4-7.

Inversement, faire $A_A = 1$ revient à supposer un chevauchement intégral des impulsions donc à rendre la statistique du bruit gaussienne. A mesure que Γ_A' s'accroîtra, on devrait donc d'une part tendre vers une loi de Raleigh pour

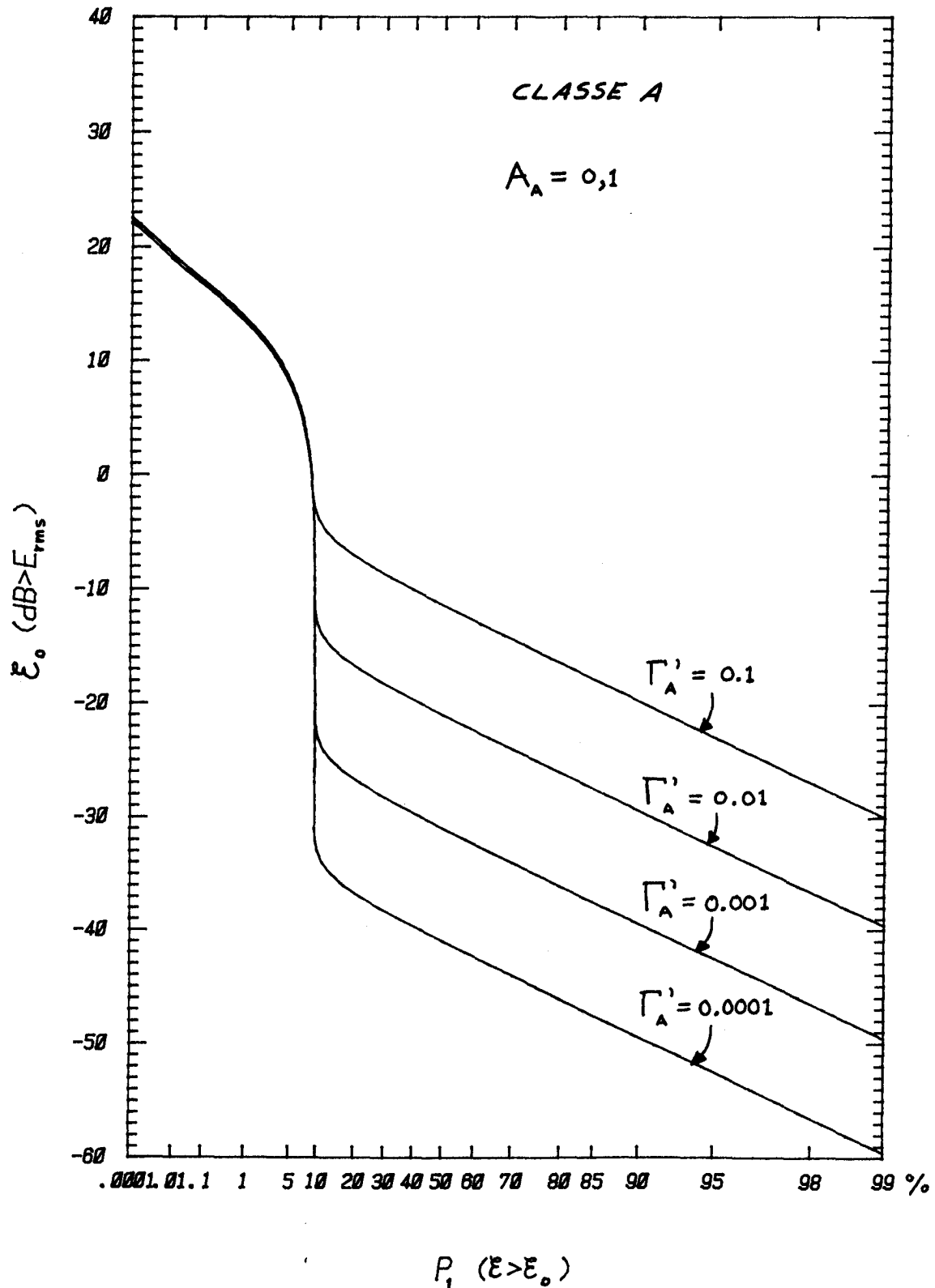


Figure 4-7. APD de classe A avec $A_A = 0,1$ et Γ'_A variable.

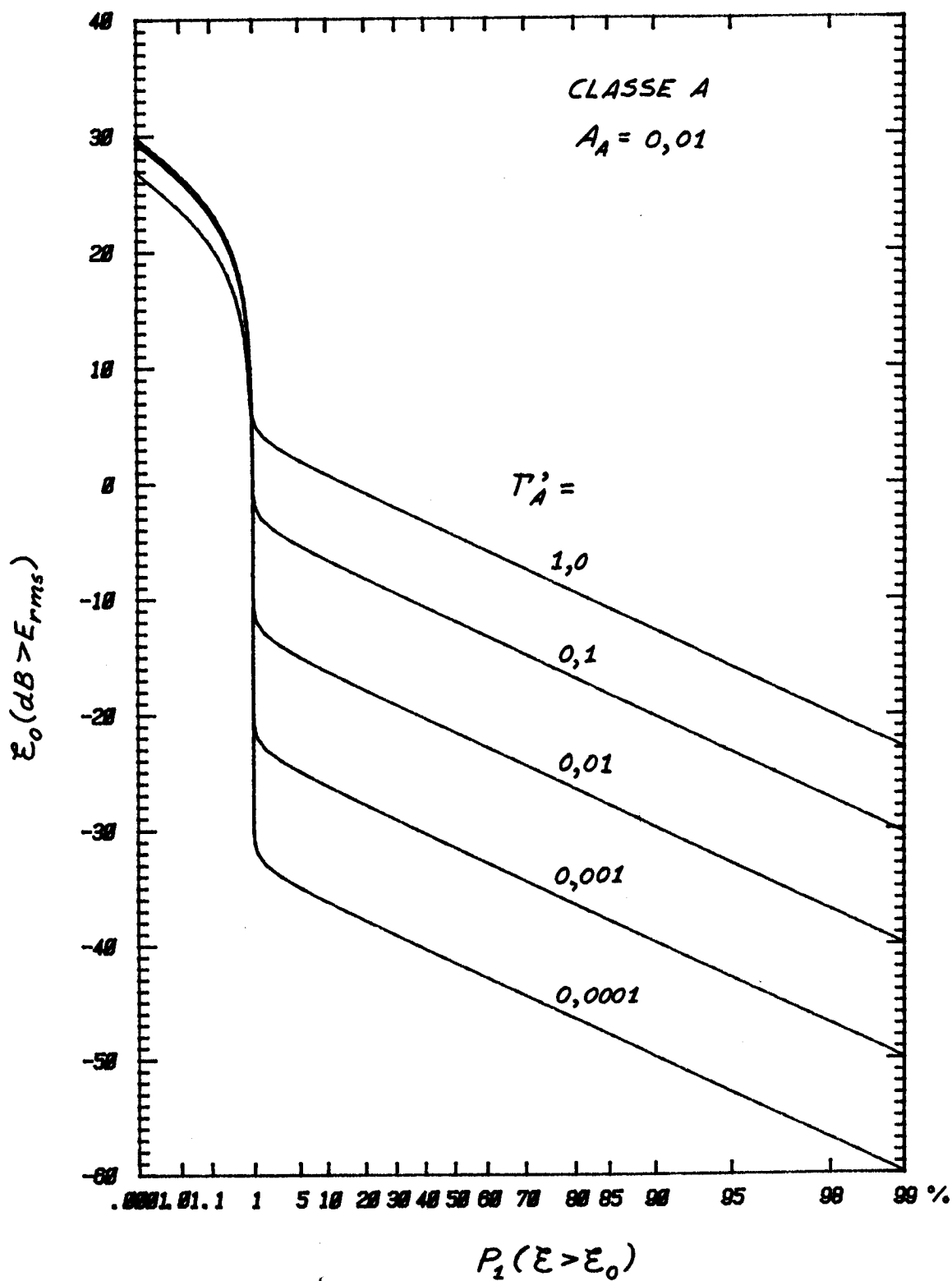


Figure 4-8. APD de classe A avec $A_A = 0,1$ et Γ'_A variable autour de la valeur de 0,1.

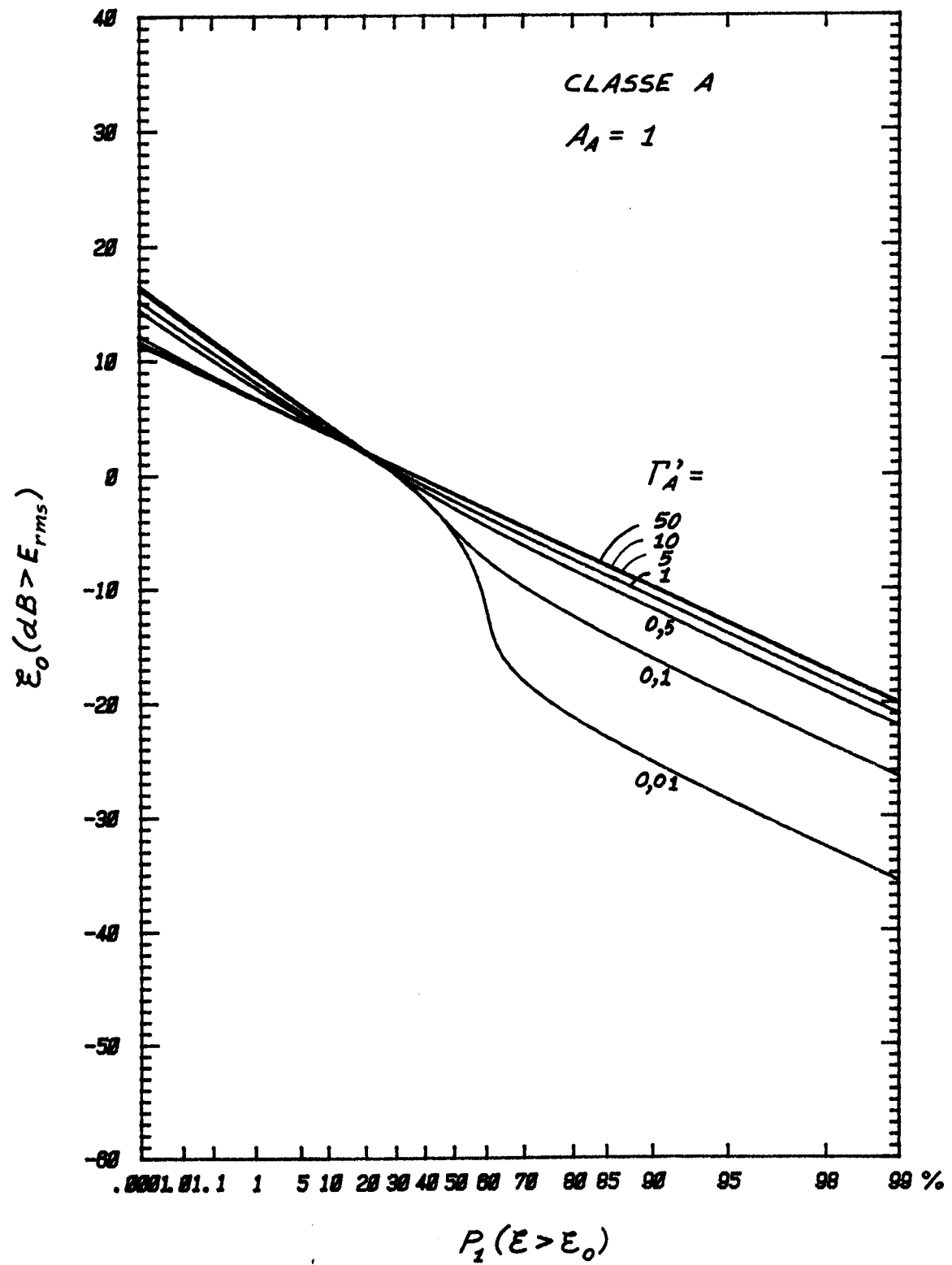


Figure 4-9. APD de classe A illustrant que pour $A_A = 1$, la tendance est une statistique gaussienne.

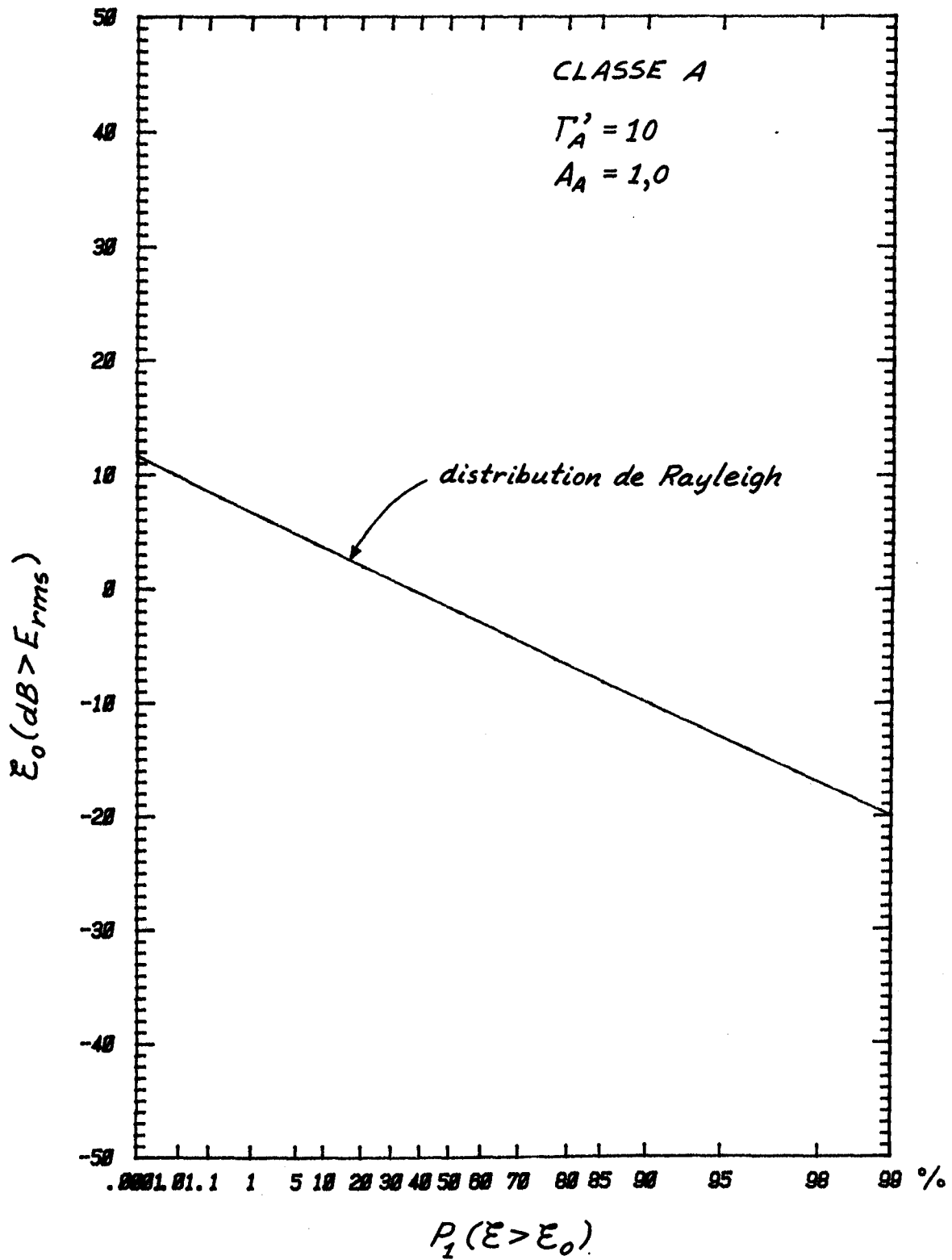


Figure 4-10. Tendence de l'APD vers une distribution de Rayleigh pour $\Gamma_A = 10$ et $A_A = 1,0$.

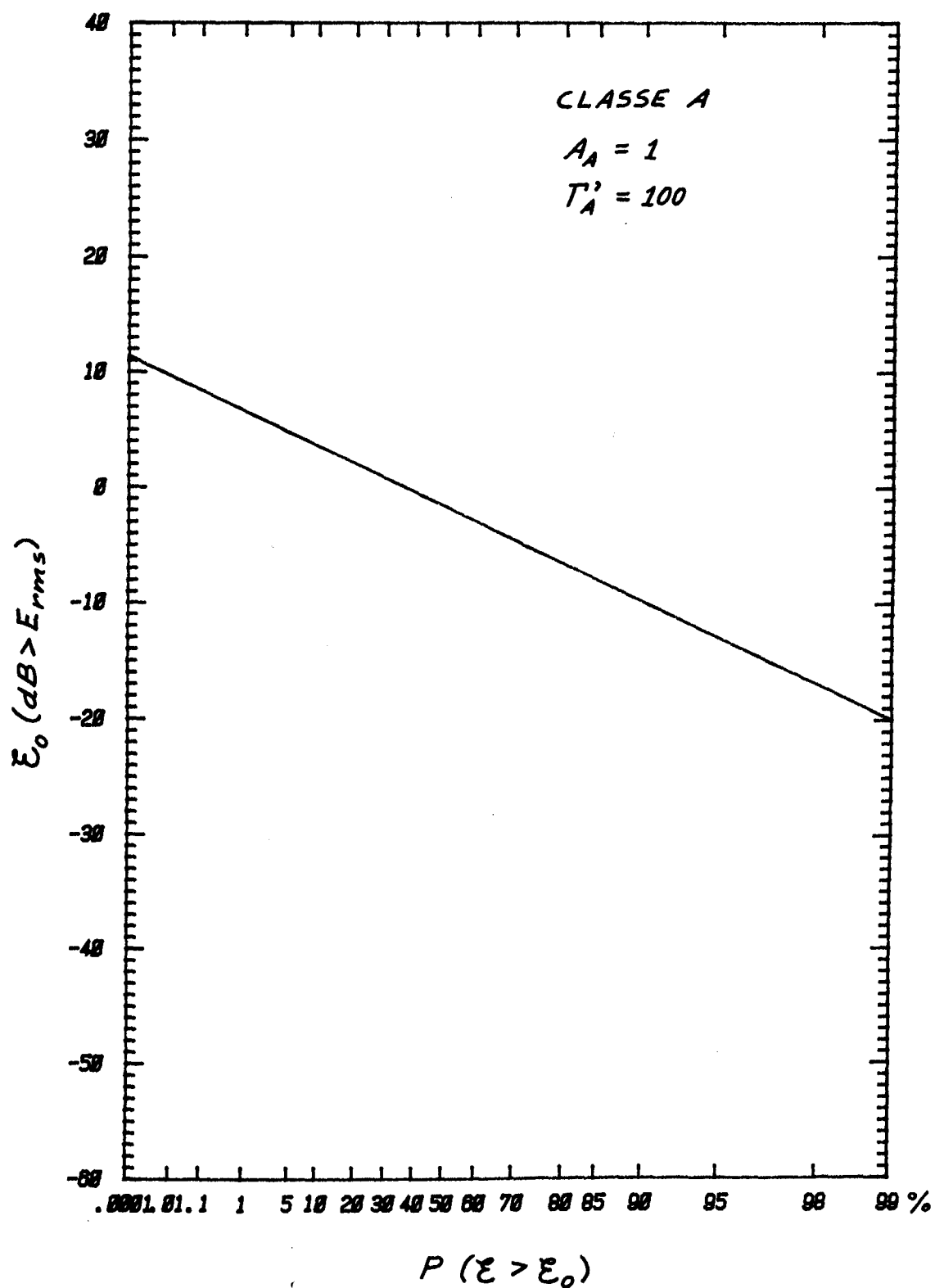


Figure 4-11. Distribution de Rayleigh exacte pour $A_A = 1,0$ et $\Gamma'_A = 100$.

la statistique des amplitude de l'enveloppe et, d'autre part, voir diminuer la plage dynamique possible. La figure 4-9 illustre de façon non équivoque ces deux points.

4.3.3 Distribution des amplitudes de l'enveloppe selon une loi de Rayleigh

Un corollaire assez évident découle de notre interprétation de la figure 4-9. En effet, on peut conclure que si l'on augmente Γ_A' appréciablement tout en gardant $A_A = 1$, on devrait éventuellement rejoindre très exactement une loi de Rayleigh. Il doit être possible de démontrer ceci à la fois numériquement et analytiquement. Les figures 4-10 et 4-11 montrent que l'interprétation ci-haut est juste. En effet, à la figure 4-10 le paramètre Γ_A' est fixé à 10 et A_A est maintenu égal à 1,0. Déjà, on se retrouve très près d'une loi de Rayleigh parfaite et à la figure 4-11, avec $\Gamma_A' = 100$ cela est atteint augmenter Γ_A' au-delà de 100 modifierait le résultat de façon absolument insensible.

Il s'agit là d'une conclusion très importante et qui n'avait pas jusqu'à maintenant, à notre connaissance, été atteinte numériquement ailleurs par le biais du modèle de Middleton.

En plus, il nous est possible de confirmer ceci analytiquement à l'aide de la dérivation qui suit: soit une loi de densité de probabilité de Rayleigh de la forme :

$$p(v) = \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \quad (4-10)$$

Par définition, une APD s'exprime comme :

$$(APD) \quad P(V > v) = \int_v^{\infty} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \quad (4-11)$$

En introduisant les variables intermédiaires:

$$u = \frac{-y^2}{2\sigma^2} \quad (4-12)$$

$$\text{et} \quad du = \frac{-y}{\sigma^2} dy \quad (4-13)$$

on voit que la distribution de Rayleigh s'exprime comme :

$$P(V > v) = e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \quad (4-14)$$

Si on utilise l'équation (4-1) dans laquelle on y substitue (4-2) et (4-3) on peut également écrire :

$$P(\xi > \xi_0) = e^{-A_A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_A^m}{m!} e^{-\frac{\xi_0^2(1+\Gamma'_A)}{m/A_A + \Gamma'_A}} \quad (4-15)$$

Pour réaliser la condition d'une loi gaussienne, on peut écrire (4-15) sous la forme :

$$\lim_{\Gamma'_A \rightarrow \infty} e^{-A_A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_A^m}{m!} e^{-\frac{\xi_0^2(1+\Gamma'_A)}{m/A_A + \Gamma'_A}} \quad (4-16)$$

que l'on peut exprimer sous la forme

$$P(\xi > \xi_0) = e^{-A_A} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_A^m}{m!} \right) e^{-\xi_0^2} \quad (4-17)$$

La définition d'une fonction exponentielle correspond au terme entre parenthèses et (4-17) se réduit donc à :

$$P(\xi > \xi_0) = e^{-A_A} \cdot e^{A_A} e^{-\xi_0^2} \quad (4-18)$$

et il devient évident que :

$$P(\xi > \xi_0) = e^{-\xi_0^2} \quad (4-19)$$

Le résultat est donc une distribution de Rayleigh de l'enveloppe normalisée, i.e.:

$$P(\xi > \xi_0) = e^{-\frac{\xi_0^2}{A}} \quad \text{Distribution de Rayleigh} \quad (4-20)$$

Une application directe de (4-20) nous donne la table 4-1 ci-dessous et ces résultats sont vérifiables sur les figures 4-10 et 4-11.

ξ_0 (dB)	$P(\xi > \xi_0)$ %
-20	99
-10	90,5
0	36,8
10	0,0045
11.4	0,0001

Table 4-1 Application de la distribution de Rayleigh.

4.4 MODELE DU BRUIT RADIO DE CLASSE B - PARTIE I

L'APD, pour des valeurs faibles et intermédiaires ($0 < \xi_0 < \xi_B$) de l'enveloppe du bruit de classe B, est donnée par :

$$\hat{P}_1(\hat{\xi} > \hat{\xi}_0)_{B-I} \approx 1 - \frac{\hat{\xi}_0^2}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \hat{A}_\alpha^n \Gamma(1 + \frac{\alpha n}{2})}{n!} {}_1F_1\left(1 + \frac{\alpha n}{2}; 2; -\frac{\hat{\xi}_0^2}{A}\right) \quad (4-21)$$

avec

$$\hat{\xi}_0 = \xi_0 D_B^{-1} = \xi_0 \frac{N_I}{2G_B} \quad (4-22)$$

$$\xi_0 = E_0 a_B = \frac{E_0}{\langle E^2 \rangle^{1/2}} \quad (4-23)$$

$$G_B^2 = \frac{\frac{4 - \alpha}{2 - \alpha} + \Gamma'_B}{4(1 + \Gamma'_B)} \quad (4-24)$$

où tous les paramètres indiqués ici ont été définis au chapitre précédent à la section 3.9.

L'indice de recouvrement A_B est donné approximativement par :

$$A_B \approx P_1(\xi > \xi_B) \quad (4-25)$$

et le facteur "gaussien" Γ'_B correspond à peu près au point sur l'APD expérimentale où l'enveloppe du bruit ne suit plus une loi de Rayleigh.

Le paramètre de densité spatiale de propagation α peut être évaluée empiriquement à l'aide de la relation :

$$\alpha \approx \frac{P_1(\xi > \xi_B)_{dB} - P_1(\xi > 0)_{dB}}{-10 \text{ dB}} \quad (4-26)$$

Le facteur D_B qui aligne l'APD théorique $P_1(\xi > \xi_0)_{B-I}$ avec l'APD expérimentale $P_1(\xi > \xi_0)_B$ est déterminé approximativement par la relation:

$$D_B(\text{dB}) \approx [\xi_0(\text{dB}) @ P_{1-II} = 0,99] - [\hat{\xi}_0(\text{dB}) @ \hat{P}_{1-I} = 0,99] \quad (4-27)$$

puisque l'on sait que lorsque $\xi_0 \rightarrow 0$, à la limite, on aura $P_{1-I} = P_{1-II}$.

D'une façon similaire, l'indice de recouvrement effectif A_α est donné par :

$$\hat{A}_\alpha \approx \left[1 - \frac{1 - P_I}{\xi_0^2} \right] \frac{1}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})} \quad (>0) \quad (4-28)$$

L'équation (4-28) résulte tout simplement de l'expansion de 4-21 lorsque $\xi_0 \approx 0$.

La présence de la fonction hypergéométrique confluyente, ${}_1F_1(1 + \frac{\alpha n}{2}; 2; -\frac{\alpha^2}{\xi_0^2})$ dans (4-21) complique appréciablement le calcul de $\hat{P}_1(\hat{\xi} > \hat{\xi}_0)_{B-I}$.

Cette fonction hypergéométrique confluyente peut s'écrire comme [30]

$${}_1F_1(a; b; x) = 1 + \frac{ax}{b} + \frac{(a)_2 x^2}{(b)_2 2!} + \dots + \frac{(a)_n x^n}{(b)_n n!} + \dots \quad (4-29)$$

ou bien :

$${}_1F_1(a; b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{(b)_n n!}, \quad (4-30)$$

avec

$$\begin{cases} (a)_n = (a)(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \\ (b)_n = (b)(b+1)(b+2)\dots(b+n-1), \\ (a)_0 = (b)_0 = 1, \end{cases} \quad (4-31)$$

Elle est la solution la plus simple de l'équation différentielle de Kummer qui s'exprime comme

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (b-x) \frac{dy}{dx} - ay = 0 \quad (4-32)$$

Cette série est absolument convergente pour toutes les valeurs de la variable x et des paramètres a et b , réels ou complexes, sauf à $b = 0, -1, -2, \dots$

Pour $\operatorname{Re}(x) < 0$, afin de faciliter le calcul numérique, on applique le premier théorème de Kummer [30].

Pour $|x| \rightarrow \infty$, l'approximation asymptotique suivante doit être utilisée pour évaluer numériquement la fonction hypergéométrique confluyente:

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a; b; x) \sim & \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} e^{\varepsilon i \pi a} x^{-a} \left\{ \sum_{n=0}^{R-1} \frac{(a)_n (1+a-b)_n}{n!} (-x)^{-n} + O(|x|^{-R}) \right\} \\ & + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b} \left\{ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{(b-a)_n (1-a)_n}{n!} (x)^{-n} + O(|x|^{-S}) \right\} \end{aligned} \quad (4-34)$$

pour $R, S = 0, 1, 2, \dots$, $|x| \rightarrow \infty$

$$\text{et } \varepsilon = \begin{cases} 1 & , 0 < \arg x < \pi \\ -1 & , -\pi < \arg x \leq 0 \end{cases}$$

Si x, a et b sont réels et $x \rightarrow -\infty$, $|x| \gg |a|$, $|x| \gg |b|$, l'approximation asymptotique peut se réduire à :

$${}_1F_1(a; b; x) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} |x|^{-a} \left\{ \sum_{n=0}^{R-1} \frac{(a)_n (1+a-b)_n}{n!} (-x)^{-n} + O(|x|^{-R}) \right\} \quad (4-35)$$

$x \rightarrow -\infty$

L'erreur est inférieure au premier terme négligé de la série.

Les équations suivantes sont également utilisées pour évaluer numériquement la fonction hypergéométrique ${}_1F_1\left(1 + \frac{\alpha n}{2}; 2; -\xi_0^2\right)$

$$A) \xi_0^2 < 100: {}_1F_1\left(1 + \frac{\alpha n}{2}; 2; -\xi_0^2\right) = e^{-\xi_0^2} {}_1F_1\left(1 - \frac{\alpha n}{2}; 2; \xi_0^2\right) \quad (4-36)$$

$${}_1F_1\left(1 + \frac{\alpha n}{2}; 2; -\xi_0^2\right) = e^{-\xi_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{\alpha n}{2}\right)_k}{(2)_k k!} \xi_0^{2k} \quad (4-37)$$

$$B) \xi_0^2 > 100: {}_1F_1\left(1 + \frac{\alpha n}{2}; 2; -\xi_0^2\right) \approx \frac{\xi_0^{-2-\alpha n}}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{\left(1 + \frac{\alpha n}{2}\right)_k \left(\frac{\alpha n}{2}\right)_k}{k!} \xi_0^{-2k} + O(\xi_0^{-R}) \quad (4-38)$$

4.4.1 Résultats numériques pour un bruit de classe B - Partie I

Tel que nous l'avons fait pour le bruit de classe A, nous avons en premier lieu vérifié notre modélisation classe B par rapport aux résultats publiés par Middleton [5] en affichant les mêmes valeurs de paramètres. Dans le cas de la partie I de l'APD d'un bruit de classe B, les paramètres à varier sont \hat{A}_α et α (voir équation 4-21).

Ainsi, pour $\alpha = 1,0$ et $\hat{A}_\alpha = 1$ et 10^{-4} , la figure 4-12 montre les résultats obtenus pour l'APD et la figure 4-13 montre une APD calculée pour $\hat{A}_\alpha = 1,0$ et $\alpha = 0,2$ et $\alpha = 1,8$. Les résultats sur ces deux figures se comparent directement avec ceux publiés par Middleton [5,p.123] et montrent hors de tout doute l'exactitude de la programmation.

Afin d'interpréter la signification des paramètres α et \hat{A}_α , nous avons fait varier ceux-ci de façon à illustrer leurs effets sur l'APD résultante. Ainsi, si l'on maintient l'indice impulsional effectif (section 3.96) \hat{A}_α constant et que l'on fait varier le paramètre de densité spatiale de propagation α , on obtient les résultats de la figure 4.14. On constate que, à mesure que α diminue, l'APD résultante tend de plus en plus vers une valeur infinie pour l'amplitude des impulsions les moins probables. Ceci est évidemment contraire à ce que l'on devrait obtenir pratiquement et il s'agit d'une limitation qui sera considérée plus en détail au chapitre suivant.

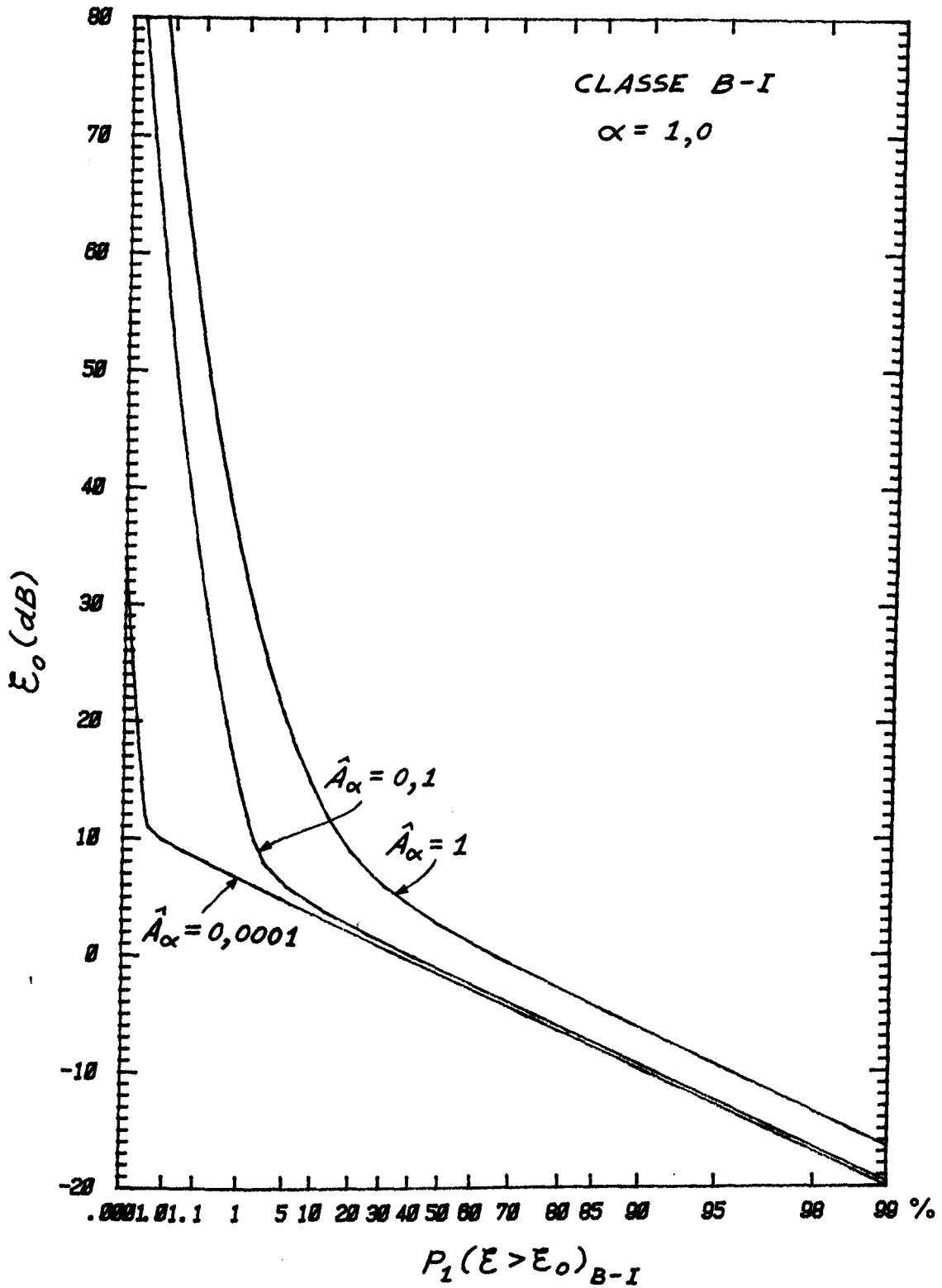


Figure 4-12. APD de classe B-I reproduisant les résultats de Middleton.

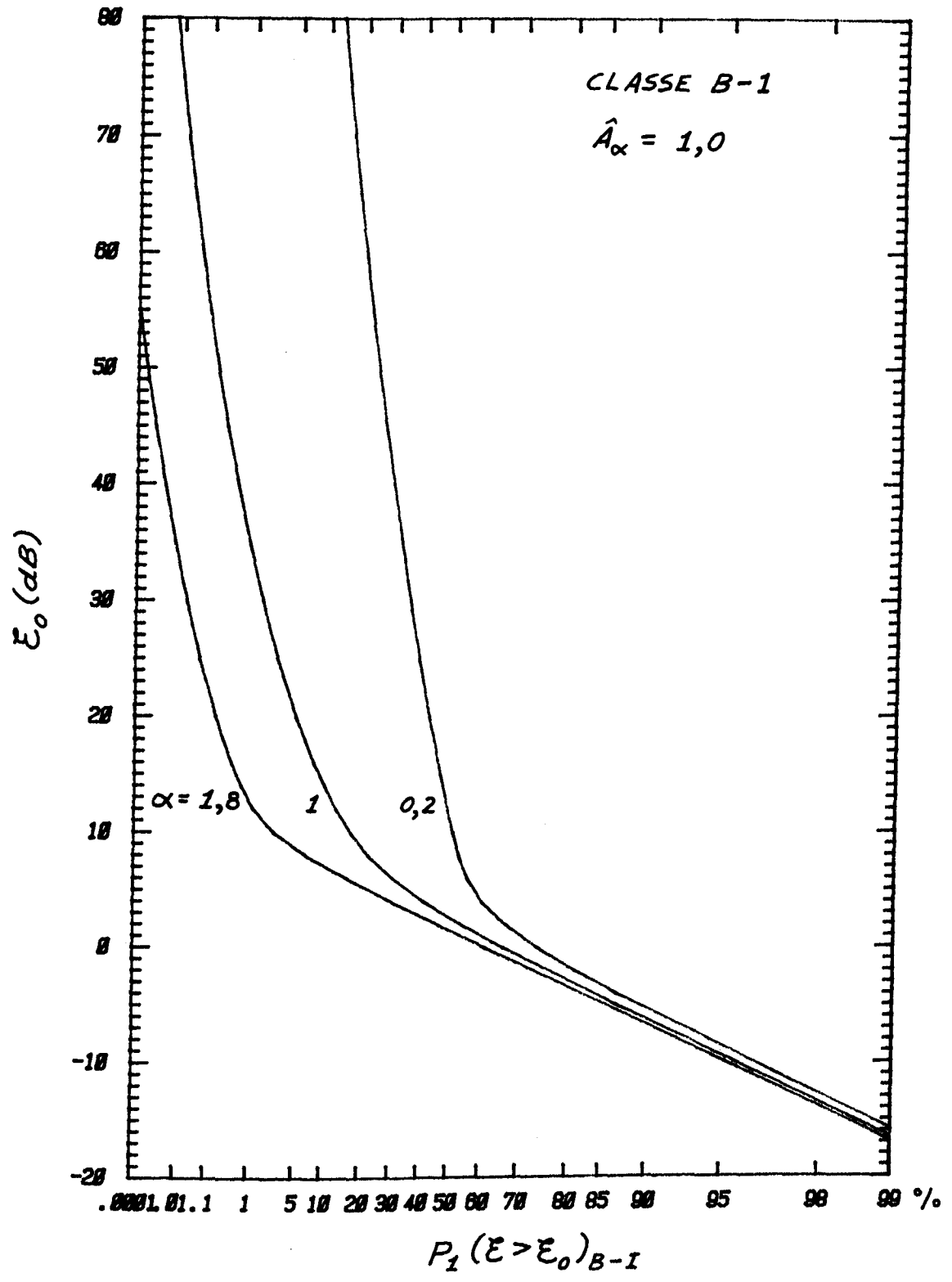


Figure 4-13. APD de classe B-I avec $\hat{A}_\alpha = 1,0$ et α variable.

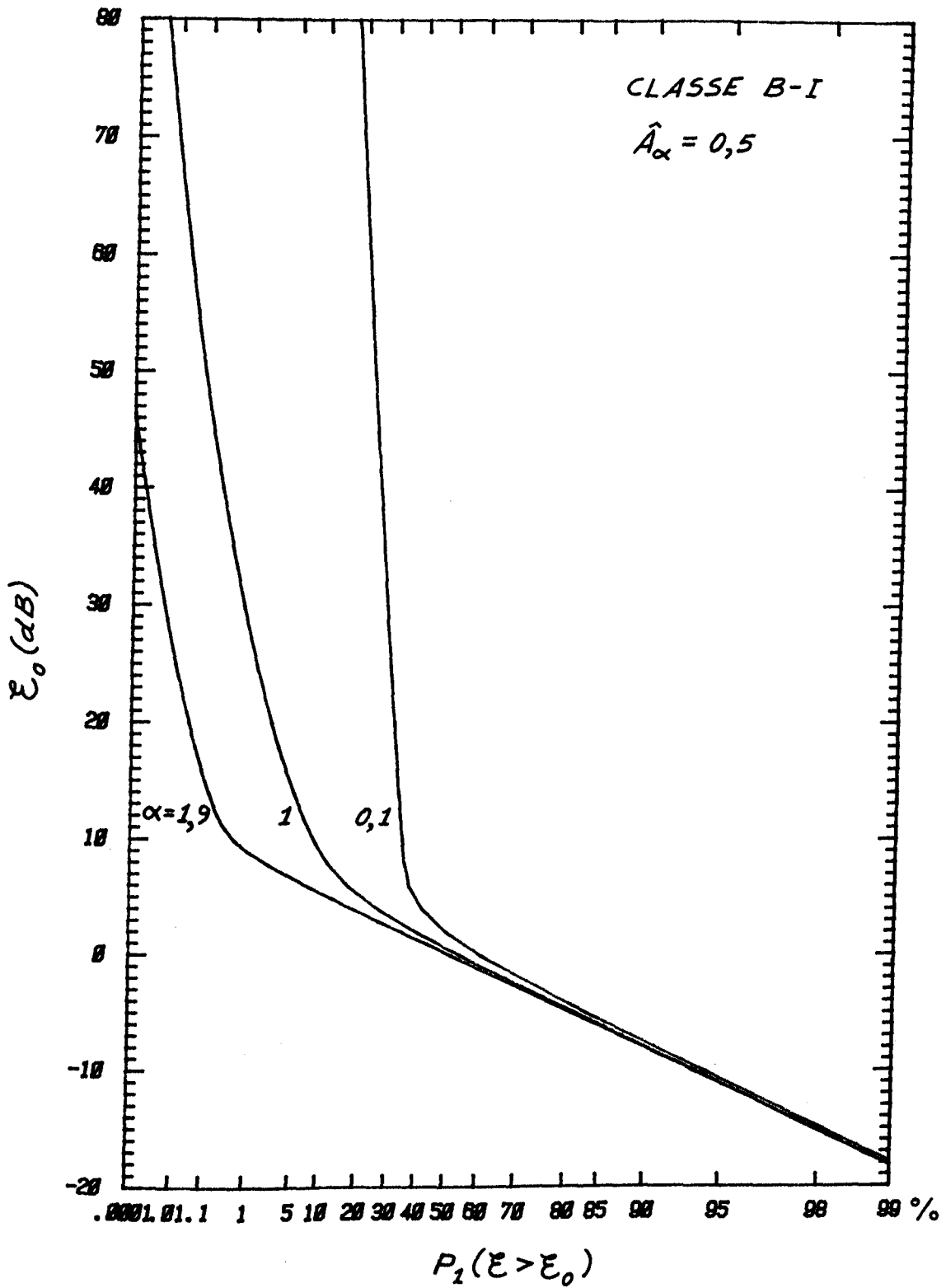


Figure 4-14. APD de classe B-I avec $\hat{A}_\alpha = 0,5$ et α variable.

On peut néanmoins tenter d'interpréter ces courbes en considérant d'une part que \hat{A}_α est paramètre composite (équation 3.124) et que la signification de α n'est pas particulièrement simple non plus. En effet, d'une part A_α n'est pas limité à 1,0, contrairement à A_A du modèle de classe A, parce que comme nous l'avons explicitement mentionné au chapitre trois (3.9.4), il y demeure une partie gaussienne additionnelle résultant du fait que les impulsions traitées en classe B sont à large bande. D'autre part, compte-tenu que α est un paramètre relié à Γ'_B (eq. 3.118) i.e. au rapport de la composante gaussienne à la composante impulsionnelle, une diminution de α implique que les impulsions doivent être très grandes pour amener à exciter aussi largement la composante gaussienne due à ces mêmes impulsions. Il y a donc forcément un dilemme dans le modèle car on ne peut excéder $\alpha = 2,0$ avec les formules approximatives actuellement disponibles et qui sont les seules traitables sur ordinateur.

On met ainsi en évidence une lacune importante de la modélisation actuelle car on ne peut pas arriver, avec les formules disponibles, à faire "pencher" ces courbes vers des valeurs "raisonnables" de $P(\hat{\xi} > \hat{\xi}_0)$ pour des faibles probabilités (0,001 à 0,0001 %). Or la réalité est telle que ces courbes doivent atteindre une valeur quantifiable et non tendre vers l'infini comme c'est le cas actuellement. Middleton [5] admet d'ailleurs implicitement cette lacune en mentionnant que les formules sont valables pour $\alpha < 2$ (ce qui est évident avec 3.118) seulement. On arrive même à avoir, dans le cas de α près de deux, à devoir calculer avec des nombres qui sont de l'ordre de 10^{200} ce qui, physiquement ne fait aucun sens et qui, en analyse numérique, pose des problèmes majeurs de précision.

Les résultats de la figure 4-15 ne fait d'ailleurs que confirmer ce que nous avons discuté précédemment car, en faisant constant ($\alpha = 0,5$) et en faisant varier cette fois \hat{A}_α entre 0,05 et 2, on constate que pour \hat{A}_α suffisamment important ($\hat{A}_\alpha = 0,5$ et 2) le même genre de comportement est observé. Si l'on se rappelle que \hat{A}_α est une mesure indirecte de la nature impulsionnelle du bruit et que si l'on pose que le niveau de ces impulsions est du même ordre de grandeur que le bruit gaussien (en faisant $\alpha = 0,5$), on arrive à avoir, avec un degré de chevauchement assez élevé ($\hat{A}_\alpha = 2,0$), une probabilité très grande ($\sim 3\%$) que le niveau atteint soit près de l'infini. Il manque donc, à notre avis, un "élément modérateur" dans le modèle pour empêcher ceci de se produire car l'on sait qu'en pratique le récepteur se chargerait d'écrêter tout simplement ces impulsions, fussent-elles d'amplitudes inconcevables.

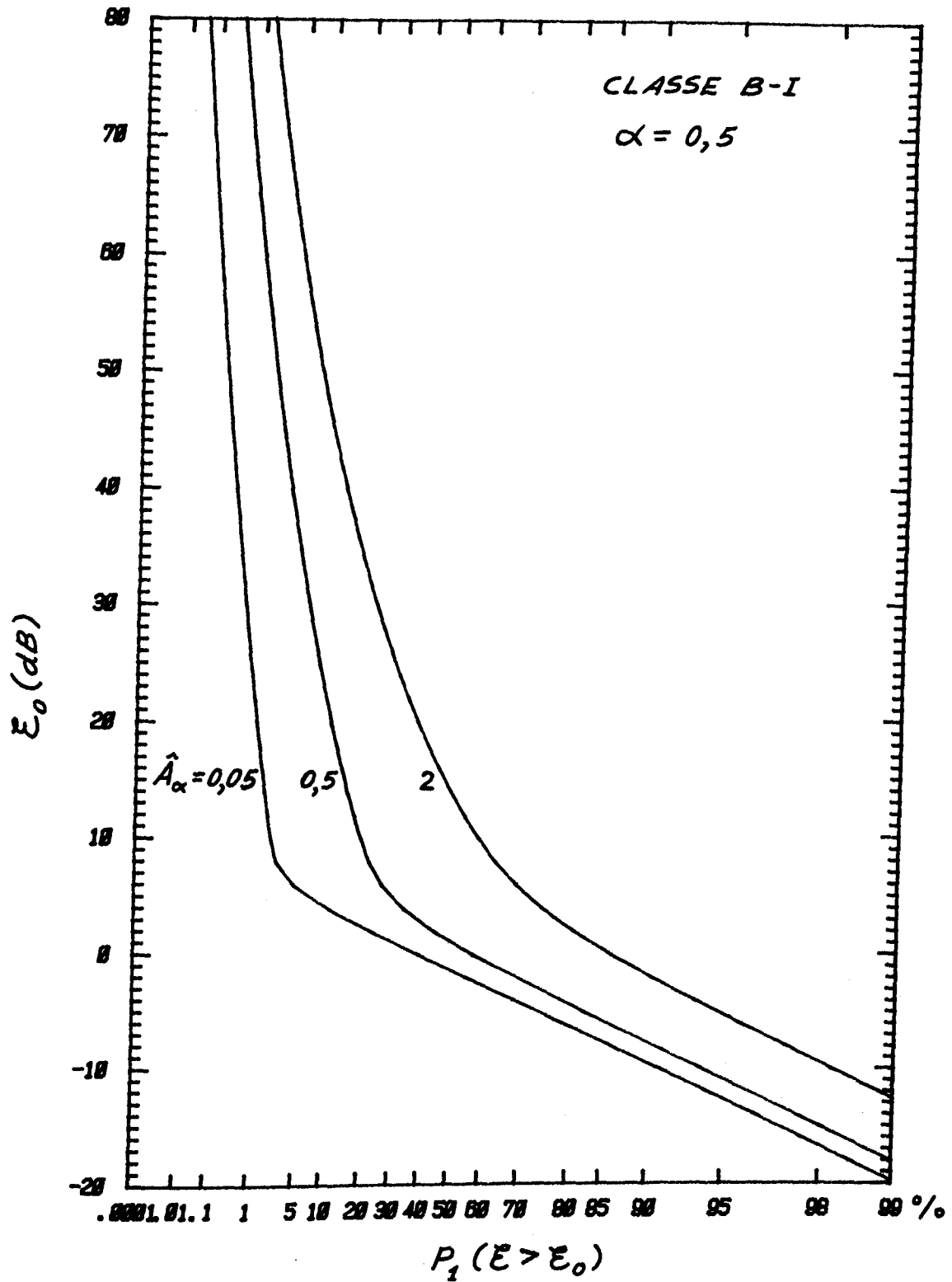


Figure 4-15. Comportement d'une APD de classe B-I avec α grand (0,5) et A_α important.

4.5 MODELE DE BRUIT RADIO DE CLASSE B - PARTIE II

L'APD, pour les valeurs élevées ($\xi_B < \xi_0 < \infty$) de l'enveloppe du bruit radio de classe B est évaluée numériquement avec l'expression :

$$P_1(\xi > \xi_0)_{B-II} \cong e^{-A_B} \sum_{m=0}^M \frac{A_B^m}{m!} e^{-\frac{\xi_0^2 (1 + \Gamma_B')}{\hat{A}_B + \Gamma_B'}} \quad (4-39)$$

$$\text{avec } \hat{A}_B = \left(\frac{2 - \alpha}{4 - \alpha} \right) A_B \quad (4-40)$$

où tous ces paramètres ont été définis au chapitre précédent.

Le calcul d'une APD pour la partie II du bruit de classe B est relativement simple et l'expression est tout à fait analogue à celle présentée en (4.9) pour le bruit de classe A. En effet, la substitution de \hat{A}_B pour A_A et Γ_B' pour Γ_A' dans (4.9) donne le résultat de (4-39).

Il est donc évident que le nombre M de termes requis dans (4-39) pour faire converger la série sera du même ordre de grandeur, i.e environ 15, et que la convergence sera en général très rapide.

4.5.1 Résultats numériques pour un bruit de classe B - Partie II

Les paramètres régissant le comportement de APD d'un bruit de classe B-II sont A_B , Γ_B' et α . On y retrouve donc un paramètre additionnel (α) par rapport au comportement observé pour le bruit de classe A pour lequel nous avons deux paramètres (A_A , Γ_A') et dont l'interprétation des résultats a été faite à la section 4.3.

De même, ce paramètre α a fait l'objet de considérations pour l'APD d'un bruit B-I et il s'agit pour nous de donner une interprétation de son influence dans le contexte où l'effet des deux autres paramètres est déjà connu.

Si l'on considère en premier lieu une valeur de Γ_B' très faible (0,0001), donc un bruit très fortement impulsif, et, en plus, une valeur de A_B faible (0,01), i.e. un chevauchement impulsionnel également faible, la figure 4.16 illustre le comportement de l'APD en fonction de α . D'une part,

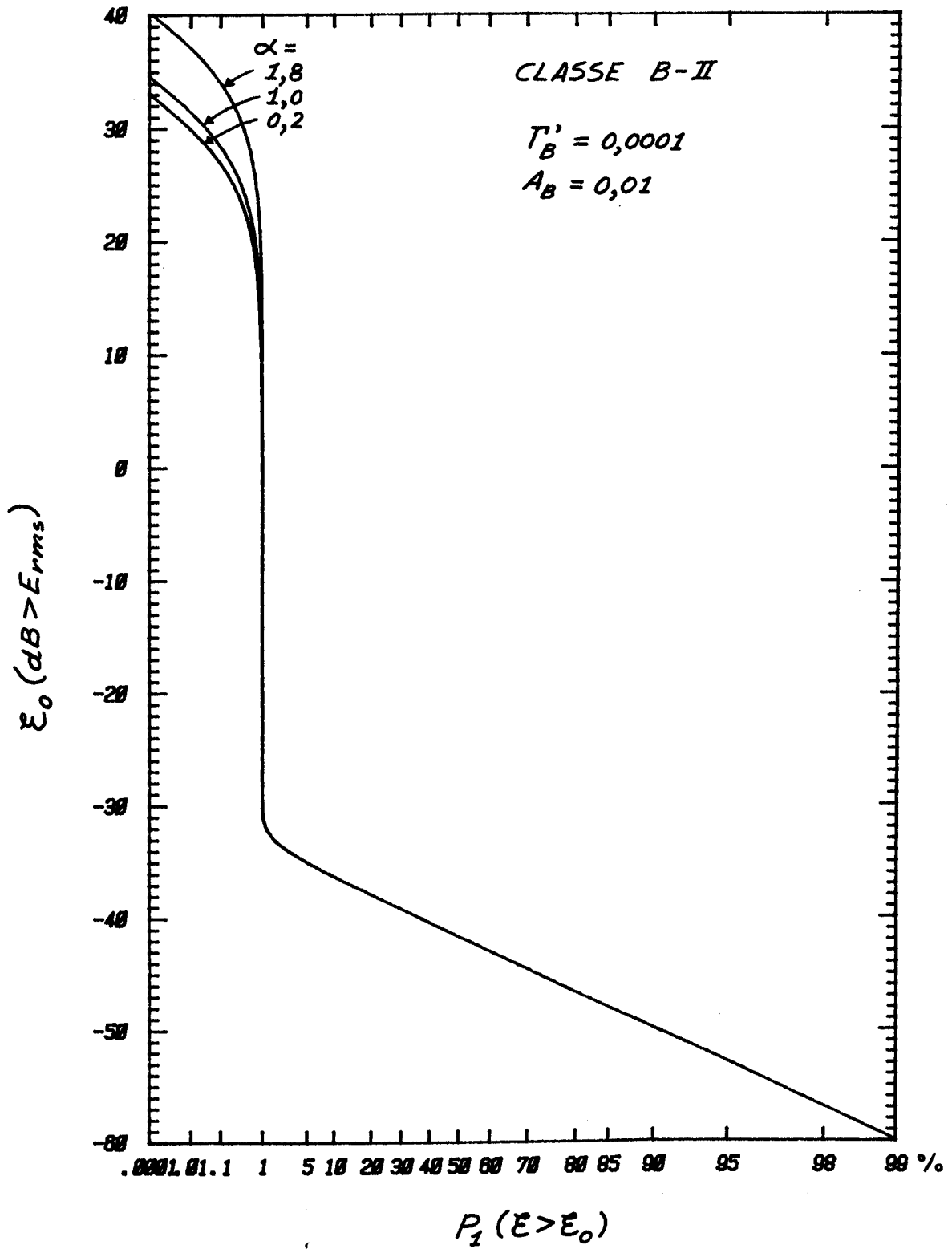


Figure 4-16. APD de classe B-II pour des valeurs de Γ'_B et A_B faibles.

on note que pour les valeurs de A_B et Γ_B' choisies, on a le comportement attendu i.e. grande plage dynamique, composante impulsionnelle très importante, probabilité à peu près égale à la valeur de A_B au point de cassure. D'autre part, le paramètre de densité de propagation α semble agir de la même façon que pour B-I, i.e. qu'une augmentation de sa valeur correspond à une augmentation importante de l'amplitude maximale possiblement atteinte par les grandes impulsions moins probables sans toutefois atteindre l'infini comme l'APD d'un bruit B-I.

Pour une même valeur de Γ_B' (0,0001) mais pour un chevauchement plus important, $A_B = 0,1$ au lieu de 0,01, on observe à la figure 4.17 le résultat attendu, i.e. plage dynamique moins grande, diminution de la probabilité de grandes impulsions. Le comportement en fonction de α est le même qu'à la figure 4.16.

La figure 4.18 avec $\Gamma_B' = 0,0001$ et $A_B = 0,5$ ne fait que renforcer l'ensemble de nos conclusions sur l'influence des paramètres Γ_B' , A_B et α et le lecteur pourrait, le cas échéant, prédire le comportement de l'APD selon la valeur attribuée à chacun de ces paramètres à partir de l'ensemble des courbes que nous lui avons présentées.

Ainsi, si l'on fixe $\Gamma_B = 0,1$, cela veut dire que l'on diminue la partie impulsive du signal de bruit, donc notre plage dynamique devrait être réduite. En maintenant un indice de chevauchement A_B égal au cas précédent ($A_B = 0,1$), le lecteur averti pourrait, à toutes fins pratiques, vérifier ses prévisions avec les résultats présentés à la figure 4.19.

4.6 APD COMPOSITE D'UN BRUIT DE CLASSE B

Tel que nous l'avons mentionné à la section 3.10, "l'ajustement" des résultats obtenus avec le modèle du bruit de classe B et ceux découlant d'une mesure expérimentale nécessite que l'on introduise le facteur d'échelle N_I et que l'on détermine, à partir des résultats expérimentaux uniquement, le point de transition ξ_B , un paramètre empirique qui, en quelque sorte, une solution de rechange assez pâle, à notre avis, à l'élément "modérateur" discuté à la section 4.4.1. Il est en effet assez décevant, après s'être livré à un exercice mathématique aussi rigoureux que la modélisation physico-statistique de Middleton, de devoir introduire ce paramètre totalement empirique pour amener les résultats à "coller" à la réalité expérimentale. A ce stade-ci de notre étude cependant, nous ne pouvons que nous satisfaire temporairement de

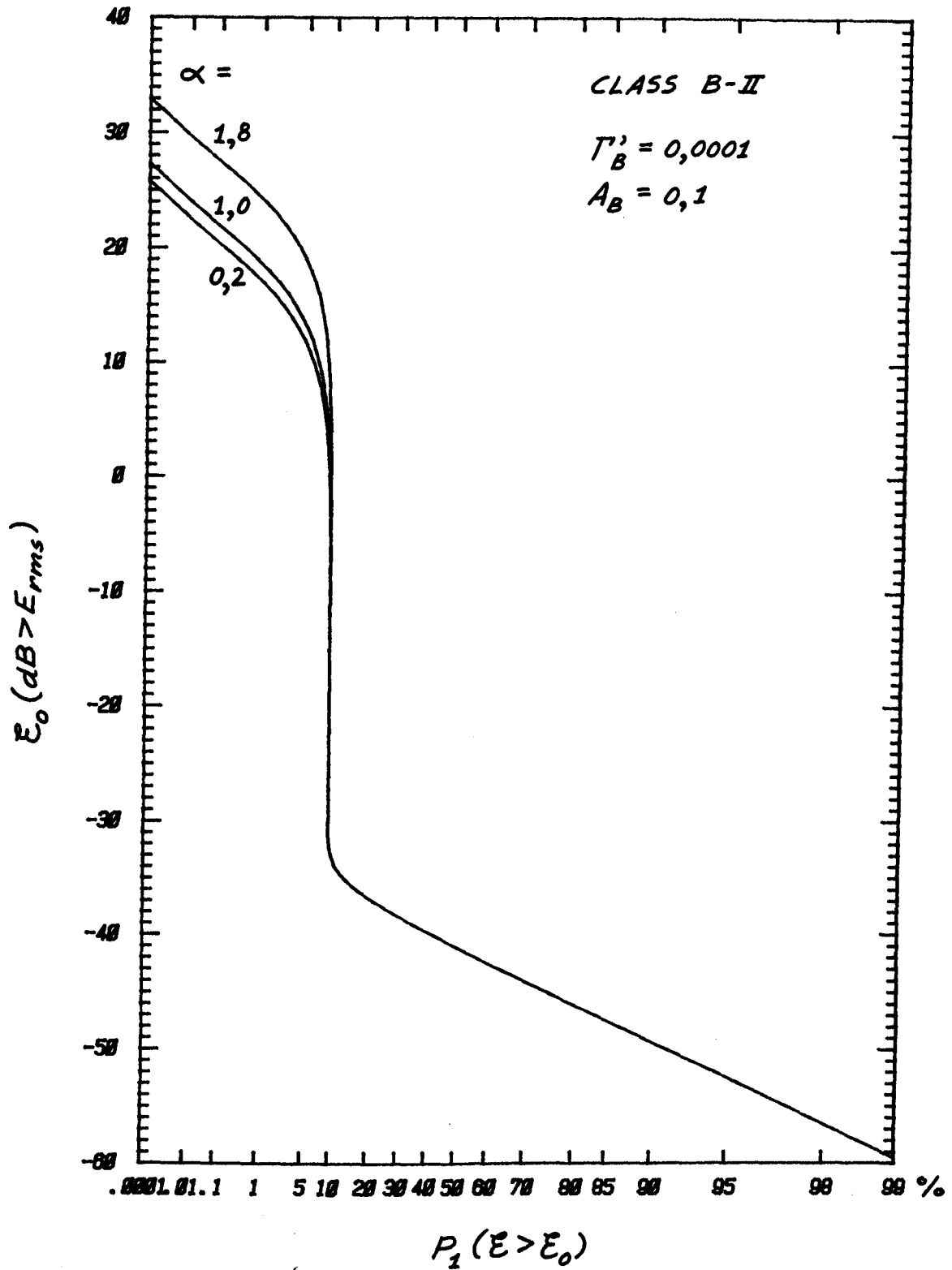


Figure 4-17. APD de classe B-II pour Γ_B' faible et $A_B = 0,1$.

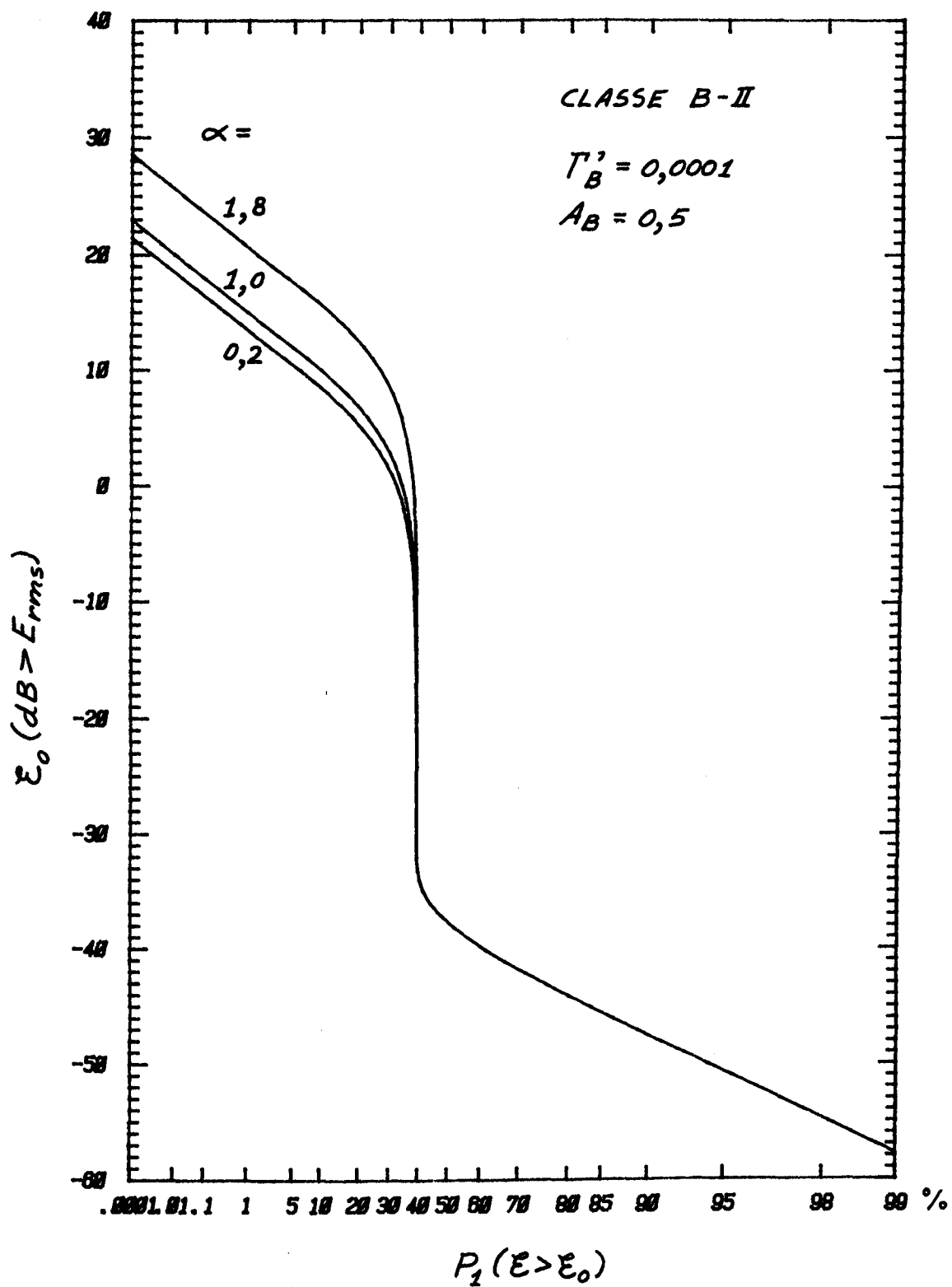


Figure 4-18. Comportement d'une APD classe B-II pour $\Gamma'_B = 0,0001$ et $A_B = 0,5$.

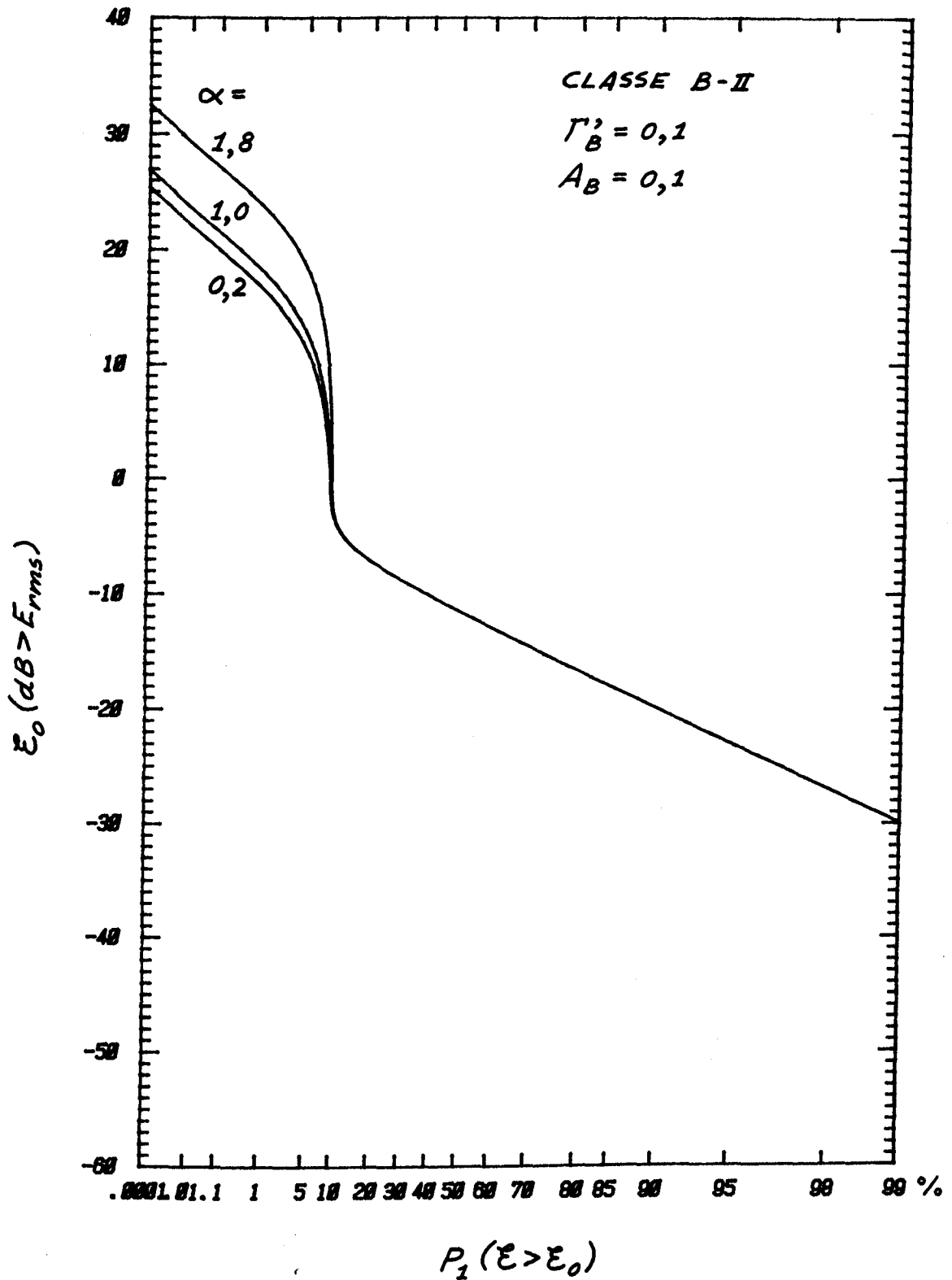


Figure 4-19. APD de classe B-II pour $\Gamma'_B = 0,1$ et $A_B = 0,1$.

cet élément qui ne semble pas cadrer dans le contexte.

Même si cet exercice dépassait très largement les objectifs de ce contrat, nous avons tenté de reproduire une APD composite à partir de nos résultats précédents. La figure 4.20 illustre de façon précise comme la jonction de la courbe I du modèle de bruit de classe B s'effectue avec la partie II du même modèle en un point noté ξ_B . Ce résultat se compare facilement avec ceux publiés par Middleton [21] sauf que nous avons changé les valeurs des paramètres pour bien montrer que nous étions également en mesure de produire ce genre de résultats. Dans le cas de la figure 4.20, nous avons déterminé que la valeur de ξ_B était de 21 dB et celle de D_B^{-1} de 16,6 dB. L'APD composite résultante est indiquée en trait plein et l'on note qu'il y aurait lieu de faire une étude pour voir s'il est possible de réaliser ce genre de courbes sur toute la plage possible de variation des divers paramètres.

Il s'agit cependant de résultats préliminaires et nous serons certainement en mesure d'obtenir dans la prochaine phase de ce contrat des courbes composites mieux documentées à partir de résultats expérimentaux obtenus par les chercheurs du CRC.

4.7 CONCLUSIONS

Les résultats présentés dans ce chapitre démontrent sans conteste que nous possédons maintenant la compréhension et les outils nécessaires pour faire une étude très sérieuse de la modélisation du bruit radio à l'aide du modèle physico-statistique le plus général, soit celui de Middleton.

Non seulement pouvons-nous reproduire l'ensemble des résultats publiés par ce dernier mais nous sommes également en mesure de produire un ensemble de résultats obtenus en variant les paramètres et en donner une interprétation cohérente quelle que soit la situation envisagée. A notre connaissance très peu d'auteurs, voire aucun, sauf Middleton lui-même ont publiés des résultats aussi complets en utilisant des programmes développés indépendamment.

Nous croyons donc être en mesure, au cours d'une phase ultérieure de ce contrat, de finaliser la modélisation du bruit radio selon l'approche de Middleton et de présenter des résultats encore plus originaux car nous ferons directement appel à des mesures expérimentales effectuées au Canada.

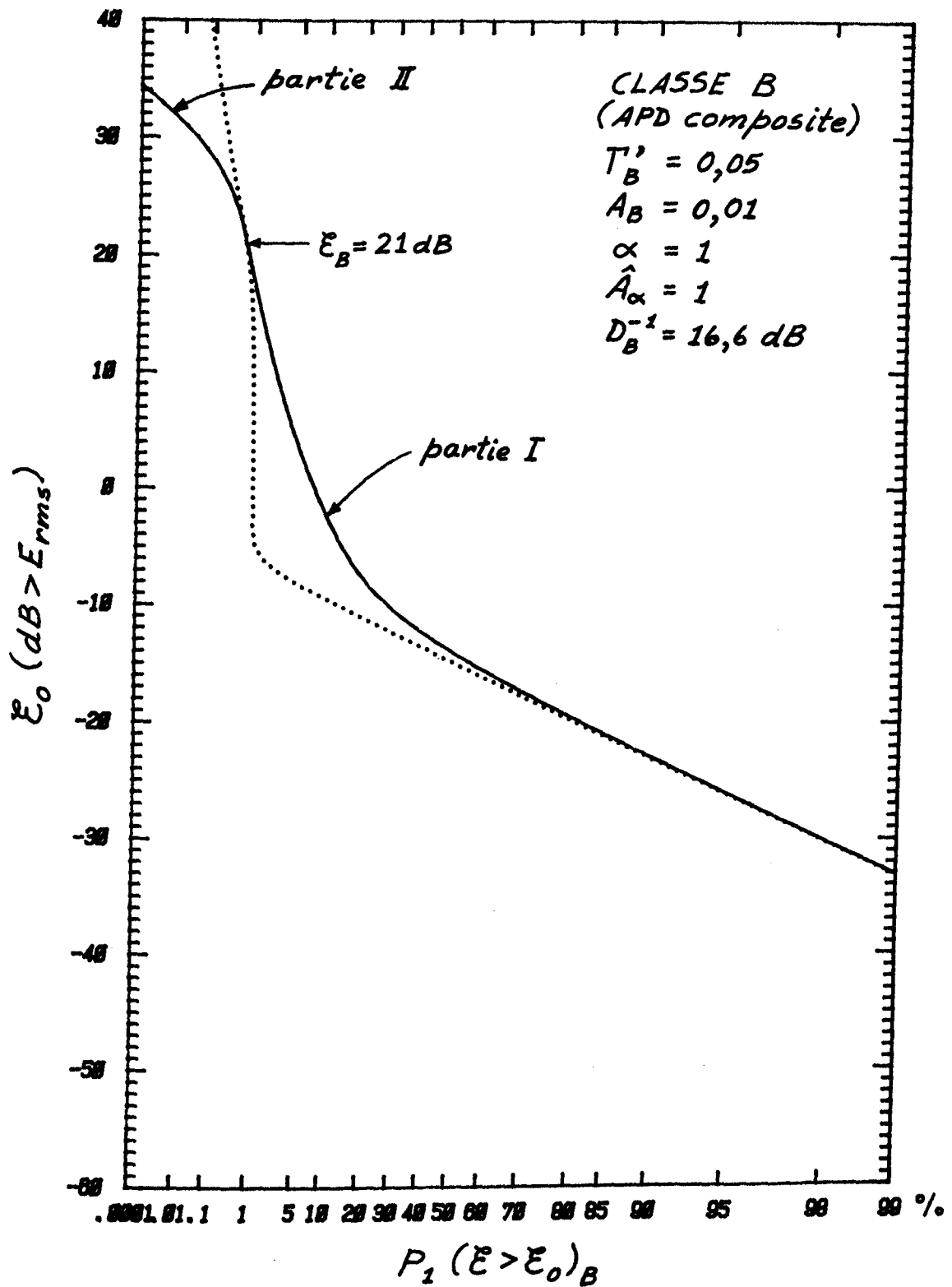


Figure 4-20. Réalisation d'une APD composite à partir des parties B-I et B-II avec les valeurs de paramètres indiquées.

Nous envisagerons également une approche intégrée au problème de l'acquisition directe de l'APD à partir d'un traitement en temps différé de résultats expérimentaux obtenus en temps réel.

Chapitre 5

CONCLUSIONS

5.1 APERCU GENERAL

Globalement, les travaux de recherche effectués au cours de ce contrat se sont avérés très concluants quant à la possibilité de comprendre et de mettre en oeuvre la modélisation physico-statistique du bruit radio proposée par Middleton. Les résultats présentés jusqu'à maintenant nous laisse très optimiste sur les chances de mettre au point un système intégré d'acquisition et de traitement de données provenant de la mesure de bruit radio de toutes origines et d'en faire une interprétation valable, le but ultime étant son utilisation directe pour la prédiction de performance de divers systèmes de communications en présence de bruit.

5.2 POINTS PARTICULIERS

Comme nous l'avons relevé au chapitre précédent, quelques points de l'approche de Middleton nous laissent perplexe, particulièrement en ce qui a trait à l'ordre de grandeur des variables impliquées dans les calculs de l'APD d'un bruit de classe B-I et, par voie de conséquence, à l'extrême précision requise de l'analyse numérique utilisée pour faire les calculs. Il semble que l'on doive procéder à une étude en profondeur de la limitation imposée sur le paramètre de la densité de propagation α pour obtenir des expressions "traitables" sur ordinateur.

En effet, non seulement α est-il limité à 2 mais, pour des valeurs qui s'en approche, l'ordre de grandeur des fonctions gamma et hypergéométrique confluyente impliquées ne nous semble avoir aucune relation avec la réalité physique. Nous envisageons de reprendre une partie de la dérivation des expressions de calcul d'une APD de bruit de classe B-I en ayant pour objectifs, d'une part de les simplifier et, d'autre part, de lever cette restriction si cela est possible afin de faire coller davantage les résultats obtenus en pratique. Pour ce faire, l'équation (3.107) devrait être le point de départ

quoique nous pressentons qu'il faille remonter davantage dans la formulation de base.

Nous envisageons également de produire des résultats de la modélisation à partir de résultats expérimentaux obtenus par les chercheurs du CRC afin d'une part de s'affranchir des résultats publiés par Middleton et, d'autre part, de confirmer ou d'infirmer l'hypothèse fondamentale de ce dernier à savoir que le modèle est canonique et qu'il peut s'appliquer à toutes les situations, quel que soit le bruit ou la source qui le génère.

5.3 APERCU DES TRAVAUX A VENIR

En plus des points mentionnés à la section précédente, nous avons fait part dans une proposition en date du mois de février 1981 et pour laquelle nous avons d'ailleurs obtenu un renouvellement de contrat, de nos objectifs les plus immédiats dans ce qui constitue une suite logique à notre étude actuelle. En bref, les principaux objectifs sont :

A) Procéder à la conception de techniques de traitement compatibles avec les appareils standards de mesure de bruits déjà disponibles au CRC, soit:

- Singer MM-26T,
- Singer NM-37/57,
- R. Brancker Research Ltd,

en s'assurant qu'ils soient utilisables dans la plage dynamique exigée.

B) Procéder à la mise au point de programmes (software) de traitement de signaux, dans une bande de l'ordre de 10 kHz, qui fournissent en temps réel si possible, sinon en différé, les valeurs statistiques temporelles

[V_{RMS} , V_D , L_D , PSD (pulse spacing distribution), ACR (average crossing rate), ou autres] comme il a été dit plus haut, exigées pour l'évaluation de la performance de systèmes de communication.

C) Evaluer la technique de détection et la validité des hypothèses retenues lors de la phase A, ce dans le cadre d'une campagne de mesures, dans une unité mobile du CRC. Cette campagne exigera, cela va de soi, la présence de certains membres du personnel du CRC, avec lesquels des arrangements préalables auront été faits.

Il va de soi que la réalisation de l'ensemble de ces objectifs pourrait éventuellement conduire à la conception d'un système intégré de mesure du bruit

radio-électrique qui pourrait avoir l'allure de celui présenté à titre informatif seulement à la figure 5.1.

5.4 REMERCIEMENTS

Les auteurs désirent remercier sincèrement les autorités scientifiques de ce contrat, MM. W. Lauber et T. Coyne pour leur intérêt et confiance dans ce projet qui apparaissait au départ, très difficile à réaliser compte tenu de la complexité du sujet à l'étude.

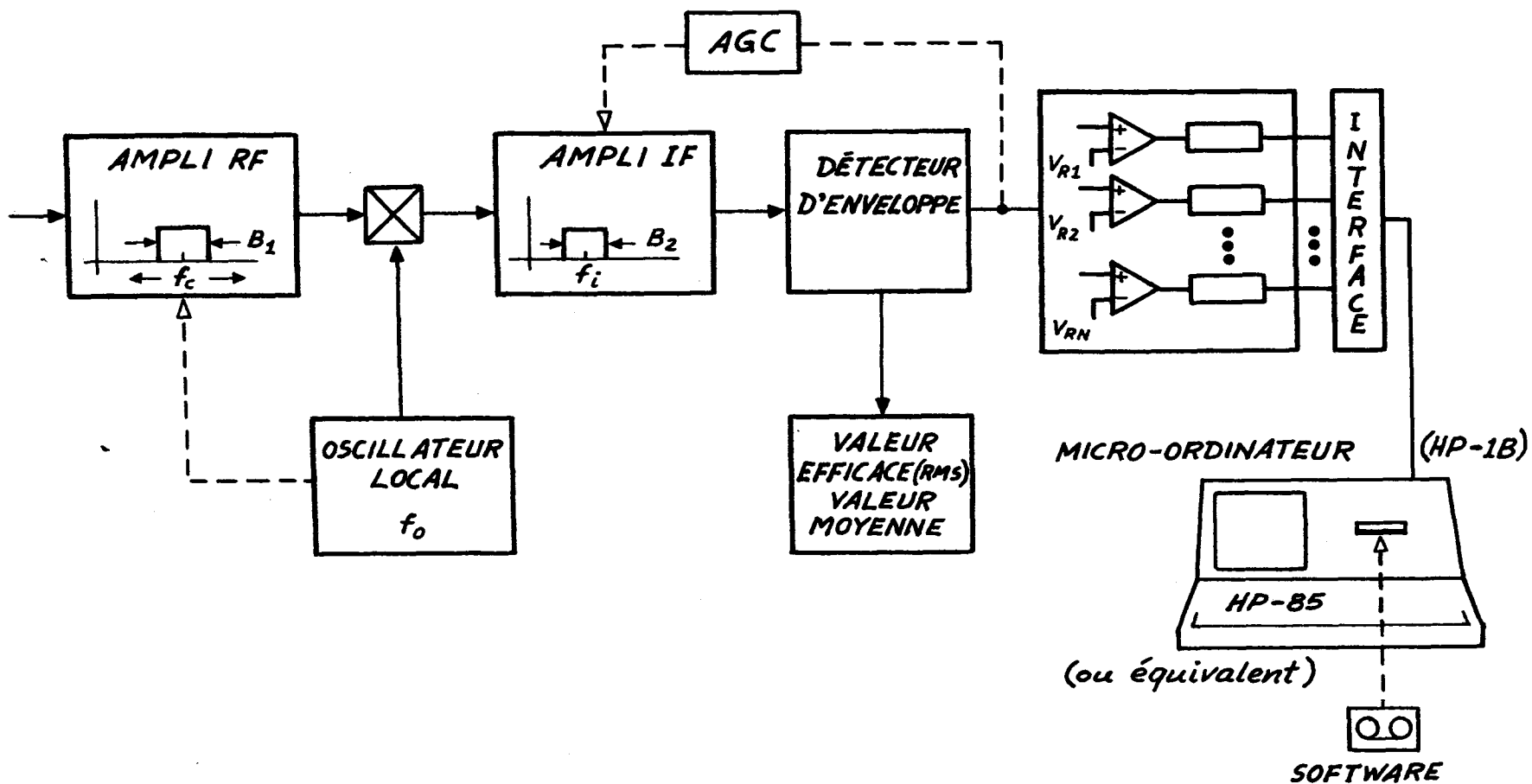


Figure 5.1. Conception préliminaire d'un système de mesure de bruit radio intégré. Ce système utilisant un récepteur superhétérodyne pourrait opérer dans une bande de 0,3 à 3 GHz avec une largeur de bande de 10 kHz avec une plage dynamique supérieure à 80 dB. Les données mesurées pourraient être traitées en temps réel ou différé avec un mini-ordinateur (type HP-85) spécialement dédié à cette fin.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. ANGERS, G.Y. DELISLE, N. CYR, "Etude des problèmes associés à la mesure du bruit radio et à l'utilisation des données pour prédire la performance des systèmes de communications", Rapport final n° LT-79-8231, Contrat OSU78-00242, Laboratoire de Télécommunications, Département de Génie Electrique, Université Laval, Québec, Canada, mars 1979.
- [2] W.R. LAUBER, "Amplitude probability distribution measurements at the Apple Grove 775 kV Project", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-95, n° 4, pp. 1254-1262, juillet-août 1976.
- [3] D. MIDDLETON, "Statistical physical models of urban radio noise environments - Part I: Foundation", IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. EMC-14, n° 2, pp. 38-56, mai 1972.
- [4] D. MIDDLETON, "Man-made noise in urban environments and transportation systems: Models and Measurements", IEEE Trans. Commun., vol. COM-21, n° 11, pp. 1232-1241, novembre 1973.
- [5] D. MIDDLETON, "Statistical-physical models of electromagnetic interference", IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. EMC-19, n° 3, pp. 106-127, août 1977.
- [6] A. SPAULDING, D. MIDDLETON, "Optimum reception in an impulsive interference environment - Part I: Coherent detection", IEEE Trans. Commun., vol. COM-25, n° 9, pp. 910-923, septembre 1977.
- [7] A. SPAULDING, D. MIDDLETON, "Optimum reception in an impulsive interference environment - Part II: Incoherent reception", IEEE Trans. Commun., vol. COM-25, n° 9, pp. 924-934, septembre 1977.
- [8] H. AKIMA, "A method of numerical representation for the amplitude probability distributions of atmospheric radio noise", Office of Telecommunications, U.S. Dept. of Commerce, Research and Engineering Report OT/TRER 27, Boulder, Colorado, mars 1972.
- [9] CISPR Publication 1, 2nd ed. 1972, "Specification for CISPR Radio interference measuring apparatus for the frequency range 0.15 MHz to 30 MHz", Geneva IEC.
- [10] CISPR Publication 2, 2nd ed. 1975, "Specification for CISPR radio interference measuring apparatus for the frequency range 25 MHz to 300 MHz", Geneva IEC.
- [11] J.H. COOK, "Quasi-peak-to-RMS voltage conversion", IEEE Trans. Non Electromagn. Compat., vol. EMC-21, n° 1, pp. 9-12, février 1979.
- [12] R.E. BURGHSS, "The measurement of fluctuation noise by means of a diode voltmeter", American Standard Assoc. Paper RRB/C92, mars 1945.

- [13] W.Q. CHRICHLOW, C.J. ROUBIQUE, A.D. SPAULDING, W.M. BERRY, "Determination of the amplitude-probability distribution of atmospheric radio noise from statistical moments", *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 64D, n° 1, pp. 49-56, janvier-février 1960.
- [14] A.D. SPAULDING, "Stochastic modeling of the electromagnetic interference environment", *Conference record of the 1977 International Conference on Communications*, Chicago, Ill., pp. 114-123, juin 1977.
- [15] H.M. HALL, "A new model for impulsive phenomena: application to atmospheric-noise communications channels", *Stanford University Electronics Laboratories, Tech. Report n° 3412-8 and n° 7050-7*, août 1966.
- [16] A.A. GIORDANO, F. HABER, "Modeling of atmospheric noise", *Radio Science* vol. 7, n° 11, pp. 1011-1023, 1972.
- [17] W.R. LAUBER, J.M. BERTRAND, "Statistical measurements and modelling of HUDC powerline noise", *Conference record of the 1979 IEE International Symposium on Electromagn. Comp.*, San Diego, CA, pp. 224-231, octobre 1979.
- [18] W.Q. CHRICHLOW, A.D. SPAULDING, C.J. ROUBIQUE, R.T. DISNEY, "Amplitude distributions for atmospheric radio noise", *NBS Monograph 23*, National Bureau of Standards, Boulder Colorado, 1960.
- [19] A.D. SPAULDING, C.J. ROUBIQUE, W.Q. CHRICHLOW, "Conversion of the amplitude probability distribution function for atmospheric radio noise from one bandwidth to another. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 66D, n° 6, pp. 713-720, novembre-décembre 1962.
- [20] J.K. OMURA, "Statistical analysis of LF/VLF communication modems", *Special Technical Report 1*, SRI Project 7045, Stanford Research Institute, Menlo Park, CA, août 1979.
- [21] D. MIDDLETON, "Procedures for determining the parameters of the first-order canonical models of class A and class B electromagnetic interference", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-21, n° 3, pp. 190-208, août 1979.
- [22] D. MIDDLETON, "Canonical non-gaussian noise models: their implications for measurement and for prediction of receiver performance", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-21, n° 3, pp. 209-220, août 1979.
- [23] K. FURUTSU, I. ISHIDA, "On the theory of amplitude distribution of impulsive random noise and its application to the atmospheric noise", *Journal of the Radio Research Laboratories (Japan)*, vol. 7, n° 32, 1960.
- [24] P. BECKMANN, "Amplitude probability distribution of atmospheric radio noise", *Radio Science*, vol. 68D, pp. 723-726, juin 1964.
- [25] H. OTTESEN, "Electromagnetic compatibility of random man-made noise sources", *Ph.D. Thesis*, Department of Electrical Engineering, Univ. of Colorado, Boulder, Co, 1968.
- [26] W.J. RITCHER, T.I. SMITS, "Numerical evaluation of Rice's representation of the probability density function for Poisson impulsive noise", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 56, pp. 481-496, 1974.

- [27] E.N. SKOMAL, "Man-made radio noise", Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1978, chap. 5.
- [28] M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN, Eds., "Handbook of mathematical function", Dover Publications Inc., New York, N.Y., 1970, chap. 13.
- [29] D. MIDDLETON, "An introduction to statistical communication theory", McGraw Hill, New York, N.Y., 1960.
- [30] L.J. SLATER, Confluent hypergeometric functions, Cambridge University Press, Cambridge, U.S.A., 1960.

Appendice A

MODELE CCIR CONSTRUCTION ET PROGRAMMES

Dans cet appendice, on retrouvera :

- 1) Les détails de la construction géométrique requise pour joindre, sur un arc de cercle, les composantes impulsionnelles et de Rayleigh dans le modèle CCIR.
- 2) Le programme du modèle CCIR écrit en APL avec les données d'Akima [8] mais simplifié selon l'exposé précédent sur la construction géométrique nécessaire.

1) Détails de la construction géométrique du modèle CCIR

L'abscisse et l'ordonnée du système de coordonnées utilisé sont données par:

$$x = -\log(-\ln P) \quad (\text{A-1})$$

et $y = \log v \quad (\text{A-2})$

D'après le modèle CCIR, l'APD du bruit radio atmosphérique peut être représentée, dans ce système de coordonnées, par une courbe divisée en trois sections. Cette courbe est constituée de deux droites jointes tangentielllement par un arc de cercle, tel qu'illustré à la figure A-1 ci-dessous:

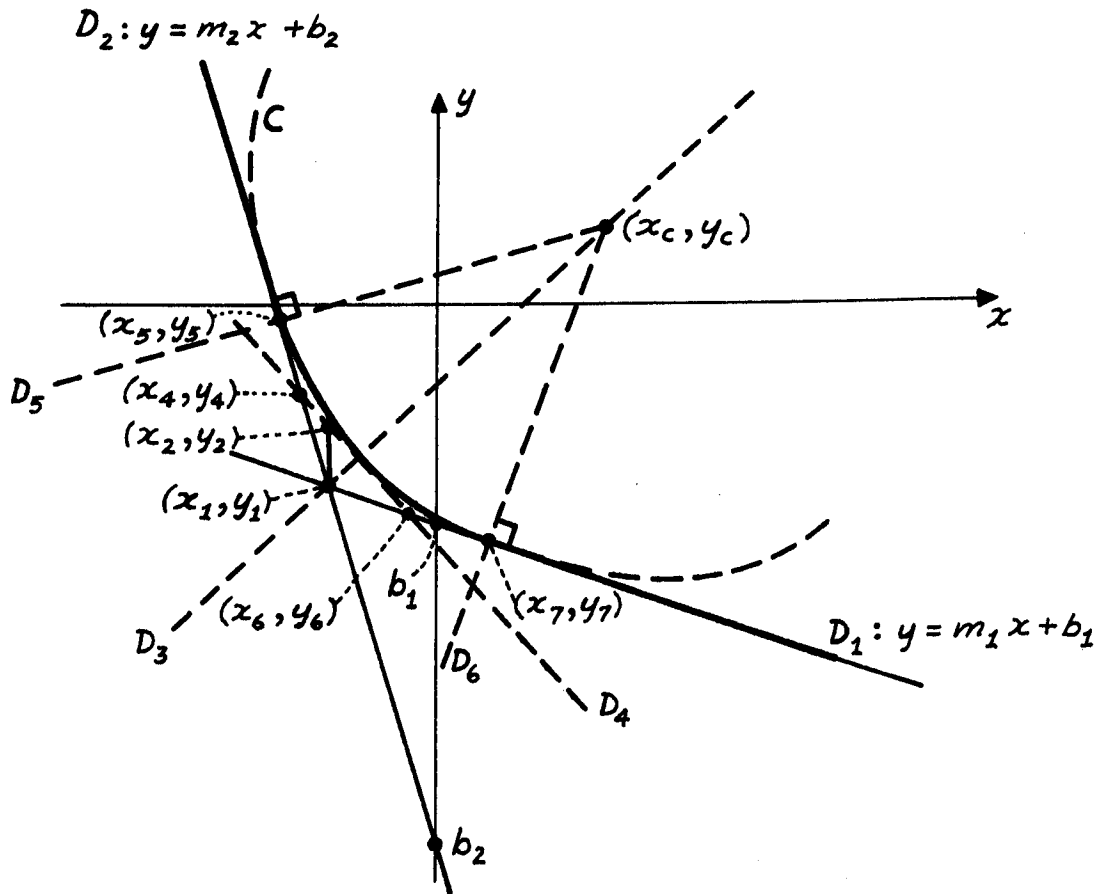


Fig. A-1: Division de la courbe en trois sections pour le modèle CCIR.

Les trois sections de la courbe ont pour équations les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} (x \geq x_7) \\ , y \leq y_7 \end{aligned} \quad D_1 : y = m_1 x + b_1 \quad (A-3)$$

$$\begin{aligned} (x_5 \leq x \leq x_7) \\ , y_5 \geq y \geq y_7 \end{aligned} \quad C : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad (A-4)$$

$$\begin{aligned} (x \leq x_5) \\ , y \geq y_5 \end{aligned} \quad D_2 : y = m_2 x + b_2 \quad (A-5)$$

La droite D_1 a une pente identique à celle d'une distribution de Rayleigh, donc:

$$m_1 = -0,5 \quad (A-6)$$

Akima [8] a déterminé les relations numériques qui existent entre m_2 , b_1 , b_2 et V_d . Pour une valeur donnée de V_d , on peut donc calculer les paramètres m_2 , b_1 et b_2 . Ceux-ci étant connus, il ne reste qu'à évaluer x_5 , x_7 , x_c , y_c et R au moyen des relations géométriques suivantes:

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}, \quad (A-7)$$

$$y_1 = m_1 x_1 + b_1, \quad (A-8)$$

$$m_3 = \tan\left[\tan^{-1} m_1 + \frac{1}{2}(\pi - \tan^{-1} \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2})\right], \quad (A-9)$$

$$m_4 = -\frac{1}{m_3}, \quad (A-10)$$

$$b_4 = y_1 - 0,15(m_2 + 0,5) - m_4 x_1, \quad (A-11)$$

$$x_5 = 2\left(\frac{b_2 - b_4}{m_4 - m_2}\right) - x_1, \quad (A-12)$$

$$y_5 = m_4(x_1 + x_5) + 2b_4 - y, \quad (A-13)$$

$$m_5 = -\frac{1}{m_2}, \quad (A-14)$$

$$b_5 = y_5 - m_5 x_5, \quad (A-15)$$

$$x_7 = 2 \left(\frac{b_1 - b_4}{m_4 - m_1} \right) - x_1, \quad (\text{A-16})$$

$$y_7 = m_4(x_1 + x_7) + 2b_4 - y_1, \quad (\text{A-17})$$

$$x_c = \frac{y_1 - m_3 x_1 - b_5}{m_5 - m_3}, \quad (\text{A-18})$$

$$y_c = m_5 x_c + b_5, \quad (\text{A-19})$$

$$R = [(x_5 - x_c)^2 + (y_5 - y_c)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-20})$$

Les axes de l'APD sont données par:

$$V = 20y \quad (\text{dB}) \quad (\text{A-21})$$

$$P = e^{-10^{-x}} \quad (\text{A-22})$$

Le programme en APL réalisant le modèle CCIR est basé sur les équations précédentes, moins nombreuses et souvent plus simples que celles présentées par Akima. Les paramètres m_2 , b_1 et b_2 sont déterminées par interpolation des données numériques fournies par ce dernier.

```

▽APD△NBS[0]▽
▽ APD△NBS;AD;AV;B;D;E;H;HH;I;K;K2;K3;L;MB;M1;M2;M3;R;S;VD;X;
X1;X5;Y;YA;YB;Y1;Y5;Y7;Z
[1]  A
[2]  A APD DU BRUIT RADIOELECTRIQUE
[3]  A MODELE DU NBS/CCIR
[4]  A PROGRAMMEUR : GILLES GONTHIER [1980]
[5]  A          (D'APRES LE PROGRAMME D'AKIMA)
[6]  A
[7]  DAV[160], 'INTERVALLE ENTRE LES AMPLITUDES (1,2,5 OU 10 DB)'
[8]  →OX1~(HH+0)ε1 2 5 10,P←10
[9]  I←PP0+ 'VD (DB)'
[10] S+VVD\Z+4↑(2↓((VD+0)εVVD),1 1)/VVD
[11] L←((X/VD-1↓Z)÷x/Z[1]-1↓Z),(X/VD-Z[1 3 4])÷x/Z[2]-Z[1 3 4]
[12] L←L,(((X/VD-Z[1 2 4])÷x/Z[3]-Z[1 2 4]),(X/VD-3↑Z)÷x/Z[4]-3↑Z
[13] YA←20x-0.99891+A←+/LxB1[CS]
[14] YB←20x(-1.14037×MB←+/L×MCS)]+B←+/LxB2[CS]
[15] Y1←A-0.5×X1+(B-A)÷-0.5-MB
[16] M2←-÷M1+30-0.4636476+0.5x(01)--30(-0.5-MB)÷1+-0.5×MB
[17] K2←(-X1×M2)+Y1-0.15×MB+0.5
[18] Y5←B+MB×X5+(2x(B-K2)÷M2-MB)-X1
[19] Y7←(2×K2+M2×(A-K2)÷M2+0.5)-Y1
[20] K←K3+M3×H←((Y1-X1×M1)-K3+Y5-X5×M3)÷(M3←-÷MB)-M1
[21] R←(((X5-H)×2)+(Y5-K)×2)×0.5
[22] 'URMS (DB)'
[23] AD←YB,(((YB>E)∧YA<E)/E←(HH-HHIS+0)+100-HH×(200÷HH),YA
[24] D←PAD←(=-/2↑E)↓(=/2↑E+L0.5+10×AD)↓AD
[25] L3:→((Y≥Y5),Y7≥Y←AD[1]÷20)/(L4,L5)
[26] →L6,X←H-((R×R)-(Y-K)×2)×0.5
[27] L4:→L6,X←(Y-B)÷MB
[28] L5:X←(Y-A)÷-0.5
[29] L6:P←P,★-10★-X
[30] →L3×\D≥I+I+1
[31] AV←10★(A+AD+S)÷20
[32] B←YB,YA
[33] PRINTAPD
[34] DAV[160],'.0001 → IMPULSIF → ',(5 1÷100x★-10★-X1),' → RAYL
EIGH → 99'
▽

```


AFDANBS

INTERVALLE ENTRE LES AMPLITUDES (1,2,5 OU 10 DB)

Q:

5

VD (DB)

Q:

2.4

VRMS (DB)

Q:

-1.4

AMPLITUDE (DB)	PROBABILITE (POUR CENT)
20.8	0.0001
20.0	0.0003
15.0	0.0301
10.0	0.6014
5.0	4.3479
0.0	17.4847
-5.0	42.8178
-10.0	71.4544
-15.0	89.8396
-20.0	96.6686
-25.0	98.9343
-25.3	99.0000

PLAGE DYNAMIQUE = 46.1 DB

NOMBRE DE POINTS = 12

.0001 → IMPULSIF → 23.6 → RAYLEIGH → 99

```

▽PRINTAPD[0]▽
▽ PRINTAPD
[1] DAVC160], 'AMPLITUDE  PROBABILITE'
[2] ' (DB)          (POUR CENT)', DAVC160]
[3] 6 1 15 4*(2,D)PA,100*P
[4] DAVC160], 'PLAGE DYNAMIQUE = ', (6 1*-/B), ' DB'
[5] DAVC160], 'NOMBRE DE POINTS = ' ;D
▽

```

DATA

M	R1	B2	VVD
-0.5	0.000000	0.000000	1.0491
-0.6	-0.021645	-0.037645	1.1779
-0.7	-0.044545	-0.076545	1.3215
-0.8	-0.068755	-0.116755	1.4803
-0.9	-0.094335	-0.158335	1.6549
-1.0	-0.121345	-0.201345	1.8466
-1.2	-0.179915	-0.291915	2.2831
-1.4	-0.244635	-0.389135	2.7973
-1.6	-0.315975	-0.493475	3.3941
-1.8	-0.394340	-0.605340	4.0796
-2.0	-0.479955	-0.724955	4.8567
-2.2	-0.572475	-0.852475	5.7218
-2.4	-0.672240	-0.987740	6.6744
-2.6	-0.779000	-1.130500	7.7069
-2.8	-0.892360	-1.280360	8.8107
-3.0	-1.011900	-1.436900	9.9740
-3.5	-1.318470	-1.854595	12.9794
-4.0	-1.631605	-2.304120	16.0528
-5.0	-2.245005	-3.280115	22.1551
-6.0	-2.853540	-4.340210	28.2294
-7.0	-3.460730	-5.470210	32.2720
-8.0	-4.068885	-6.660310	40.2839
-9.0	-4.682130	-7.903170	46.2711
-10.0	-5.291490	-9.193060	52.2264

Appendice B

MODELE LOG-NORMAL TRAITEMENT MATHEMATIQUE ET PROGRAMMES.

Cet appendice présente :

- 1) Le traitement mathématique complet du modèle log-normal tel que présenté par Omura [13] et modifié pour y dériver une formule incluant tous les paramètres.
- 2) Les programmes en APL et en BASIC réalisés pour effectuer les calculs numériques présentés au chapitre 2.

Appendice B

MODELE LOG-NORMAL

Les grandes fluctuations d'amplitudes d'origine impulsionnelle sont les plus aptes à causer des erreurs dans un système de communication. Parce qu'il met justement l'accent sur le caractère impulsionnel du bruit atmosphérique, le modèle log-normal permet de prédire avec précision la performance d'un système particulier.

On peut considérer le bruit atmosphérique comme un processus à bande étroite ayant une enveloppe log-normale de la forme

$$a(t) = Ae^{n(t)} \sin[\omega_0 t + \theta(t)] \quad (\text{B-1})$$

où $n(t)$ est un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle et dont la fonction d'autocorrélation est donnée par

$$R_n(\tau) = \overline{n(t)n(t+\tau)} \quad (\text{B-2})$$

A est une constante, et $\theta(t)$ est un processus dont la phase aléatoire, uniformément distribuée entre 0 et 2π , est indépendante du processus gaussien $n(t)$.

B.1 Propriétés du modèle log-normal

Nous admettons que le modèle du bruit défini par (B-1) est un processus stationnaire à court terme. L'enveloppe du bruit

$$E(t) = Ae^{n(t)} \quad (\text{B-3})$$

possède une fonction d'autocorrélation qui s'exprime comme

$$\begin{aligned} R_E(\tau) &= \overline{E(t)E(t+\tau)} \\ &= A^2 \overline{e^{n(t) + n(t+\tau)}} \\ &= A^2 e^{[\sigma_n^2 + R_n(\tau)]} \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

où $\sigma_n^2 = R_n(0)$ est la variance de $n(t)$.

La puissance moyenne du processus de bruit est donnée par

$$\begin{aligned}
R_a(0) &= \overline{a^2(t)} \\
&= \overline{A^2 e^{2n(t)} \sin^2[\omega_0 t + \theta(t)]} \\
&= \overline{A^2 e^{2n(t)}} \overline{\sin^2[\omega_0 t + \theta(t)]} \\
&= A^2 e^{2\sigma_n^2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{A^2}{2} e^{2\sigma_n^2} \tag{B-5}
\end{aligned}$$

Si nous admettons que le bruit possède une densité spectrale de puissance approximativement uniforme de N_0 watts/hertz le long d'une bande de prédétection de W hertz, nous obtenons la relation

$$N_0 W = \frac{A^2}{2} e^{2\sigma_n^2} \tag{B-6}$$

Considérons maintenant les tensions moyenne et efficace de l'enveloppe du bruit. La tension moyenne est donnée par

$$\begin{aligned}
E_{AVE} &= \overline{E(t)} = \overline{Ae^{n(t)}} \\
&= Ae^{\frac{1}{2}\sigma_n^2} \tag{B-7}
\end{aligned}$$

et la tension efficace de l'enveloppe est donnée par

$$\begin{aligned}
E_{RMS} &= \sqrt{\overline{E^2(t)}} = \left(\overline{A^2 e^{2n(t)}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= Ae^{\sigma_n^2} \tag{B-8}
\end{aligned}$$

La tension de déviation, V_d , est définie comme

$$\begin{aligned}
V_d &= 20 \log_{10} \left(\frac{E_{RMS}}{E_{AVE}} \right) \\
&= 20 \log_{10} \left(e^{\frac{1}{2}\sigma_n^2} \right) \\
&= 10\sigma_n^2 \log_{10} e \tag{B-9}
\end{aligned}$$

Les équations (B-6) et (B-9) permettent de relier les paramètres A et σ_n du modèle aux paramètres mesurables V_d et F_a (facteur de bruit d'antenne équivalent, $F_a = 10 \log_{10} [N_0/kT_0]$).

A un instant donné

$$E = Ae^n \quad (\text{B-10})$$

est une variable aléatoire, fonction de la variable aléatoire gaussienne n de moyenne nulle et de variance σ_n^2 . La distribution (ou répartition) de probabilité de E est donnée par

$$\begin{aligned} P(V) &= P_r\{E \leq V\} \\ &= P_r\{Ae^n \leq V\} \\ &= P_r\left\{e^n \leq \frac{V}{A}\right\} \\ &= P_r\left\{n \leq \log_e \left(\frac{V}{A}\right)\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{\log_e \frac{V}{A}}{\sqrt{\sigma_n^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

où $P_r\{A\}$ est la probabilité de l'événement A , et

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{B-12})$$

est la fonction de distribution cumulative d'une variable aléatoire normale standardisée.

La distribution de probabilité d'amplitude (APD) de l'enveloppe du bruit est donnée par

$$\begin{aligned} P_0(V) &= P\{E > V\} \\ &= 1 - P(V) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\log_e \left(\frac{V}{A}\right)}{\sqrt{\sigma_n^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B-13})$$

B.2 Dérivation d'une formulation intégrant tous les paramètres.

Notre objectif dans cette section est de dériver, à partir des résultats présentés précédemment, une formulation qui intègre tous les paramètres mesurables dans une seule expression.

Le modèle log-normal du bruit radio est défini par la relation

$$a(t) = Ae^{n(t)} \cos [2\pi f_0 t + \theta(t)] \quad (\text{B-14})$$

où $n(t)$ est un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle et de variance σ_n^2 , $\theta(t)$ est un processus aléatoire stationnaire indépendant de $n(t)$, et A est une constante. L'APD de l'enveloppe du bruit est défini par l'équation

$$P_0(V) = 1 - \Phi(x) \quad (\text{B-15})$$

où

$$x = \frac{\log_e \frac{V}{A}}{\sqrt{\sigma_n^2}} \quad (\text{B-16})$$

est une variable aléatoire normale ($\mu_x = 0$, $\sigma_x = 1$), fonction de A , σ_n et V . Nous allons calculer x en fonction des paramètres mesurables V_{dB} , V_{RMS} et V_d . Deux-ci sont donnés par

$$V_{dB} = 20 \log_{10} V \quad (\text{B-17.a})$$

ou

$$V = 10^{\frac{V_{dB}}{20}} \quad (\text{B-17.b})$$

$$V_{RMS} = 20 \log_{10} E_{RMS} \quad (\text{B-18.a})$$

ou

$$E_{RMS} = 10^{\frac{V_{RMS}}{20}} \quad (\text{B-18.b})$$

$$V_d = 20 \log_{10} \left(\frac{E_{RMS}}{E_{AVE}} \right) \quad (\text{B-19})$$

Nous avons également vu que les paramètres A et σ_n peuvent être définis par les relations

$$A = \frac{E_{RMS}}{e^{\sigma_n^2}} \quad (\text{B-20})$$

et

$$\sigma_n = \left(\frac{V_d}{10 \log_{10} e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B-21})$$

En utilisant les équations (B-18.b) et (B-21), (B-20) peut s'écrire comme

$$A = \frac{10^{\frac{V_{RMS}}{20}}}{e^{\frac{10 \log_{10} e}{2} V_d}} \quad (\text{B-22})$$

et avec (B-17.b), (B-21) et (B-22) dans (B-16) on obtient

$$\begin{aligned}
 x &= \left(\frac{10 \log_{10} e}{V_d} \right)^{\frac{1}{2}} \log_e \left[\frac{\left(\frac{V_{dB}}{10} \right)^{\frac{1}{20}} \left(e^{\frac{V_d}{10 \log_{10} e}} \right)}{\frac{V_{RMS}}{10}^{\frac{1}{20}}} \right] \\
 &= \left(\frac{10 \log_{10} e}{V_d} \right)^{\frac{1}{2}} \log_e \left[\left(\frac{V_{dB} - V_{RMS}}{10} \right)^{\frac{1}{20}} \left(e^{\frac{V_d}{10 \log_{10} e}} \right) \right] \\
 &= \left(\frac{10 \log_{10} e}{V_d} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{V_{dB} - V_{RMS}}{20} \right) \log_e 10 + \frac{V_d}{10 \log_{10} e} \right] \tag{B-23}
 \end{aligned}$$

sachant que

$$\log_e 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} e} \tag{B-24}$$

on trouve

$$x = \left(\frac{10 \log_{10} e}{V_d} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{V_{dB} - V_{RMS} + 2V_d}{20 \log_{10} e} \right) \tag{B-25}$$

et après simplification, nous obtenons finalement le résultat recherché

$$\boxed{x = \frac{V_{dB} - V_{RMS} + 2V_d}{2\sqrt{10V_d \log_{10} e}}} \tag{B-26}$$

L'équation (B-26) peut aussi s'écrire

$$x = \frac{V_{dB} - V_{RMS} + 2V_d}{c\sqrt{V_d}} \tag{B-27}$$

$$c = 2\sqrt{10 \log_{10} e} \cong 4,167947 \tag{B-28}$$

▽PLN[0]▽

▽ R+PLN E

```

[1]  A -----
[2]  A          MODELE LOG-NORMAL
[3]  A      FONCTION DE DISTRIBUTION DE PROBABILITE
[4]  A          CUMULATIVE COMPLEMENTAIRE (APD)
[5]  A
[6]  A  VRMS: VALEUR EFFICACE DE L'ENVELOPPE DU BRUIT
[7]  A          (DB > VALEUR DE REFERENCE)
[8]  A
[9]  A  VD  : VALEUR EFFICACE / VALEUR MOYENNE DE
[10] A          L'ENVELOPPE DU BRUIT (DB)
[11] A
[12] A  E   : AMPLITUDE DE L'ENVELOPPE DU BRUIT
[13] A          (DB > VALEUR DE REFERENCE)
[14] A
[15] A          GILLES GONTHIER (1981)
[16] A
[17] A -----
[18] R+1-FDN(E+(-VRMS)+2xVD)+4.16794665xVD*0.5

```

▽

▽FDN[0]▽

▽ P+FDN X/K/N/T

```

[1]  A -----
[2]  A      FONCTION DE DISTRIBUTION CUMULATIVE D'UNE
[3]  A  VARIABLE ALEATOIRE NORMALE STANDARDISEE (≅5)
[4]  A
[5]  A          GILLES GONTHIER (1980)
[6]  A
[7]  A -----
[8]  A  →0x\5≅T+IX
[9]  A  N+(0 1 2 3 4=LT)/10 17 26 36 47
[10] A  P+0.5+(xx)x0.3989422804014327x- /T, (+1+2xK)xTxx\T×T+2xK+1N

```

▽

```

10 |      MODELE LOG-NORMAL
20 |      APD DU BRUIT RADIO
30 |      GILLES GONTHIER (1981)
40 |
50 | CLEAR
60 | DIM V1(101)
70 | DISP "Parametres Vd et Vrms"
80 | INPUT V1, V2
90 | DISP "Emax, Emin, E"
100 | INPUT E1, E2, E3
110 | IF 1+INT((E1-E2)/E3) <= 101 THEN 140
120 | DISP "Trop de points. MAX=101"
130 | GOTO 90
140 | DISP USING "2/, K, /, 2X, K, 8X, K, 2/" ; "AMPLITUDE
PROBABILITE", "(dB)", "(X)"
150 | L=0
160 | FOR E0=E1 TO E2 STEP -E3
170 | X=(E0-V2+2*V1)/(5.89436666*SQR(V1))
180 | GOSUB 420
190 | P1=.5-.5*F1
200 | DISP USING "DDDD. D, 8X, DD. DDDD" ; E0, 100*P1
210 | V1(L)=LGT(-LOG(P1))
220 | L=L+1
230 | NEXT E0
240 | DISP USING "2/, K" ; "APD sur traceur?"
250 | INPUT A$
260 | IF A$ <> "OUI" THEN 380
270 | PLOTTER IS 705
280 | LOCATE 20, 125, 17, 87
290 | SCALE 0, 100, -1.998, 1.14
300 | DISP "Limite inferieure de l'axe des amplitud
es?"
310 | INPUT E4
320 | L=0
330 | MOVE E1-E4, V1(0)
340 | FOR E0=E1-E3 TO E2 STEP -E3
350 | L=L+1
360 | DRAW E0-E4, V1(L)
370 | NEXT E0
380 | END

```

```
390 | -----  
400 | SUBROUTINE ERROR FUNCTION  
410 |  
420 S=0  
430 T=1/(1+.3275911*ABS(X))  
440 FOR I=1 TO 5  
450 READ A  
460 S=S+A*T^I  
470 NEXT I  
480 F1=SGN(X)*(1-S*EXP(-ABS(X)^2))  
490 DATA .254829592, -.284488736, 1.421413741, -1.453  
152027, 1.061405429  
500 RESTORE  
510 RETURN
```

Appendice C

PROGRAMMES POUR LE MODELE DE MIDDLETON

Cet appendice présente les programmes complets du modèle physico-statistique du bruit radio de Middleton avec lesquels les résultats du chapitre 4 ont été obtenus.

Les versions en APL et en BASIC sont présentées y incluant les fonctions spéciales requises et le programme en BASIC pour générer le papier de Rayleigh et tracer directement avec l'ordinateur HP-85 les APD requises.

```

      ▽PBIC[]▽
    ▽ R←PBI E#I#T#RF
  [1] A -----
  [2] A MIDDLETON'S STATISTICAL-PHYSICAL MODEL
  [3] A   OF CLASS B ELECTROMAGNETIC NOISE
  [4] A
  [5] A   EXCEEDANCE PROBABILITY (PART I )
  [6] A
  [7] A
  [8] A           ^ ^ ^
  [9] A           F (E>E )
  [10] A           1   0 B-I
  [11] A
  [12] A           GILLES GONTHIER
  [13] A   LABORATOIRE DE TELECOMMUNICATIONS
  [14] A   DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
  [15] A   UNIVERSITE LAVAL
  [16] A   MARCH 1981
  [17] A -----
  [18] E←-10+E÷10
  [19] A1←T+1+R←I+0
  [20] LA#RP←R
  [21] R←R+T×(1/A1-1)×HYPGF E
  [22] T←T×-A←+I←I+1
  [23] A1←1+0.5×ALPHA×I
  [24] →LAX\IR#RP
  [25] R←1+EXR

```

```

      ▽HYPGF[]▽
    ▽ R←HYPGF Z
  [1] A -----
  [2] A   CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION
  [3] A
  [4] A IF Z≧100:
  [5] A THE FUNCTION CALLS THE FUNCTION 'HYP'
  [6] A AND APPLIES KUMMER'S FIRST THEOREM:
  [7] A
  [8] A
  [9] A   F (A#B#Z) = EXP(Z)× F (B-A#B#-Z)
  [10] A   1 1           1 1
  [11] A
  [12] A
  [13] A IF Z<100:
  [14] A THE FUNCTION CALLS THE FUNCTION 'AHYP'
  [15] A (ASYMPTOTIC EXPANSION OF A CON. HYP.
  [16] A FUNC. FOR Z → -∞)
  [17] A
  [18] A -----
  [19] →LAX\IZ<100
  [20] A←B-A1
  [21] →OXR←(*Z)×HYP-Z
  [22] LA#A←A1
  [23] R←HYPA Z

```

▼HYPER[D]▼

▼ T←HYP Z;K;P;TP

```

[1] A-----
[2] A CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION
[3] A
[4] A          00          N
[5] A          --- (A) Z
[6] A          \          N
[7] A          F (A;B;Z) = / -----
[8] A          1 1          --- (B) N!
[9] A          N=0          N
[10] A
[11] A (A) = (A)(A+1)(A+2)...(A+N-1)
[12] A          N
[13] A          (A) = (B) = 1
[14] A          0          0
[15] A
[16] A          GILLES GONTHIER
[17] A LABORATOIRE DE TELECOMMUNICATIONS
[18] A DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
[19] A          UNIVERSITE LAVAL
[20] A          MARCH 1981
[21] A
[22] A-----
[23] A T←P←1+K←0
[24] A LA:TP←T
[25] A T←T+P←P×(A+K-1)×Z÷(B+K-1)×K←K+1
[26] A →LAXT←TP

```

▼

▼HYPER[D]▼

▼ R←HYPA Z;V

```

[1] A-----
[2] A          ASYMPTOTIC EXPANSION OF A
[3] A CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION
[4] A
[5] A          Γ(B)          -A          -1
[6] A          F (A;B;Z) ~ ----- |Z|          F (A,1+A-B;-Z )
[7] A          1 1          Γ(B-A)          2 0
[8] A
[9] A          Z + -∞
[10] A
[11] A          GILLES GONTHIER
[12] A LABORATOIRE DE TELECOMMUNICATIONS
[13] A DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
[14] A          UNIVERSITE LAVAL
[15] A          MARCH 1981
[16] A
[17] A-----
[18] A V←x\((A+1+140)×((1+A-B)+1+140)÷(-Z)×140
[19] A R←1++/((↑V)[1]-1)↑V
[20] A R←R×((!B-1)÷!B-A+1)×(IZ)*-A

```

▼

▼PBIIIDJ▼

▼ P+PBII E+V

```

[1]  A -----
[2]  A MIDDLETON'S STATISTICAL-PHYSICAL MODEL
[3]  A   OF CLASS B ELECTROMAGNETIC NOISE
[4]  A
[5]  A   EXCEEDANCE PROBABILITY (PART II)
[6]  A
[7]  A           P (E>E )
[8]  A           1     0 B-II
[9]  A
[10] A           GILLES GONTHIER
[11] A   LABORATOIRE DE TELECOMMUNICATIONS
[12] A   DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
[13] A           UNIVERSITE LAVAL
[14] A           MARCH 1981
[15] A
[16] A -----
[17] E+-10+E-10
[18] V+*E+(GFB+(0,(15)+AB)+GFB+1
[19] P+(*-AB)x+/( (1,x\15PAB)+1,x\15)xV

```

▼

▼PACDJD▼

▼ P+PA E+V

```

[1]  A -----
[2]  A MIDDLETON'S STATISTICAL-PHYSICAL MODEL
[3]  A   OF CLASS A ELECTROMAGNETIC NOISE
[4]  A
[5]  A   EXCEEDANCE PROBABILITY
[6]  A
[7]  A           P (E>E )
[8]  A           1     0 A
[9]  A
[10] A           GILLES GONTHIER
[11] A   LABORATOIRE DE TELECOMMUNICATIONS
[12] A   DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
[13] A           UNIVERSITE LAVAL
[14] A           MARCH 1981
[15] A
[16] A -----
[17] E+-10+E-10
[18] V+*E+(GFA+(0,(15)+AA)+GFA+1
[19] P+(*-AA)x+/( (1,x\15PAA)+1,x\15)xV

```

▼

```
10 | MODELE PHYSICO-STATISTIQUE
20 |     DU BRUIT RADIO
30 |     APD / CLASSE B
40 |     PARTIE I
50 |
60 | PLOTTER IS 705
70 | LOCATE 20, 125, 17, 87
80 | SCALE 0, 100, -1.998, 1.14
90 | DIM V1(101)
100 | B=1.99999999
110 | CLEAR
120 | DISP "A^,α, D"
130 | INPUT A1, A2, D
140 | DISP "Emax, Emin, E"
150 | INPUT E1, E2, E3
160 | IF 1+INT((E1-E2)/E3) <= 101 THEN 190
170 | DISP "Trop de points. MAX = 101"
180 | GOTO 140
190 | DISP USING "2/, K, /, 2X, K, 8X, K, 2/" ; "AMPLITUDE
PROBABILITE", "(dB)", "(X)"
200 | L=0
210 | FOR E0=E1 TO E2 STEP -E3
220 | E=-10^((E0+D)/10)
230 | R1, J=0
240 | A0, T=1
250 | R2=R1
260 | IF E<-150 THEN 320
270 | A=B-A0
280 | X=-E
290 | GOSUB 650
300 | H=S*EXP(E)
310 | GOTO 360
320 | A=A0
330 | X=E
340 | GOSUB 800
```



```

350 H=R
360 Z=A0
370 GOSUB 950
380 R1=R1+T*G*H
390 J=J+1
400 T=T*(-A1)/J
410 A0=1+.5*A2*J
420 IF ABS((R1-R2)/R1)>.0000001 THEN 250
430 R1=1+E*R1
440 DISP USING "DDDD.D, 8X, DD. DDDD" , E0, 100*R1
450 V1(L)=LGT(-LOG(R1))
460 L=L+1
470 NEXT E0
480 DISP USING "2/,K" , "APD sur traceur?"
490 INPUT A$
500 IF A$#"OUI" THEN 590
510 DISP "Limite inferieure de l'axe des amplitud
.."
520 INPUT E4
530 L=0
540 MOVE E1-E4, V1(0)
550 FOR E0=E1-E3 TO E2 STEP -E3
560 L=L+1
570 DRAW E0-E4, V1(L)
580 NEXT E0
590 END

```

```

600 | -----
610 |           SUBROUTINE
620 | FONCTION HYPERGEOMETRIQUE
630 |           CONFLUENTE
640 |
650 K=0
660 P, S=1
670 S1=S
680 K=K+1
690 P=P*(A+K-1)*X/((B+K-1)*K)
700 S=S+P
710 IF ABS((S-S1)/S)>.00000001 THEN 670
720 RETURN
730 | -----
740 |           SUBROUTINE
750 |           EXPANSION ASYMPOTIQUE
760 | FONCTION HYPERGEOMETRIQUE
770 |           CONFLUENTE
780 |           X<<0
790 |
800 K=0
810 P, R=1
820 P1=P
830 K=K+1
840 P=P*(A+K-1)*(A-B+K)/(-X*K)
850 IF ABS(P)>ABS(P1) OR K=30 THEN 880
860 R=R+P
870 GOTO 820
880 Z=B-A
890 GOSUB 950
900 R=R*ABS(X)^(-A)/G
910 RETURN

```

```

920 | -----
930 |     SUBROUTINE GAMMA
940 |
950 IF ABS(Z)>1 THEN 980
960 GOSUB 1160
970 G=G1 @ GOTO 1120
980 N=INT(Z)
990 IF Z=-ABS(N) OR Z=0 THEN 1110
1000 Y=0-Z-N
1010 S=SGN(N)
1020 Z=Z-N+Y
1030 P=1
1040 FOR K=N<0 TO ABS(N)-(N>0)-Y
1050 P=P*(Z+K*S)
1060 NEXT K
1070 GOSUB 1160
1080 IF N<0 THEN 1100
1090 G=G1*P @ GOTO 1120
1100 G=G1/P @ GOTO 1120
1110 PRINT "NON DEFINIE POUR Z = 0, -1, -2, -3, ..."
1120 RETURN
1130 | -----
1140 |     SUBROUTINE GAM1
1150 |
1160 S=0
1170 FOR I=1 TO 21
1180 READ C
1190 S=S+C*Z^I
1200 NEXT I
1210 G1=1/S
1220 DATA 1, .577215664901, -.65587807152, -.04200263
5034, .166538811382, -.042197734555
1230 DATA -.009621971527, .007218943246, -.001165167
591, -.000215241674, .000128050282
1240 DATA -.000020134854, -.000001250493, .000001133
027, -.000000205633, .000000006116
1250 DATA .000000005002, -.000000001181, .0000000001
04, .000000000007, -.000000000003
1260 RESTORE
1270 RETURN

```

```

10 | MODELE PHYSICO-STATISTIQUE
20 |     DU BRUIT RADIO
30 |     APD / CLASSE A
40 |     CLASSE B / II
50 |
60 | PLOTTER IS 705
70 | LOCATE 20, 125, 17, 87
80 | SCALE 0, 100, -1.998, 1.14
90 | DIM V1(101)
100 | CLEAR
110 | DISP "CLASSE A OU CLASSE B (II)?"
120 | INPUT A$
130 | IF A$="A" THEN 180
140 | DISP "Parametres  $\Gamma$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ "
150 | INPUT G,  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ 
160 |  $\lambda_2 = \lambda * (2 - \lambda_1) / (4 - \lambda_1)$ 
170 | GOTO 210
180 | DISP "Parametres  $\Gamma$  et  $\lambda$ "
190 | INPUT G,  $\lambda$ 
200 |  $\lambda_2 = \lambda$ 
210 | DISP "Emax, Emin, E"
220 | INPUT E1, E2, E3
230 | IF 1+INT((E1-E2)/E3) <= 101 THEN 260
240 | DISP "Trop de points. MAX=101"
250 | GOTO 210
260 | DISP USING "2/, K, /, 2X, K, 8X, K, 2/" ; "AMPLITUDE
PROBABILITE", "(dB)", "(%)"
270 | L=0
280 | FOR E0=E1 TO E2 STEP -E3
290 | E=-10^(E0/10)
300 | S, M=0
310 | P=1
320 | M=M+1
330 | S1=S
340 | P=P*( $\lambda$ /M)

```

```

350 S=S+P*EXP(E*(1+G)/(G+M/A2))
360 IF ABS((S-S1)/S)>.0000001 THEN 320
370 F=E*(1+G)/G
380 IF F<-1100 THEN 410
390 P1=EXP(-A)*(S+EXP(F))
400 GOTO 420
410 P1=EXP(-A)*S
420 DISP USING "DDDD.D,6X,DD.DDDD" , E0,100*P1
430 V1(L)=LGT(-LOG(P1))
440 L=L+1
450 NEXT E0
460 DISP USING "2/,K" , "APD sur traceur?"
470 INPUT A$
480 IF A$<>"OUI" THEN 570
490 DISP "Limite inferieure de l'axe des amplitud
**"
500 INPUT E4
510 L=0
520 MOVE E1-E4, V1(0)
530 FOR E0=E1-E3 TO E2 STEP -E3
540 L=L+1
550 DRAW E0-E4, V1(L)
560 NEXT E0
570 END

```

```
10 PLOTTER IS 705
20 LOCATE 20,125,17,87
30 DISP "Limite inferieure de l'axe des amplitude
."
40 INPUT L
50 FRAME
60 DEG
70 LDIR 270
80 SCALE 0,100,-1.998,1.14
90 AXES 1,0,0,-1.998,10,1,3
100 CSIZE 2.6,.6,10
110 LORG 8
120 FOR K=0 TO 100
130 MOVE K,1.14
140 IF FP(K/10)#0 THEN 190
150 IDRAW 0,-.07
160 MOVE K,1.2
170 LABEL K+L
180 GOTO 200
190 IDRAW 0,-.035
200 NEXT K
210 LORG 8
220 FOR K=1 TO 18
230 READ Z
240 Z1=LGT(-LOG(Z/100))
250 MOVE 99,Z1
260 IDRAW 1,0
270 MOVE 1,Z1
280 IDRAW -1,0
290 MOVE -1.5,Z1
300 LABEL Z
310 NEXT K
320 DATA .0001,.01,.1,1,5,10,20,30,40,50,60,70,80,
85,90,95,98,99
330 END
```

